BERNOULLI'S VADEMECUM DES MECHANIKERS.

Bernoulli's

Vademecum des Mechanikers

oder

Praktisches Handbuch

für

Mechaniker, Techniker, Gewerbsleute und technische Lehranstalten

bearbeitet von

Friedrich Autenheimer,

gew. Direktor des zürcherischen Technikums zu Winterthur.

Zwanzigste Auflage.

Stuttgart 1894.
Verlag der J. G. Cotta'schen Buchhandlung
Nachfolger.

Druck der Union Deutsche Verlagsgesellschaft in Stuttgart.

Vorrede.

Die erste Ausgabe des „Vademecum" stammt von Christoph Bernoulli, Professor der industriellen Wissenschaften in Basel († 1863), besonders bekannt durch sein „Handbuch der Technologie" und seine „Dampfmaschinenlehre". Es erschien im Jahr 1829.

Die zweite Auflage folgte 1832, redigiert vom Sohne des Verfassers, Joh. Gustav Bernoulli, der zuerst eine Maschinenfabrik in Immendingen (Schwarzwald), dann eine Florettspinnerei in Basel und zuletzt eine Wollfabrik in Lörrach (Großh. Baden) leitete († 1877). Von ihm sind auch die folgenden Auflagen bis und mit der zehnten besorgt.

Zur achten, neunten und zehnten Auflage lieferte der jetzige Herausgeber Beiträge, ohne jedoch einen maßgebenden Einfluß auf die Schrift auszuüben. Die elfte Auflage (1862) und die nachfolgenden sind von ihm allein bearbeitet.

Die rasche Entwicklung der Technik machte es nötig, daß jede neue Auflage Verbesserungen und Erweiterungen bringen mußte. Um letzteres möglich zu machen, ohne den Umfang des Buches zu vermehren, wurde dasselbe von der elften Auflage an wiederholt in einer kleineren Schrift gedruckt. Das hatte zur Folge, daß diese Auflage nunmehr annähernd zweimal mehr Inhalt bietet als die zehnte Auflage und dann auch, daß von den früheren Herausgebern nur sehr wenig mehr übrig blieb.

In der neuen Auflage wurden alle Abschnitte einer Durchsicht unterworfen und mehrfaches abgeändert und beigefügt, so z. B. eine Theorie der Feder-Regulatoren von Porter und Westinghouse; eine Theorie über die Schwächung der Materialien

durch Spannungswechsel; sodann Aufgaben über das Gleichgewicht einfacher Balkenkonstruktionen und eiserner Dachstühle; Angaben über Maschinen, welche das Eisen und Holz bearbeiten; Gegenstrom-Kondensator von F. J. Weiß u. s. w.

Die Schrift war früher, wie der Titel sagt, ein Nachschlage- oder Sammelbuch. Sie hat aber nach und nach teilweise auch den Charakter eines Lehrbuches angenommen. Das zeigt sich nicht nur aus der systematischen Anordnung des Stoffes, sondern auch aus den Erläuterungen, Erklärungen, Ableitungen und Nachweisen, welche bei den meisten Nummern eingeflochten sind. Da die Darstellung durchwegs eine elementare ist, so kann das Buch auch von jenem Teile der Techniker benützt werden, welchen eine höhere technische Schulbildung abgeht. Von diesem Gesichtspunkte aus rechtfertigt sich daher auch die Aufnahme der Abschnitte über die Elemente der Arithmetik und Algebra, der Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie, der Gewichtsberechnungen u. s. w.

Möge dieser Ausgabe eine ebenso freundliche Aufnahme zu teil werden wie den früheren.

Winterthur, im Februar 1894.

Fr. Autenheimer.

Inhaltsverzeichnis.

Mathematik.

Seite

Allgemeine Mechanik.

Konstruktionslehre.

Mechanik tropfbar-flüssiger Körper.

Seite

Technologie.

Tabellen.

Berichtigungen.

S.	16	Zeile	3	von	oben	lies:	$10^{-2} = 0{,}01$	statt	$10^{-3} = 0{,}01$
„	39	„	6	„	oben	„	schneidet	„	scheidet.
„	49	„	4	„	oben	„	0,01389	„	0,1389.
„	77	„	24	„	oben	„	0,7 m	„	1,20 m
„	111	„	12	„	oben	„	0,06	„	0,6.
„	129	„	1	„	unten	„	0,2298	„	0,2228.
„	151	„	8	„	unten	„	Biegungsfestigkeit	„	Biegungsfähigkeit.
„	171	„	9	„	unten	„	1,0969	„	1,0607.
„	172	„	4	„	unten	„	0,00006	„	0,000051.
„	187	„	5	„	unten	„	$b' h'^2$	„	$b' h^2$.
„	214	„	1	„	unten	„	212	„	210.
„	220	„	18	„	oben	„	1,64	„	1,23.
„	228	„	8	„	unten	„	df	„	df'.

Mathematik.

1. Arithmetik.

I. Gewöhnliche Brüche.

1. **Erweiterung und Reduktion eines Bruches.** Der Wert eines Bruches wird nicht geändert, wenn man Zähler und Nenner desselben mit der gleichen Zahl multipliziert und dividiert. Hiernach ist

$$\frac{2}{3} = \frac{2\,.\,4}{3\,.\,4} = \frac{8}{12}; \qquad \frac{3}{5} = \frac{3\,.\,7}{5\,.\,7} = \frac{21}{35}$$

und

$$\frac{9}{15} = \frac{9:3}{15:3} = \frac{3}{5}; \qquad \frac{8}{20} = \frac{8:4}{20:4} = \frac{2}{5}.$$

2. **Addition.** Haben die Brüche gleiche Nenner, so addiere man die Zähler und lasse die Nenner unverändert. So wird

$$\frac{1}{13} + \frac{5}{13} + \frac{9}{13} = \frac{15}{13} = 1\frac{2}{13}.$$

Haben die Brüche ungleiche Nenner, so suche man zuerst den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner, bringe die Brüche vermittelst desselben auf gleiche Benennung und addiere sie wie oben. Es ist

a) $$\frac{5}{12} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} + \frac{2}{12} = \frac{7}{12}.$$

Hier ist der kleinste gemeinschaftliche Nenner = 12.

b) $$\frac{5}{12} + \frac{1}{8} = \frac{5\,.\,2}{12\,.\,2} + \frac{1\,.\,3}{8\,.\,3} = \frac{10}{24} + \frac{3}{24} = \frac{13}{24}.$$

Es ist nämlich der kleinste gemeinschaftliche Nenner aus 12 und 8 gleich 24.

Der kleinste gemeinschaftliche Nenner der Brüche $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{8}$ ist $3\,.\,2\,.\,3\,.\,4 = 72$. Deshalb erhält man

c) $$\frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{3}{8} = \frac{12}{72} + \frac{16}{72} + \frac{27}{72} = \frac{55}{72}.$$

3. **Subtraktion.** Sind die Brüche nicht gleichnamig, so bringe man sie unter gleichen Nenner; alsdann ziehe man den Zähler des Subtrahenden ab vom Zähler des Minuenden und lasse den Nenner unverändert. Es ist

$$\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2}{7}; \qquad \frac{5}{7} - \frac{3}{8} = \frac{40}{56} - \frac{21}{56} = \frac{19}{56}.$$

4. **Multiplikation.** Ein Bruch und eine ganze Zahl werden multipliziert, indem man den Zähler des Bruches und die ganze Zahl mit einander multipliziert und das Produkt durch den Nenner dividiert. Es ist

$$\frac{3}{5} \cdot 7 = \frac{3 \cdot 7}{5} = \frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}.$$

Zwei Brüche werden mit einander multipliziert, indem man die Zähler multipliziert, ebenso die Nenner, und das erstere Resultat durch das letztere dividiert. Es gibt

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 7} = \frac{12}{35}.$$

5. **Division.** Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man den Nenner des Bruches mit der ganzen Zahl multipliziert und den Zähler unverändert läßt. Es ist

$$\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}.$$

Eine ganze Zahl oder ein Bruch wird durch einen Bruch dividiert, indem man den letztern Bruch (den Divisor) umkehrt und mit jener ganzen Zahl oder jenem Bruche multipliziert. Es ist

$$5 : \frac{3}{4} = 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}; \quad \frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{15}.$$

II. Decimalbrüche.

1. **Darstellungsweise.** Jeder Ziffer einer Zahlenreihe kommt eine gewisse Stelle zu. Rückt eine Ziffer um eine Stelle nach links, so wird ihr Wert zehnmal größer; rückt sie um eine Stelle nach rechts, so wird ihr Wert zehnmal kleiner. Die erste Stelle rechts von den Einheiten wird also Zehntel, die zweite Hunderttel ꝛc. bedeuten. Die Einheiten und Zehntel werden durch ein Komma getrennt. Die Zahl 2,75 bezeichnet hiernach 2 Einheiten, 7 Zehntel und 5 Hunderttel. Fehlen in einer Zahl die Ganzen, so wird vor das Komma eine Null geschrieben. So enthält 0,24 keine Ganzen, dagegen 2 Zehntel und 4 Hunderttel, also zusammen 24 Hunderttel.

Die Zahl $2\frac{7}{10}$ wird geschrieben 2,7; ebenso ist $4\frac{35}{1000} = 4{,}035$.

Die Zahl 0,2504 enthält keine Ganzen, dagegen $\frac{2}{10}$, $\frac{5}{100}$ und $\frac{4}{10000}$, also zusammen 2504 Zehntausendtel.

Die Zahlen 0,5; 0,50; 0,500 bedeuten gleich viel, nämlich $\frac{5}{10}$. Somit bringen die Nullen rechts der Ziffer 5 keine Veränderung im Werte hervor. Dagegen nehmen die Zahlen 0,5; 0,05; 0,005 im Werte je um das 10fache ab.

2. **Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Decimalbrüche.** Man hänge dem Zähler des gewöhnlichen Bruches eine bestimmte Anzahl Nullen an und dividiere diese Zahl mit dem Nenner; vom entstandenen Quotienten werden alsdann so viele Stellen von der Rechten zur Linken abgeschnitten, als dem obigen Zähler Nullen angehängt wurden.

Beispiele. $\frac{7}{8} = 0{,}875;$ denn $\frac{7000}{8} = 875.$

$\frac{5}{32} = 0{,}15625;$ denn $\frac{500000}{32} = 15625.$

Nicht immer geht die Division auf. In diesem Fall bricht man bei einer bestimmten Stelle ab und erhält dadurch einen Annäherungswert. Beispiele hierfür sind:

$$\frac{2}{3} = 0{,}66666\ldots; \quad \frac{3}{7} = 0{,}42857\ldots; \quad 2\frac{7}{122} = 2{,}05737\ldots$$

Will man in diesen Decimalbrüchen schon bei der 4ten Stelle abbrechen, so wird man richtiger nehmen:

$$\frac{2}{3} = 0{,}6667; \quad \frac{3}{7} = 0{,}4286; \quad 2{,}0574.$$

3. **Addition und Subtraktion der Decimalbrüche.** Man setze die Ziffern von gleichem Rang unter einander (Zehntel unter Zehntel u. s. w.), führe die Rechnung wie bei ganzen Zahlen aus und trenne in der Summe oder Differenz die Zehner von den Einern durch das Komma.

Beispiele. Addition. Subtraktion.

	Addition		Subtraktion
Summanden	0,90058		
	7,634	Minuend	0,975
	3,007956	Subtrahend	0,483764
Summa =	11,542536	Differenz =	0,491236

4. **Multiplikation der Decimalbrüche.** Man multiplizieren beide Faktoren mit einander wie bei ganzen Zahlen, schneide im Produkt so viele Decimalstellen von der Rechten zur Linken ab, als Decimalstellen in beiden Faktoren zusammen sind, und ergänze etwa mangelnde Stellen zur Linken durch Nullen.

Beispiele.		
Multiplikand	1 13,5	0,137
Multiplikator	0,07 2	0,00057
	2 27 0	959
	79 45	685
Produkt =	8,172 0	0,00007809

5. **Abgekürzte Multiplikation.** Sie hat zum Zweck, nur so viel Decimalen im Produkt hervorzubringen, als man für nötig hält. Man beachte, daß z. B. die 5te Decimalstelle erhalten wird, wenn man die 4te Stelle mit der 1ten, die 3te mit der 2ten ꝛc. multipliziert. Oder auch man setze die Einer des Multiplikators unter diejenige Stelle des Multiplikanden, welche im Produkt die niederste sein soll; ordne die übrigen Ziffern des Multiplikators in umgekehrter Reihenfolge; multipliziere jede Stelle des Multiplikators nur mit der senkrecht darüber stehenden Stelle und der links darauf folgenden und setze die Ziffern rechts alle in eine gerade Linie unter einander. Dabei ist die erste Zahl einer jeden Horizontalreihe um das zu vermehren, was herauskäme, wenn auch noch die folgende Stelle rechts im Multiplikand multipliziert worden wäre.

Beispiel. Man multipliziere 3,042105 mit 2,113061, so daß das Produkt nur 5 Decimalstellen enthält.

Gewöhnliches Verfahren.		Abgekürztes Verfahren.	
	3,042105	3,042105	1
	2,113061	2,113061	3,0421 05
	3 042105	0	16 0311,2
18	2 52630	18	6 0842 1
912	6 315	913	3042 1
3042	1 05	3042	304 2
30421	0 5	30421	91 3
6 08421	0	608421	1 8
6,42815	3 433405	6,42815	6,4281 5

6. **Division der Decimalbrüche.** Man mache vor der Division die Brüche gleichnamig und lasse ihre gleichen Nenner weg, d. h. man versetze das Komma im Dividend und Divisor um gleich viele Stellen, bis in beiden Zahlen keine Decimalen mehr vorkommen; alsdann dividiere man diese ganzen Zahlen wie gewöhnlich.

Beispiele.

$$\begin{matrix}\text{Dividend} \ldots\ldots \\ \text{Divisor} \ldots\ldots\end{matrix} \frac{42,435}{12,3} = \frac{42435}{12300} = 3,45 \text{ (Quotient)}.$$

$$\frac{4\,00}{0,25} = \frac{40000}{25} = 1600; \quad \frac{0,046}{0,076089} = \frac{46000}{76089} = 0,60455 \ldots$$

III. Proportionen.

1. **Verhältnis zweier Größen.** Dasselbe zeigt an, wie oft die eine Größe in der andern enthalten ist. Zwei gleiche Verhältnisse (Quotienten) bilden eine Proportion.

Die beiden Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{6}{8}$ können als zwei solche gleiche Verhältnisse angesehen werden. Die daraus hervorgehende Proportion ist

$$3 : 4 = 6 : 8,$$

d. h. es verhält sich 3 zu 4, wie 6 zu 8. Die Zahlen 3 und 8 sind die äußern, 4 und 6 die innern Glieder der Proportion.

2. **Gleiche Produkte.** Bei jeder Proportion ist das Produkt der äußern Glieder gleich dem Produkt der innern.

Wenn z. B. $3 : 7 = 6 : 14$, so erhält man $3 \,.\, 14 = 7 \,.\, 6$.

Daraus folgt, daß die innern, ebenso die äußern Glieder mit einander vertauscht werden können. Statt der vorigen Proportion erhält man daher auch

$$3 : 6 = 7 : 14 \text{ und } 14 : 7 = 6 : 3, \text{ ꝛc.}$$

3. **Berechnung eines Gliedes.** Hieraus folgt, daß ein äußeres Glied gefunden wird, indem man das Produkt der innern Glieder durch das bekannte äußere Glied dividiert; daß ebenso ein inneres gleich ist dem Produkt der äußern, dividiert durch das bekannte innere.

Beisp. 1. $5 : 4 = x : 0,6$; folglich $x = \frac{5 \,.\, 0,6}{4} = 0,75$.

Beisp. 2. Wie viel Franken sind 13,5 Mark, wenn 125 Franken 100 Mark ausmachen? Man erhält:

$$100 : 13{,}5 = 125 : x, \text{ folglich } x = \frac{13{,}5 \cdot 125}{100} = 16{,}87 \text{ Fr.}$$

4. **Proportion aus gleichen Produkten.** Aus zwei gleichen Produkten, welche aus je zwei Faktoren bestehen, läßt sich eine Proportion dadurch bilden, daß man die Faktoren des einen Produktes zu innern, die des andern Produktes zu äußern Gliedern macht.

Da z. B. $6 \cdot 9 = 2 \cdot 27$, so erhält man hieraus

$$6 : 2 = 27 : 9; \quad 9 : 2 = 27 : 6,$$
$$6 : 27 = 2 : 9; \quad 9 : 27 = 2 : 6,$$
$$2 : 6 = 9 : 27; \quad 27 : 6 = 9 : 2, \text{ u. s. w.}$$

IV. Vorbegriffe der Algebra.

1. **Buchstabengröße.** Statt der bestimmten Zahlen werden in der Algebra allgemein Buchstaben als Größenzeichen angewendet. Dadurch wird es möglich, ganze Gruppen gleichartiger Aufgaben unter eine Regel zu bringen. Wenn z. B. drei Größen vorkommen und es ist eine derselben von der Summe der beiden andern abzuziehen, so kann man schreiben $a + b - c$.

Ist in einem besonderen Falle $a = 7$, $b = 5$, $c = 3$, so wird

$$a + b - c = 7 + 5 - 4 = 8.$$

Alle Größen, vor welchen + steht, heißen positive und alle, vor welchen — steht, negative Größen. Steht kein Zeichen vor der Größe, so wird + verstanden.

Bei Buchstabengrößen schreibt man statt $a \times b$ oder $a \cdot b$ meistens bloß $a\,b$, d. h. man schreibt beide Faktoren neben einander, ohne ein Vorzeichen dazwischen zu setzen.

2. **Potenz.** So nennt man das Produkt aus gleichen Faktoren. Die Potenz wird ausgedrückt, indem man zum Faktor als Grundzahl eine kleine Ziffer rechts oben beifügt, welche die Anzahl der Faktoren angibt. Diese letztere Zahl heißt Exponent.

Hiernach ist z. B. $a^4 = a\,a\,a\,a$; $a^2 b^3 = a\,a\,b\,b\,b$, u. s. w.

Wenn a die Grundzahl, so nennt man a die erste, a^2 die zweite, a^3 die dritte Potenz von a. Die zweite Potenz heißt auch Quadrat, die dritte Kubus.

3. **Wurzelausziehung.** Die Zerlegung einer Zahl in mehrere gleiche Faktoren heißt Wurzelausziehung und der gesuchte Faktor Wurzel. Bei der Zerlegung in 2, 3, . . gleiche Faktoren erhält man die zweite, dritte, . . Wurzel. Die zweite Wurzel heißt auch Quadratwurzel, die dritte Kubikwurzel. Um eine Wurzel anzudeuten, setzt man das Zeichen $\sqrt{}$ (verzogener Buchstabe r) vor die Größe, welche zerlegt werden soll, und fügt den Exponenten bei, welcher die Anzahl Faktoren angibt.

So bezeichnet $\sqrt[3]{27}$ die dritte Wurzel aus 27, also die Zahl 3, ferner $\sqrt[4]{16}$ die vierte Wurzel aus 16 oder 2.

Bei der Quadratwurzel wird der Exponent gewöhnlich weggelassen. So schreibt man $\sqrt{a}$ statt $\sqrt[2]{a}$.

4. **Koefficient.** Die Zahl, welche mit einer Buchstabengröße multipliziert wird, heißt ihr Koefficient oder auch ihre Vorzahl. So ist 5 in 5a der Koefficient von a, — 8 in — $8ab^2$ der Koefficient von ab^2. Ist kein solcher Koefficient vorhanden, so kann er = 1 angenommen werden, weil z. B. a = 1 . a ist.

5. **Gleichartige und ungleichartige Größen.** Algebraische Größen heißen gleichartig oder ungleichartig, je nachdem sie dieselben oder verschiedene Buchstabenverbindungen enthalten.

So sind 3ab und — 7ab, ferner $-5a^2b^4$ und $+\frac{2}{3}a^2b^4$ gleichartig, dagegen 3ab und $-7ab^2$ ungleichartig.

6. **Klammern.** Man wendet die Zeichen (. . .), [. . .] an, um anzuzeigen, daß alle Größen innerhalb der Klammer behandelt werden müssen, wie wenn sie nur Eine Größe bildeten.

So ist a — (b — c) nicht dasselbe wie a — b — c; denn im letztern Falle wird sowohl b als c subtrahiert, während im erstern nur b — c abgezogen wird.

7. **Einfache und zusammengesetzte Größen.** Diejenigen Teile eines Audruckes, welche durch die Vorzeichen + oder — verbunden sind, heißen seine Glieder. Der Ausdruck ist einfach oder zusammengesetzt, je nachdem er ein oder mehrere Glieder enthält. Ein Ausdruck mit einem Glied heißt auch Monom, mit zwei Gliedern Binom, mit mehr Gliedern Polynom.

So sind a^3, $2a^2b^2$, $-7b^3$ einfache, dagegen $a^2 - 2ab$, $a^3 + 3a^2b - c^3$ zusammengesetzte Größen.

Glieder und Faktoren einer Größe sind wohl zu unterscheiden. So bildet 4ab nur Ein Glied, enthält aber drei Faktoren, während $a^2 - 3bc$ aus zwei Gliedern besteht und nur Einen Faktor darstellt.

V. Die vier Species in Buchstabengrößen.

1. **Addition.** Zwei Größen von gleichem Wert, jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen (+ und —), heben sich beim Addieren gegenseitig auf.

So ist a + (— a) = 0, $-2b^2 + 2b^2 = 0$.

Um daher gleichartige Größen zu addieren, addiere man je für sich die positiven und negativen Koefficienten, nehme den Unterschied dieser Summen, setze das Vorzeichen der größern vor und schreibe die gemeinsamen Buchstabengrößen daneben. Kommen auch ungleichartige Glieder vor, so schreibe man sie mit ihren Vorzeichen neben die andern.

Beisp. Summanden			
	+ 14a	x — 2y	2a — b
	— 6a	— 2x + 3y	— 5a + 3c
	— 3a	+ 9y	d — 7b
	+ 5a	— x + 10y	— 3a — 8b + 3c + d

2. **Subtraktion.** Um eine algebraische Größe abzuziehen, ändere man ihr Vorzeichen, + in — oder — in +, und verfahre wie bei der Addition.

Beispiele.

Minuend	$7x + 5y - 10z$	$5a^2 - 4ab + 7b^2$
Subtrahend . .	$4x - 2y + 5z$	$-3a^2 + 9ab - 4b^2 + ac$
Differenz	$3x + 7y - 15z$	$8a^2 - 13ab + 11b^2 - ac$

Man könnte auch beim ersten Beispiel schreiben:

$$7x + 5y - 10z - (4x - 2y + 5z) = 3x + 7y - 15z$$

3. **Multiplikation.** Um zwei einfache algebraische Größen mit einander zu multiplizieren, so multipliziere man deren Koefficienten und setze das Resultat dem Produkt der Buchstabengrößen vor. Haben hierbei beide Faktoren dasselbe Vorzeichen, so erhält das Produkt das Vorzeichen +; haben sie verschiedene Vorzeichen, so wird das Produkt —.

Beisp. $5a \times -3b = -15ab; -\frac{2}{3}a^2 \times -\frac{3}{4}ab = -\frac{1}{2}a^3b$

Wenn mehr als zwei einfache Größen multipliziert werden sollen, so kann man zuerst zwei Faktoren, dann das Resultat mit dem dritten Faktor u. s. w. multiplizieren.

Wenn Multiplikator und Multiplikand zusammengesetzt sind, so muß jedes Glied des erstern mit jedem Glied des letztern multipliziert werden; alsdann ist die Summe aller dieser partiellen Produkte das vollständige Produkt.

1) $(3x^2 - 2xy + 5y^2) \times 3a^2x = 9a^2x^3 - 6a^2x^2y + 15a^2xy^2$

2) $$\begin{aligned}(a + 2c - d)(a - 3c) &= a^2 + 2ac - ad \\ &\quad - 3ac - 6c^2 + 3cd \\ \hline &= a^2 - ac - ad - 6c^2 + 3cd\end{aligned}$$

4. **Division.** Um ein Monom durch ein anderes zu dividieren, dividiere man die Koefficienten und Buchstabengrößen des Dividends durch diejenigen des Divisors. Wenn dabei diese zwei Größen dasselbe Vorzeichen haben, so wird der Quotient positiv; haben sie ungleiche Vorzeichen, so wird er negativ.

	Dividend.	Divisor.	Quotient.
Beisp.	$18ab$:	$2b =$	$9a$
	$12a^2d$:	$-6a =$	$-2ad$

Ist der Dividend ein Polynom, der Divisor ein Monom, so muß jedes Glied der erstern Größe durch die letztere dividiert werden. Alsdann ist die Summe der partiellen Quotienten der totale Quotient.

Beisp. $x^3y - 3x^2y^2 + 2y^4 : \frac{2}{3}x^2y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}y + 3\frac{y^3}{x^2}$

Sind Dividend und Divisor Polynome, so ordne man zunächst die Glieder beider Größen nach den steigenden und fallenden Potenzen eines und desselben Buchstabens; dividiere hierauf das erste Glied des Dividenden durch das erste Glied des Divisors und schreibe das Resultat in den Quotienten; multipliziere den gesamten Divisor mit den erhaltenen partiellen Quotienten und subtrahiere das Produkt von dem Dividenden; setze aus dem Dividenden neue Glieder herunter; dividiere mit dem ersten Glied des Divisors in das erste Glied des Restes und schreibe das Resultat als zweiten partiellen Quotienten zum ersten u. s. w. Wie bei der Division gewöhnlicher Zahlen geht die Division entweder auf oder es bleibt ein Rest, so oft auch das Verfahren wiederholt wird.

Beisp.
$$\begin{array}{l} a^3 - x^3 \;:\; a - x = a^2 + ax + x^2 \\ \underline{a^3 - a^2 x} \\ \quad + a^2 x - x^3 \\ \quad \underline{+ a^2 x - a x^2} \\ \qquad + a x^2 - x^3 \\ \qquad \underline{+ a x^2 - x^3} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Läßt sich eine zusammengesetzte Größe ohne Rest teilen, so kann diese Größe in ein Produkt aus Divisor und Quotient verwandelt werden.

Beisp. $ax^2 + bx = (ax + b)x$; $a^2 - x^2 = (a + x)(a - x)$

VI. Potenzen mit ganzen Exponenten.

1. **Potenzen mit gleichen Grundzahlen.** Sie werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert.

Beisp. $a^3 . a^2 = aaa . aa = a^{3+2} = a^5$

Sie werden dividiert, indem man den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividenden abzieht.

Beisp. $a^6 : a^2 = aaaaaa : aa = a^{6-2} = a^4$

Sind beide Exponenten gleich, so erhält man z. B.

$$a^4 : a^4 = a^{4-4} = a^0$$

Dieser Wert ist aber $= 1$, weil $a^4 : a^4 = 1$. Daher ist jede Potenz mit dem Exponenten 0 gleich der Einheit.

Wenn der Exponent des Divisors größer ist als der Exponent des Dividenden, so wird der Exponent des Quotienten negativ. So wird

$$a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2}$$

Allein dieser Wert ist auch $\frac{aaa}{aaaaa} = \frac{1}{a^2}$. Daher ist eine Potenz mit negativem Exponenten gleich der Einheit, dividiert durch dieselbe Potenz mit positivem Exponenten.

2. **Potenzierung eines Produkts.** Ein Produkt wird potenziert, indem man jeden Faktor potenziert und die Resultate multipliziert.

Beisp. $(ab)^3 = ab . ab . ab = a^3 b^3$

3. **Potenzierung eines Bruches.** Ein Bruch wird potenziert, indem man Zähler und Nenner potenziert.

Beisp. $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^4}{b^4}$

4. **Potenzierung einer Potenz.** Ein Produkt wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert und das Produkt als Exponenten der Grundzahl beisetzt.

Beisp. $(a^2)^3 = a^2 . a^2 . a^2 = a^{2 \cdot 3} = a^6$

5. **Quadrat einer zweiteiligen Größe.** Das Quadrat von $a + b$ ist

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2,$$

also gleich dem Quadrat des ersten, mehr dem doppelten Produkt aus dem ersten und zweiten, mehr dem Quadrat des zweiten Teiles.

6. **Kubus einer zweiteiligen Größe.** Der Kubus von $a + b$ wird erhalten, wenn man $(a + b)^2$ mit $a + b$ multipliziert. Daher ist

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Diese beiden letzten Formeln kommen bei der Quadrat- und Kubikwurzel-Ausziehung zur Anwendung.

VII. Wurzelausziehung.

1. **Wurzel rational oder irrational.** Die Wurzel aus einer Zahl kann genau oder nur annähernd genau bestimmt werden. Im erstern Fall heißt sie rational, im letztern irrational.

Läßt sich die Zahl, aus welcher die Wurzel auszuziehen ist, in eine Potenz verwandeln mit ganzen Exponenten, wie z. B. in a^6, so kann diese Potenz in 6 Faktoren zerlegt werden, wovon jeder a, oder in 3, wovon jeder a^2, oder in 2, wo jeder a^3 ist. Daher kann man aus a^6 die 6te, 3te oder 2te Wurzel genau ausziehen. Statt der 6ten kann man zuerst die 3te und aus dem Resultat die 2te ausziehen oder auch umgekehrt.

Dagegen kann aus a^6 jede andere Wurzel nicht genau ermittelt werden; ebenso nicht die Quadratwurzeln aus den Zahlen 2, 3, 5, . ., weil diese nicht in zweite Potenzen einer bestimmten Grundzahl verwandelt werden können.

2. **Wurzel reell oder imaginär.** Die Quadratwurzel einer positiven Größe hat das doppelte Vorzeichen, also $\pm$. Denn es ist z. B. $\sqrt{4} = \pm 2$, weil sowohl $+ 2$, als $- 2$, mit sich selbst multipliziert, $+ 4$ gibt.

Die Quadratwurzel aus einer negativen Größe ist nicht möglich. So ist z. B. $\sqrt{-9}$ weder $+ 3$, noch $- 3$, noch irgend eine andere Zahl, weil kein Wert, mit sich selbst multipliziert, $- 9$ gibt. Man nennt daher diese Wurzeln imaginär.

3. **Zweite Bezeichnung der Wurzel.** Statt $\sqrt[n]{a}$ schreibt man auch $a^{\frac{1}{n}}$. Es bezeichnet daher die Potenz mit dem Exponenten $\frac{1}{n}$ nichts anderes als die nte Wurzel aus der Grundzahl a.

Mithin ist auch $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{b} = b^{\frac{1}{3}}$ u. s. w.

Gerade so schreibt man $a^{\frac{m}{n}}$ für $\sqrt[n]{a^m}$. Daher wird sein

$$\sqrt[2]{a^4} = a^{\frac{4}{2}} = a^2;\ \sqrt[4]{a^2} = a^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{1}{2}};\ \sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2 \text{ u. s. w.}$$

4. **Wurzel aus einem Produkt.** Aus einem Produkt wird die Wurzel ausgezogen, indem man sie aus jedem Faktor auszieht und die Resultate multipliziert.

Beisp. $\sqrt{25 \cdot 9} = 5 \cdot 3$; $\sqrt[3]{4000} = \sqrt[3]{1000 \cdot 4} = 10\sqrt[3]{4}$,

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

5. **Wurzel aus einem Bruche.** Aus einem Bruche wird die Wurzel ausgezogen, indem man sie aus Zähler und Nenner auszieht.

Beisp. $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$; $\sqrt[3]{0{,}008} = \sqrt[3]{\frac{8}{1000}} = \frac{2}{10}$

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

VIII. Ausziehung der Quadratwurzel.

1. **Allgemeines Verfahren.** Nach der auf S. 8 angegebenen Regel wird das Quadrat der dreiteiligen Größe $a + b + c$, wenn die beiden ersten Teile als ein Glied aufgefaßt werden:

$$[(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2,$$
$$[a + b + c]^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2.$$

Es sei nun aus der mehrteiligen Größe rechts die Quadratwurzel auszuziehen. Man ziehe zuerst die Wurzel aus dem ersten Gliede a^2; diese ist a. Hierauf ziehe man das Quadrat des ersten Gliedes der Wurzel, nämlich a^2, ab, so erhält man als Rest $2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$. Nun dividiere man mit $2a$, d. h. dem Doppelten des ersten Gliedes der Wurzel, in das erste Glied $2ab$ des Restes; man erhält b als zweiten Teil der Wurzel. Sodann ziehe man das Produkt aus dem Divisor $2a$ und dem Quotienten b, sowie das Quadrat des zweiten Teiles, nämlich b^2, ab, und man erhält als Rest $2ac + 2bc + c^2 = 2(a + b)c + c^2$. Das erste Glied dieses Restes, nämlich $2(a + b)c$, dividiere man mit $2(a + b)$, d. h. mit dem Doppelten der schon gefundenen Wurzel $a + b$, so erhält man das dritte Glied c der Wurzel. Hierauf ziehe man das Produkt aus Divisor $2(a + b)$ und Quotient c, sowie das Quadrat c^2 des neuen Gliedes der Wurzel ab, so bleibt kein Rest mehr.

Würde für irgend eine andere Größe ein Rest bleiben, so könnten in gleicher Weise weitere Glieder der Wurzel erhalten werden.

Beisp. $\sqrt{1 - x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \ldots$

Abgezogen 1

Dividiert mit 2 | $- x$

Abgezogen . . . $- x + \frac{x^2}{4}$

Dividiert mit $2 - x$ | $- \frac{x^2}{4}$

Abgezogen . . . . $- \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{64}$

Dividiert mit $2 - x - \frac{x^2}{4}$ | $- \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{64}$ u. s. w.

Mittelst dieser Formel kann die Quadratwurzel aus einer Zahl, welche nur wenig von der Einheit abweicht, gefunden werden. Z. B. $\sqrt{0{,}97} = \sqrt{1 - 0{,}03} = 1 - \frac{0{,}03}{2} - \frac{0{,}03^2}{8} - \frac{0{,}03^2}{16} - \ldots = 0{,}984885\ldots$

2. **Anwendung auf bestimmte Zahlen.** Wird eine ganze Zahl mit 2 Ziffern geschrieben, so enthält ihr Quadrat 3 oder 4 Ziffern; daher hat eine ganze Zahl, welche mit 3 oder 4 Ziffern geschrieben wird, eine

zweizifferige Quadratwurzel. Enthält ein Quadrat 5 oder 6 Ziffern, so ist ihre Quadratwurzel dreizifferig u. s. w.

Man teile daher die Zahl, aus welcher die Wurzel auszuziehen ist, vom Komma aus von der Rechten zur Linken durch Striche in Klassen von je 2 Ziffern (wobei die letzte oder höchste Klasse auch nur aus einer Ziffer bestehen kann); suche die größte Wurzel der höchsten Klasse; schreibe sie rechts von der Zahl, aus welcher die Wurzel zu ziehen ist; bilde ihr Quadrat und setze es unter die erste Klasse; ziehe es davon ab; füge zum Rest die erste Ziffer der nächsten Klasse und betrachte diese Zahl als Dividend.

Man verdopple die erhaltene Wurzel und dividiere damit in den erwähnten Dividend; der Quotient ist die zweite Ziffer der Wurzel. Hierauf multipliziere man diesen Quotienten mit dem Divisor, schreibe ihn unter den Dividend und ziehe ab; zum Rest nehme man die zweite Ziffer der zweiten Klasse und ziehe davon das Quadrat des Quotienten ab.

So fahre man mit jeder Klasse fort. Geht die Wurzelausziehung bei den Einheiten nicht auf, so füge man Paare von Nullen als ergänzende Klassen hinzu, bis eine hinlängliche Zahl von Decimalen in der Wurzel gefunden ist. Sind statt dieser Paare von Nullen Decimalen hinter der ganzen Zahl, so ist das Verfahren das nämliche.

I. $\sqrt{33|64} = 58$ (a b)

$a^2 = 25$

$2a = 10 \,|\, 86$

$2ab = 80$

64

$b^2 = 64$

0

II. $\sqrt{0{,}07|29} = 0{,}27$ (ab)

$a^2 = 4$

$2a = 4 \,|\, 32$

$2ab = 28$

49

$b^2 = 49$

0

III. $\sqrt{8|50|30|56} = 2916$ (a b c d)

$a^2 = 4$

$2a = 4 \,|\, 45$

$2ab = 36$

90

$b^2 = 81$

$2(a+b) = 58 \,|\, 93$

$2(a+b)c = 58$

350

$c^2 = 1$

$2(a+b+c) = 582 \,|\, 3495$

$2(a+b+c)d = 3492$

36

$d^2 = 36$

0

IV. $\sqrt{0{,}00|85|4} = 0{,}09241\ldots$ (a b c d)

$a^2 = 81$

$2a = 18 \,|\, 44$

$2ab = 36$

80

$b^2 = 4$

$2(a+b) = 184 \,|\, 760$

$2(a+b)c = 736$

240

$c^2 = 16$

$2(a+b+c) = 1848 \,|\, 2240$

u. s. w.

IX. Ausziehung der Kubikwurzel.

1. **Allgemeines Verfahren.** Der Kubus (S. 9) der zweiteiligen Größe $a + b$ ist

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Dieser letztere Ausdruck enthält die Vorschrift, wie aus einer mehrteiligen Größe die dritte Wurzel ausgezogen werden kann.

Man findet nämlich das erste Glied der Wurzel, indem man die dritte Wurzel aus dem ersten Gliede a^3 der mehrteiligen Größe auszieht; sodann erhält man durch Subtraktion von a^3, d. h. der dritten Potenz der erhaltenen Wurzel, den Rest $3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Dividiert man daher mit $3a^2$, d. h. dem dreifachen Quadrat der gefundenen Wurzel a in das erste Glied $3a^2b$ des Restes, so erhält man das zweite Glied b der Wurzel. Nun zieht man das Produkt $3a^2b$ aus dem Divisor und dem Quotienten b, ferner das Produkt $3ab^2$ aus dem dreifachen ersten Teil der Wurzel und dem Quadrat des zweiten Teiles der Wurzel und endlich b^3, d. h. den Kubus des zweiten Teiles der Wurzel ab. Bleibt kein Rest, so ist die Wurzel genau; bleibt ein Rest, so kann in gleicher Weise ein weiterer Teil der Wurzel gefunden werden, indem man die beiden ersten Teile derselben als ein Glied betrachtet.

2. **Anwendung auf bestimmte Zahlen.** Die dritten Potenzen der Zahlen von 1 bis 9 werden mit 1, 2 oder 3 Ziffern geschrieben. Folglich hat jede ganze Zahl, die aus 1, 2 oder 3 Ziffern besteht, eine einzifferige Wurzel. Der Kubus von zweizifferigen Wurzeln enthält 4, 5 oder 6 Ziffern; also werden umgekehrt solche Zahlen auch zweizifferige Wurzeln haben. Die Kubikwurzel aus einer Zahl, welche mit 7, 8 oder 9 Ziffern geschrieben wird, hat 3 Ziffern u. s. w.

Für die Ausziehung der Kubikwurzel aus einer ganzen Zahl ergibt sich daher die Regel: Man teile die Ziffern des K u b u s von der Rechten zur Linken in Klassen von je 3 Ziffern (wobei die höchste Klasse links auch bloß aus 2 oder 1 Ziffer bestehen kann), so entspricht jeder Klasse eine Ziffer der Wurzel. Die ganze Zahl 21403276 zerfällt in die Klassen 21|403|276 und gibt deshalb eine dreizifferige Wurzel. Hat der Kubus Decimalstellen, so teilt man vom Komma aus nach rechts ab in Klassen von je 3 Ziffern. So ist die Zahl 0,0035437 einzuteilen wie folgt: 0|003|543|700| . . .

Nun suche man die größte Wurzel aus der höchsten Klasse; schreibe sie rechts vom Kubus; bilde ihre dritte Potenz und setze sie unter diese erste Klasse; ziehe sie davon ab; füge zum Rest die erste Ziffer der folgenden Klasse und betrachte diese Zahl als Dividend.

Man bilde das dreifache Quadrat der schon erhaltenen Wurzel und dividiere damit in den zuletzt erwähnten Dividend. Der Quotient ist die zweite Stelle der Wurzel. Hierauf multipliziere man diesen Quotienten mit dem Divisor; ziehe das Produkt vom Dividenden ab; nehme zum Rest die zweite Ziffer der zweiten Klasse; ziehe hiervon ab das dreifache Produkt aus der ersten Stelle der Wurzel und dem Quadrat der zweiten

Stelle; zum Rest füge die dritte Ziffer der zweiten Klasse hinzu und ziehe noch davon ab den Kubus der zweiten Stelle der Wurzel.

So fahre man mit jeder Klasse fort, indem man die zwei gefundenen Ziffern der Wurzel als eine Größe betrachtet. Geht die Wurzelausziehung bei den Einheiten nicht auf, so füge man je 3 Nullen als eine Klasse hinzu, bis eine genügende Anzahl von Decimalen in der Wurzel gefunden ist. Sind statt dieser Nullen Decimalstellen im Kubus vorhanden, so ist das Verfahren das nämliche.

$$\begin{array}{rl}
 & \qquad\qquad a\,b \\
\text{I.} & \sqrt[3]{175|616} = 56 \\
a^3 = & 125 \\
3a^2 = 75| & 506 \\
3a^2b = & 450 \\
 & 561 \\
3ab^2 = & 540 \\
 & 216 \\
b^3 = & 216 \\
 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & \qquad\qquad\qquad a\,b\,c\,d \\
\text{II.} & \sqrt[3]{2{,}056|47.\,|\,...} = 1{,}271\,.. \\
a^3 = & 1 \\
3a^2 = 3| & 10 \\
3a^2b = & 6 \\
 & 45 \\
3ab^2 = & 12 \\
 & 336 \\
b^3 = & 8 \\
3(a+b)^2 = 432| & 3284 \\
3(a+b)^2c = & 3024 \\
 & 2607 \\
3(a+b)c^2 = & 1764 \\
 & 8430 \\
b^3 = & 343 \\
3(a+b+c)^2 = 48387| & 80870 \text{ u. s. w.}
\end{array}$$

X. Gleichungen.

1. **Erklärung.** Kann der Wert einer Größe auf zweifache Weise ausgedrückt werden, so entsteht zwischen diesen Ausdrücken eine Gleichung. Diese Werte stehen rechts und links vom Gleichheitszeichen und heißen rechte und linke Seite der Gleichung.

Eine Gleichung genügt, um eine darin enthaltene Größe durch die andern berechnen zu können; zwei Gleichungen sind nötig zur Bestimmung von zwei Unbekannten. Die Unbekannte kann in der ersten, zweiten, dritten Potenz &c. oder sonstwie vorkommen. Kommt sie im ersten, zweiten Grad vor, so heißt die Gleichung vom ersten, zweiten Grad. Diejenigen Werte der Unbekannten, welche der Gleichung genügen, heißen *Wurzeln* der Gleichung.

Mit beiden Seiten einer Gleichung kann dieselbe Veränderung vorgenommen werden, ohne daß die Gleichung aufhört. So kann man auf beiden Seiten Gleiches addieren oder abziehen, mit Gleichem multiplizieren oder dividieren, beide Seiten auf die gleiche Potenz erheben, aus ihnen dieselbe Wurzel ausziehen. Hieraus folgt:

a) Gleiche Glieder, welche auf beiden Seiten vorkommen, heben sich auf und können sofort entfernt werden.

b) Gleichartige Glieder können behufs Vereinfachung je in eines zusammengezogen werden.

c) Man kann aus gleichem Grunde die Nenner entfernen durch Multiplikation aller Glieder mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Nenner.

d) Ein Glied kann von einer Seite auf die andere versetzt werden, indem man sein Vorzeichen ändert.

2. **Gleichungen vom ersten Grad mit einer Unbekannten.** Kommt die Unbekannte in einer Klammer vor, so schaffe man diese weg; ebenso die Nenner; bringe sodann alle Glieder mit der Unbekannten auf die eine, alle andern Glieder auf die andere Seite der Gleichung; addiere die Glieder mit der Unbekannten und dividiere die Summe der bekannten Glieder mit dem Koefficienten der Unbekannten, so erhält man diese.

Beisp. 1. Es sei x zu suchen aus . . $3x + 4 = 19$
daher durch Subtraktion von 4 . . . . . $3x = 15$
und durch Division mit dem Koefficienten 3 . $x = 5$

Beisp. 2. Es sei gegeben . . . . . $ax - b = c$
Man addiere b auf beiden Seiten, so wird . $ax = b + c$
und dividiere mit a, so folgt . . . . . . $x = \frac{b + c}{a}$

Beisp. 3. Es sei ferner . . . . . $\frac{ax}{b} = c - \frac{dx}{f}$
daher durch Multiplikation mit bf . . . . $afx = bcf - bdx$
durch Versetzung des Gliedes $- bdx$ . . $afx + bdx = bcf$
durch Absonderung von x . . . . $(af + bd)x = bcf$
und durch Division mit dem Koefficienten . $x = \frac{bcf}{af + bd}$

Beisp. 4. Zu suchen x aus . . . . $\sqrt{x + 2} = 3$
durch Quadrierung beider Seiten . . . . . $x + 2 = 9$
folglich durch Subtraktion von 2 . . . . . $x = 7$

3. **Gleichungen vom ersten Grad mit zwei Unbekannten.** Den beiden Gleichungen mit zwei Unbekannten x, y gebe man die Form

$$ax + by = c; \quad dx + fy = g$$

Setzt man nun die Werte von y aus beiden Gleichungen einander gleich, so erhält man eine Gleichung mit der Unbekannten x. Daher ist die Aufgabe zurückgeführt auf die Auflösung einer Gleichung mit einer Unbekannten.

4. **Gleichungen vom zweiten Grad mit einer Unbekannten.** Diese Gleichungen enthalten im allgemeinen drei Arten von Gliedern: solche mit der zweiten Potenz der Unbekannten, solche mit der ersten Potenz dieser Größe und solche ohne die Unbekannte. Zieht man die gleichartigen Glieder zusammen und bringt sie auf eine Seite des Gleichheitszeichens, so erhält die Gleichung die Form $Ax^2 + Bx + C = 0$ oder indem man mit A dividiert

$$x^2 + px + q = 0$$

Die beiden Wurzeln dieser Gleichung sind dargestellt durch

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Beisp. Es sei $x^2 - 5x + 6 = 0$, so wird, da $p = -5$ und $q = 6$:

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Daher sind die beiden Wurzeln $x = 3$ und $x = 2$. Setzt man in der That 3 oder 2 für x in die gegebene Gleichung, so wird die Summe der Glieder links $= 0$.

Specielle Fälle. Wenn $p = 0$, so entsteht die reine quadratische Gleichung $x^2 + q = 0$, deren Wurzeln $x = \pm\sqrt{-q}$ sind.

Wenn $q = 0$, so wird die eine Wurzel $x = 0$, die andere $x = -p$.

Die Größe $\frac{p^2}{4} - q$ kann negativ, Null oder positiv sein. Im ersten Fall werden beide Wurzeln imaginär; im zweiten reduzieren sie sich auf denselben Wert $-\frac{p}{2}$; im dritten werden beide reell und ungleich.

5. **Auflösung numerischer Gleichungen durch Näherung.** Man setze für die Unbekannte eine bestimmte Zahl in die Gleichung. Nehmen dann beide Seiten der Gleichung gleiche Werte an, so ist jene Zahl eine Wurzel der Gleichung; nehmen sie ungleiche Werte an, so aber, daß ihre Differenz sehr klein wird, so liegt jene bestimmte Zahl einem Wurzelwert nahe und heißt dann Näherungswert.

Im letzteren Fall wiederhole man den Versuch mit einem zweiten Näherungswert. Weichen hierfür die beiden Seiten der Gleichung mehr von einander ab, so ist der zweite Näherungswert fehlerhafter gewählt als der erste; weichen sie weniger von einander ab, so liegt der zweite der Wurzel näher als der erste.

Wenn der eine Näherungswert die linke Seite größer, der andere kleiner als die rechte Seite macht, so liegt die Wurzel zwischen beiden Näherungswerten als Grenzen, so daß nun ein oder zwei Versuche genügen, um einen hinlänglich genauen Wert für die Wurzel zu erhalten.

Es seien a und b zwei solche Werte, welche der Wurzel sehr nahe liegen, so werden $x - a$ und $x - b$ ihre Fehler sein. Ferner seien für die Werte a und b die Differenzen der rechten und linken Seite der Gleichung $= A$ und $= B$, so erhält man zur näherungsweisen Bestimmung der Wurzel nach der Regula falsi die Proportion

$$\frac{x-a}{x-b} = \frac{A}{B}.$$

Beisp. Im Traité de la chaleur von Péclet kommt in Nr. 407 folgende Gleichung vor:

$$D^5 = \frac{0{,}27\,(13\,D + 2)}{441{,}45}.$$

Um die Unbekannte D zu bestimmen, verfahre man wie folgt:

Für $a = 0{,}3$ wird $A = \frac{0{,}27\,(13\,.\,0{,}3 + 2)}{441{,}45} - 0{,}3^5 = +\,0{,}00118$,

für $b = 0{,}4$ „ $B = \frac{0{,}27\,(13\,.\,0{,}4 + 2)}{441{,}45} - 0{,}4^5 = -\,0{,}00584$.

Da nun A positiv, B negativ ist, so liegt eine Wurzel zwischen 0,3 und 0,4, und da A nahe 5mal kleiner ist als B, so wird auch die Abweichung der Wurzel von 0,3 annähernd 5mal kleiner sein als die von 0,4. Obige Proportion gibt

$$\frac{x - 0{,}3}{x - 0{,}4} = \frac{0{,}00118}{-\,0{,}00584};\ \text{daher}\ x = 0{,}317.$$

XI. Gemeine Logarithmen.

1. **Erklärung von Logarithmus.** Man nehme 10 zur Basis verschiedener Potenzen, so erhält man

$10^4 = 10000$	$10^1 = 10$	$10^{-3} = 0{,}01$
$10^3 = 1000$	$10^0 = 1$	$10^{-2} = 0{,}001$
$10^2 = 100$	$10^{-1} = 0{,}1$	$10^{-4} = 0{,}0001$, u. s. w.

Die Exponenten dieser Potenzen nennt man die Logarithmen der Potenzen für die Grundzahl 10 und zwar *gemeine* oder auch *Brigg'sche* Logarithmen. Man schreibt

$\log 10000 = 4$	$\log 10 = 1$	$\log 0{,}01 = -2$
$\log 1000 = 3$	$\log 1 = 0$	$\log 0{,}001 = -3$
$\log 100 = 2$	$\log 0{,}1 = -1$	$\log 0{,}0001 = -4$, u.s.w.

Man ersieht aus dieser Zusammenstellung, daß Zahlen, welche über 1 liegen, positive und Zahlen, welche unter 1 liegen, negative Logarithmen haben; ferner, daß der Logarithmus einer Zahl, welche zwischen 100 und 1000 liegt, größer als zwei und kleiner als 3 sein muß, daß z. B. der Logarithmus von 5743 zwischen 3 und 4 liegt, also aus Ganzen und einem echten Bruche (in Form eines Decimalbruches) besteht. Die ganze Zahl nennt man *Charakteristik*, den Bruch *Mantisse*. Man erkennt hieraus, daß in den Tabellen, welche die Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 an aufwärts enthalten, nur je die Mantisse anzugeben ist.

2. **Gesetze über Produkte, Quotienten, Potenzen und Wurzeln.** Es sei $10^x = A$, $10^y = B$; folglich $10^{x+y} = AB$; also auch $x = \log A$, $y = \log B$ und $x + y = \log AB$.

Addiert man die 4te und 5te dieser Gleichungen, so folgt für $x + y$:

$$\log AB = \log A + \log B$$

Mithin ist der Logarithmus eines *Produktes* gleich der Summe aus den Logarithmen der Faktoren.

Beisp. $\text{Log}\ 5000 = \log 1000 \,.\, 5 = \log 1000 + \log 5 = 3 + \log 5.$

In ähnlicher Weise findet man für $x - y$ durch Division und Subtraktion

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$$

d. h. es ist der Logarithmus eines Bruches gleich dem Logarithmus des Zählers, weniger dem Logarithmus des Nenners.

Beisp. Es ist $\log 0{,}00753 = \log \frac{753}{100000} = \log 753 - 5.$

Da nun aber log 753 zur Charakteristik 2, und laut Tab. zur Mantisse 0,8768 hat, so wird

$$\log 0{,}00753 = 2{,}8768 - 5 = 0{,}8768 - 3.$$

In dieser Form wird der Logarithmus eines Decimalbruches in der That ausgedrückt. Man erkennt zugleich aus der Charakteristik -3, daß die höchste Ziffer der Zahl oder des *Numerus* in die 3te Decimalstelle kommt.

Wenn man $10^x = A$ auf beiden Seiten auf die nte Potenz erhebt, so wird $10^{nx} = A^n$, also $nx = \log A^n$. Wenn man aber $x = \log A$ mit n multipliziert, so wird $nx = n \log A$; daher

$$\log A^n = n \log A.$$

Mithin findet man den Logarithmus einer Potenz, wenn man den Logarithmus der Grundzahl mit dem Exponenten multipliziert.

Die letzte Gleichung gilt noch, wenn n ein Bruch ist; daher

$$\log \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log A.$$

d. h. man findet den Logarithmus einer Wurzel, wenn man den Logarithmus der Größe unter dem Wurzelzeichen durch den Wurzelexponenten dividiert.

Es ist $64 = 2^6$; folglich $\log 64 = 6 \log 2$.

Ferner $\log \sqrt{12} = \frac{1}{2} \log 12 = \frac{1}{2} \log 4 \,.\, 3 = \log 2 + \frac{1}{2} \log 3.$

3. **Gebrauch der Logarithmentafel.** Die am Ende des Buches folgende Tafel, von Teichmann und Groß (Stuttgart 1875) zusammengestellt, enthält nur die Logarithmen der ganzen Zahlen (n) von 1 bis 999, genügt aber für die gewöhnlichen Zwecke der Mechanik.

a) Aufschlagen der Logarithmen.

Beisp. 1. Es ist $\log 24 = 1{,}3802$. Folglich: $\log 240 = 2{,}3802$; $\log 2{,}4 = 0{,}3802$; $\log 0{,}024 = 0{,}3802 - 2$, u. s. w.

Beisp. 2. Es soll der Log. von 2437 aufgesucht werden. Nun liegt 2437 zwischen 2430 und 2440 und zwar um 7 über der erstern Zahl. Für 243 und 244 stehen aber die Mantissen in den Tafeln, nämlich 0,3856 und 0,3874; daher

	log 2440	=	3,3874
	log 2430	=	3,3856
Der Differenz	10	entspricht	0,0018
" "	1	"	0,00018
" "	7	"	0,00126

In der Tabelle ist für die Differenz 1 im Numerus eine Differenz 0,00017 angegeben; also wird für 7 die Mantissen-Differenz 0,00119 oder abgerundet 0,0012. Daher $\log 2437 = 3{,}3856 + 0{,}0012 = 3{,}3868$.

b) Aufschlagen des Numerus.

Beisp. Es sei $\log A = 0{,}1783$. Wie groß ist der Numerus A? Da die Charakteristik $= 0$, so wird die höchste Ziffer von A die Stelle der Einheiten einnehmen.

Nun liegt die Mantisse 1783 zwischen den Tabellen-Mantissen 1761 und 1790; also der Numerus zwischen 1,50 und 1,51, jedoch näher bei 1,51, da die gegebene Mantisse von 1790 nur um 7, von 1761 aber um 22, also um das 3fache von 7 abweicht. Man kann daher den Numerus zu 1,507 annehmen.

In der That ist die Differenz der Tabellen-Mantissen 29. Dieser entspricht eine Ergänzung des Numerus von 1,51 und $1{,}50 = 0{,}010$; also entspricht der Differenz 7 eine Ergänzung $0{,}010 \,.\, \frac{7}{29} = 0{,}003$.

Daher $n = 1{,}510 - 0{,}003 = 1{,}507.$

c) Berechnung mittelst Logarithmen.

Beisp. Es sei die Kubikwurzel aus 0,0473 auszuziehen. Der Ansatz ist daher $x = \sqrt[3]{0,0473}$;

daher $\log x = \frac{1}{3} \log 0,0473 = \frac{1}{3} (2,6749 - 4)$.

Um nun die Charakteristik in der Klammer mit 3 ohne Rest dividieren zu können, mache man Minuend und Subtrahend um 1 kleiner,

so wird $\log x = \frac{1}{3} (1,6749 - 3) = 0,5583 - 1$.

Allein den Mantissen 0,5575 und 0,5587 entsprechen die Zahlen 0,361 und 0,362; der Numerus x liegt also zwischen diesen zwei Zahlen. Die Differenz der Tabellen-Mantissen ist 12, während die gegebene Mantisse von diesen abweicht um 8 und 4. Also wird der Numerus näher bei 0,362 als bei 0,361 liegen, also annähernd sein 0,3616.

XII. Natürliche Logarithmen.

Man gelangt in der Differenzialrechnung auf folgende unendliche Reihe: $e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \ldots$ deren Wert $e = 2,7182818\ldots$ ist. Um gewisse Vereinfachungen zu erzielen, nahm Neper diesen Wert e als Basis eines Logarithmensystems an, weshalb diese Logarithmen Neper'sche, auch hyperbolische oder natürliche genannt werden. Man schreibt abgekürzt logn.

Da logn 10 = 2,302585 . ., während log br. 10 = 1, so findet man den natürlichen Logarithmus einer Zahl, wenn man den gemeinen Logarithmus dieser Zahl mit 2,302 . . multipliziert. Es gelten hier die gleichen Sätze über Produkte, Quotienten ꝛc. wie bei den gemeinen Logarithmen.

Am Ende des Buches sind Tafeln über natürliche Logarithmen beigefügt.

2. Planimetrie.

I. Vorbegriffe.

1. **Linie und Fläche.** Bewegt sich ein Punkt, so beschreibt er eine Linie, die gerade oder krumm sein kann. Bewegt sich eine Linie, so beschreibt sie eine Fläche, die eben oder krumm sein kann. Die ebene Fläche heißt kurzweg Ebene. Durch drei Punkte, die nicht in einer Ebene liegen, kann die Lage einer Ebene festgestellt werden.

2. **Parallele Linien.** Bewegt sich eine gerade Linie quer zu ihrer Richtung, jedoch ohne ihre Richtung zu ändern, so sind die aufeinander folgenden Lagen der Geraden parallel. Durch zwei parallele Linien kann immer eine Ebene gelegt werden, aber nur eine.

3. **Winkel.** Dreht sich eine Gerade um einen festen Punkt in einer Ebene, so ändert sich ihre Richtung. Die Abweichung der einen Richtung von der andern heißt Winkel, ihr Schnittpunkt Scheitel; die

beiden Richtungen sind die Schenkel des Winkels. Man teilt den Winkel, der durch eine volle Umdrehung entsteht, in 4 *rechte Winkel* ein, einen rechten in 90° (Grade), 1° in 60′ (Minuten) und 1′ in 60″ (Sekunden).

Beim rechten Winkel steht der eine Schenkel *senkrecht* oder *winkelrecht* zum andern. Winkel, welche verschieden sind von 90°, heißen schief; solche, die größer sind als 90°, stumpf; solche, die kleiner sind, spitz.

4. **Vertikal und horizontal.** Eine Gerade, deren Richtung durch den Mittelpunkt der Erde geht, heißt *vertikal* oder *lothrecht*; eine auf dieser senkrecht stehende Gerade *horizontal* oder *waagrecht*. Ebenso wird eine Ebene vertikal, wenn sie durch den Mittelpunkt der Erde geht, und horizontal, wenn sie auf einer vertikalen Geraden senkrecht steht.

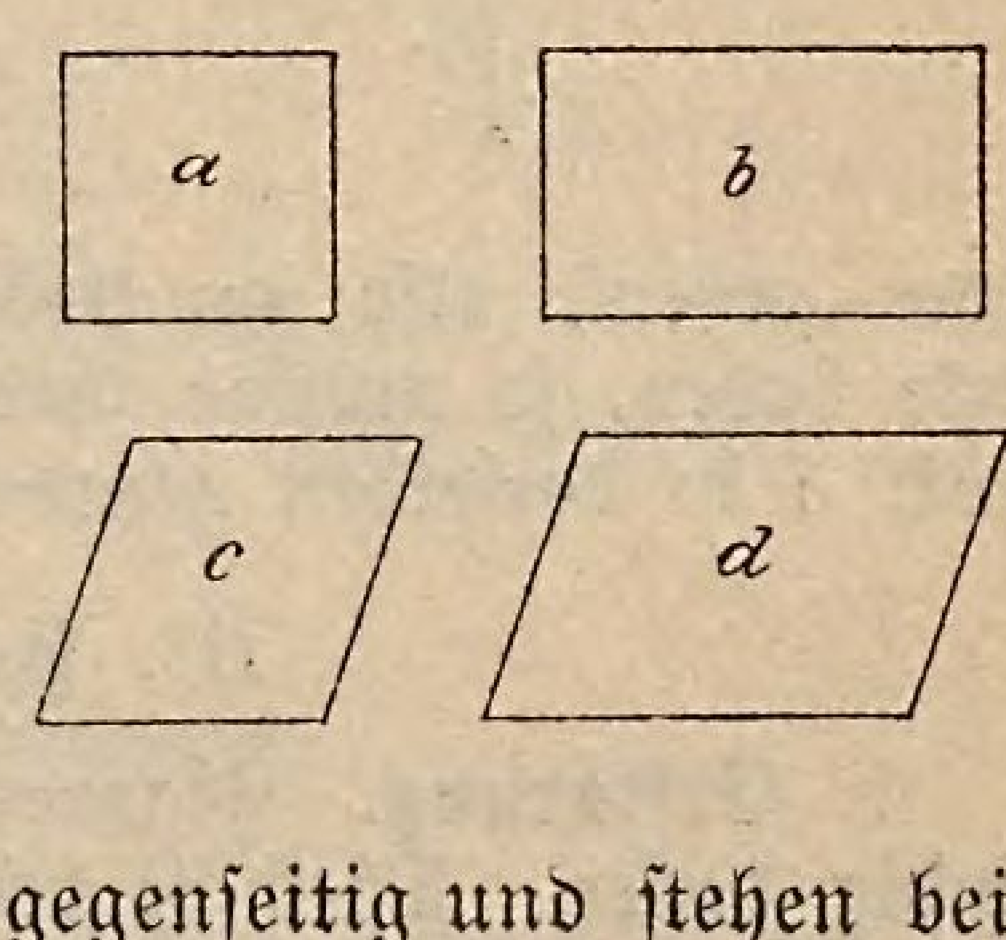
5. **Abstand.** Die Senkrechte von einem Punkt aus auf eine Gerade heißt Abstand des Punktes von der Geraden. Er ist kürzer, als jede andere gerade Linie, die vom Punkte aus nach der Geraden gezogen werden kann. Parallele Linien haben überall gleichen Abstand. Dieser ist eine Gerade, welche auf beiden Parallelen zugleich senkrecht steht.

II. Geschlossene Figuren.

1. **Dreieck.** Man unterscheidet mit Rücksicht auf die Seiten: gleichseitige Dreiecke mit 3 gleichen Seiten, gleichschenklige mit 2 gleichen Seiten und ungleichseitige Dreiecke; ferner mit Rücksicht auf die Winkel: Dreiecke mit 3 gleichen, mit 2 gleichen und mit ungleichen Winkeln. — Gleichen Winkeln liegen gleiche Seiten, dem größern Winkel die größere Seite gegenüber. — Die drei Winkel eines Dreiecks machen 180° aus. Wenn der eine Winkel ein rechter ist, so bleibt für die andern noch 90° übrig. Ein solches Dreieck heißt rechtwinklig.

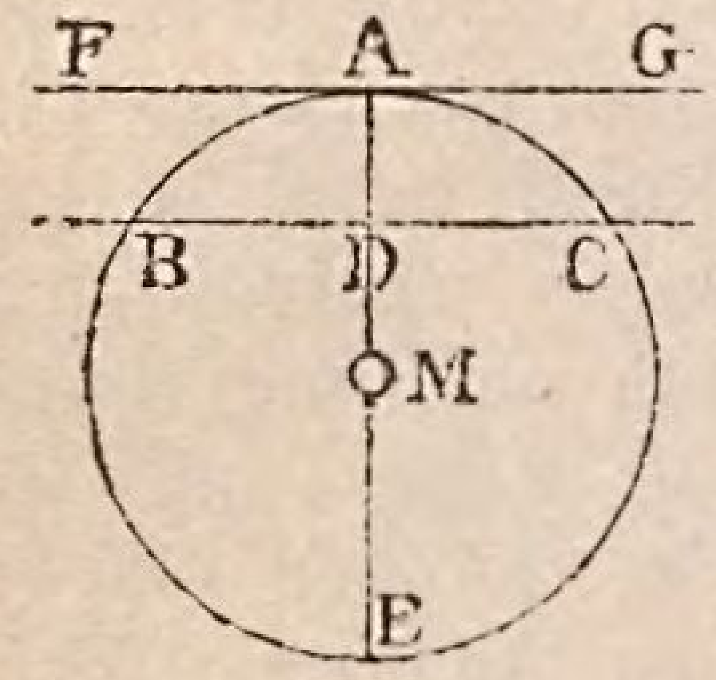
2. **Viereck.** Man unterscheidet je nach der Lage der Seiten: *Parallelogramm* mit je zwei Paar parallelen Seiten, *Trapez* mit nur ein Paar Parallelen und *Trapezoid* ohne parallele Seiten. Die Gerade, welche zwei Eckpunkte verbindet, ohne daß sie mit einer Seite zusammenfällt, heißt *Diagonale*.

Die Parallelogramme zerfallen in gleichseitige und ungleichseitige, rechtwinklige und schiefwinklige. Das *Quadrat* (a) ist rechtwinklig und gleichseitig, das *Rechteck* (b) rechtwinklig und ungleichseitig, der *Rhombus* (c) schiefwinklig und gleichseitig und das *Rhomboid* (d) schiefwinklig und ungleichseitig. — In Parallelogrammen sind die einander gegenüber liegenden Seiten und Winkel gleich, ihre Diagonalen halbieren sich gegenseitig und stehen beim Quadrat und Rhombus senkrecht aufeinander.



3. **Vieleck (Polygon).** Dasselbe wird von mehr als vier Seiten eingeschlossen. *Regelmäßig* heißt es, wenn es gleiche Seiten und ebenso gleiche Winkel hat. Alsdann liegt in seinem Innern ein Punkt, der von jeder Ecke gleichen Abstand hat und daher *Mittelpunkt* heißt.

4. **Kreis.** Er ist ein regelmäßiges Vieleck mit unendlich kleinen Seiten. Dreht sich eine Gerade um einen festen Punkt (Mittelpunkt) in einer Ebene, so beschreibt jeder Punkt der Geraden bei einer teilweisen Drehung einen Kreisbogen und jedes Stück der Geraden, das bis zum Mittelpunkt reicht, einen Kreissektor, jedes andere Stück aber einen Ringsektor. Wird die Drehung eine vollständige, so entsteht aus dem Bogen eine Kreislinie, aus dem Kreissektor eine Kreisfläche und aus dem Ringsektor ein Kreisring.

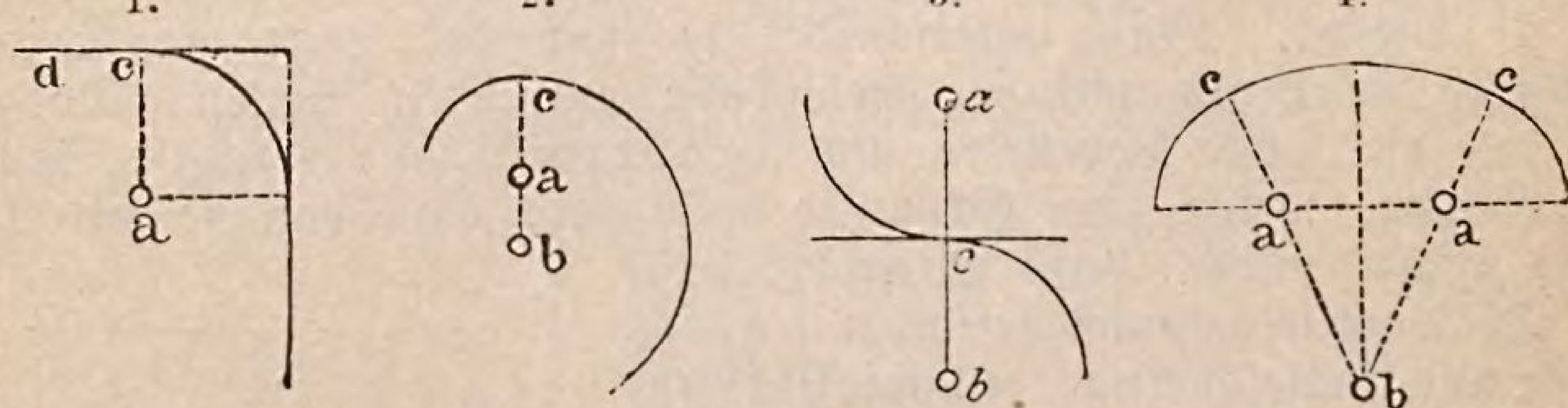


Jede Gerade MA vom Mittelpunkt nach einem Punkt des Umfanges (Peripherie) heißt Halbmesser oder Radius; jede Gerade EA durch den Mittelpunkt, welche zwei Kreispunkte verbindet, Durchmesser; jede Gerade BC, welche die Kreislinie in zwei Punkten schneidet, Sekante; das Stück der Sekante im Innern des Kreises Sehne; eine Gerade FAG, welche bei beliebiger Ausdehnung nur durch einen Punkt des Kreises geht, Tangente und jener Punkt Berührungspunkt.

Der Radius MA, welcher nach dem Berührungspunkt der Tangente FG führt, steht auf dieser senkrecht; liegt die Sehne BC parallel zur Tangente FG, so steht der Radius MA auch auf dieser Sehne senkrecht und halbiert sie.

5. **Krumme Linien aus Kreisbogen.** Soll ein Kreisbogen, Fig. 1, stetig in eine Gerade cd übergehen, so muß diese Gerade Tangente sein an dem Kreisbogen, also auf dem Halbmesser ac, welcher nach dem Berührungspunkt c führt, senkrecht stehen. — Sind zwei Kreisbogen, Fig. 2, 3 und 4, in einem Punkte c zusammenzuleiten, daß sie stetig in einander gehen, also im Uebergangspunkt c eine gemeinschaftliche Tangente haben, so müssen ihre Mittelpunkte a und b und der Uebergangspunkt c in derselben geraden Linie liegen.

1. 2. 3. 4.



III. Kongruenz der Figuren.

1. **Erklärung.** Figuren nennt man kongruent, wenn sie sich vollständig decken. Dies ist der Fall, wenn ihre Seiten und Winkel gleich sind und in gleicher Ordnung auf einander folgen.

2. **Dreiecke.** Ein Dreieck kann konstruiert werden, wenn die gegenseitige Lage seiner drei Eckpunkte bestimmt ist. Sind die Ecken zweier Dreiecke auf gleiche Weise bestimmt, so sind die Dreiecke kongruent. Die Eckpunkte sind aber bestimmt: durch eine Seite und die beiden an

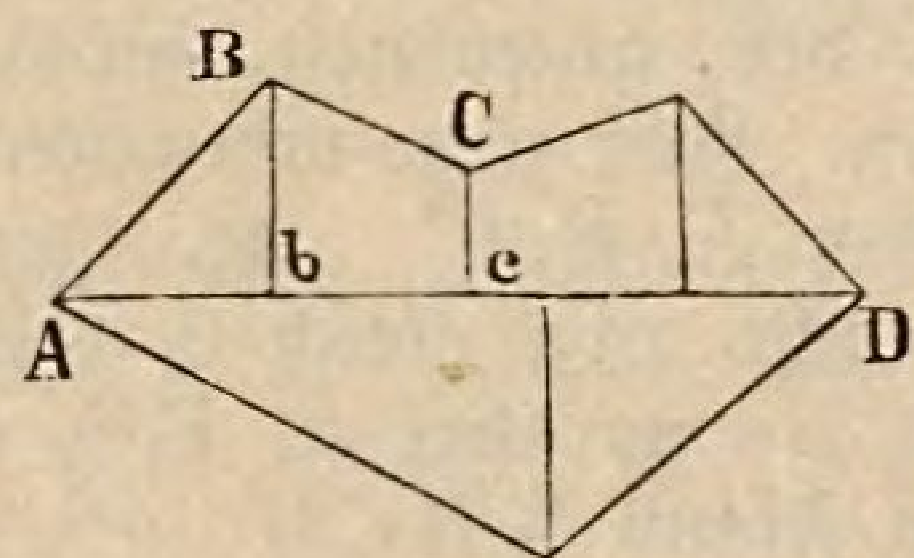
ihr liegenden Winkel, durch zwei Seiten und den zwischen ihr liegenden Winkel und durch die drei Seiten.

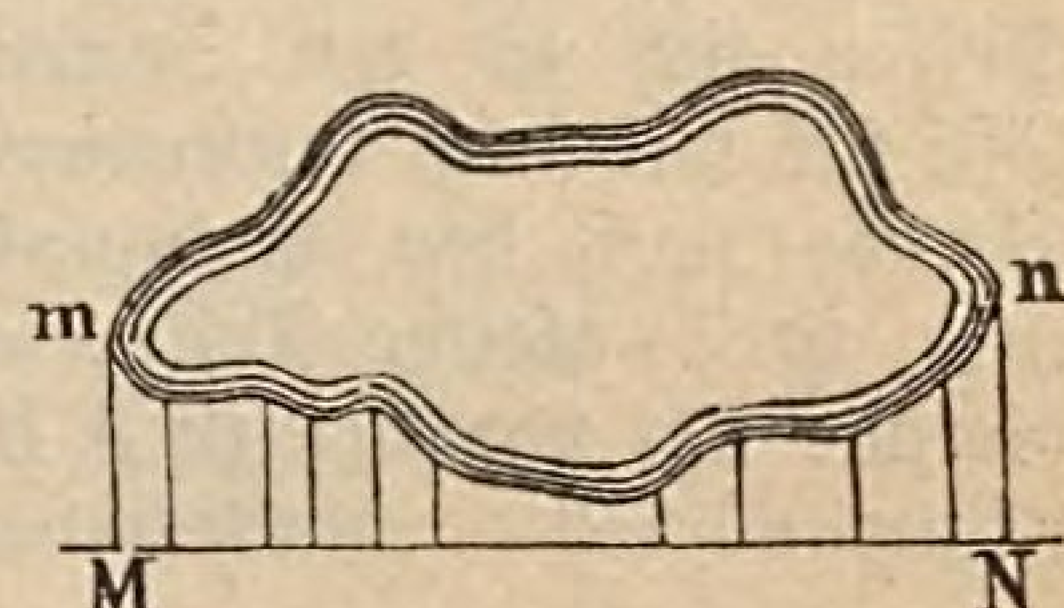
3. **Vierecke und Vielecke** sind kongruent, wenn sie sich in gleich viele kongruente Dreiecke von gleicher Aufeinanderfolge zerlegen lassen.

4. **Verzeichnen kongruenter Figuren.** Die Methoden sind:

a) Dreiecksmethode. Man zerlege die gegebene Figur in irgend einer Weise in Dreiecke, zeichne diese mit je drei gleichen Seiten in gleicher Anordnung ab, so wird die entstehende Figur kongruent der gegebenen.

b) Koordinatenmethode. Es sei die Figur ABCD abzuzeichnen. Man ziehe eine Richtlinie AD, fälle von den Eckpunkten der Figur die Geraden Bb, Cc, . . . senkrecht auf diese Richtlinie und trage nun die entstandenen Teile, teils Dreiecke wie ABb, teils Trapeze wie BCcb, kongruent und in gleicher Ordnung ab, so wird die erhaltene Figur der

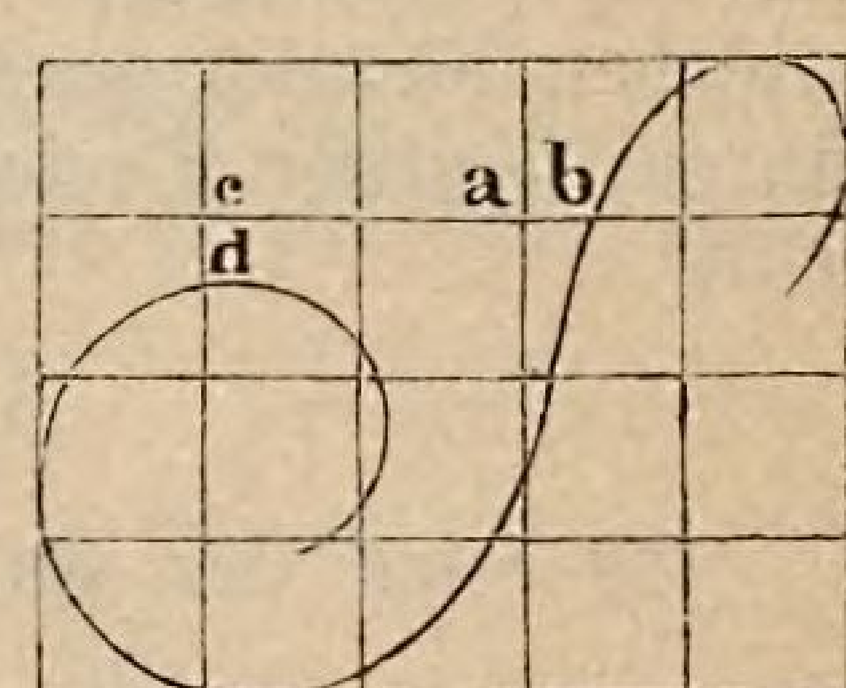




gegebenen kongruent sein. — Die Richtlinie AD heißt auch Abscissenachse, die Abschnitte Ab, Ac, . . auf derselben Abscissen und die darauf Senkrechten Bb, Cc, . . Ordinaten. Abscisse Ab und Ordinate Bb bestimmen die Lage des Punktes B, ebenso Abscisse Ac und Ordinate Cc die Lage des Punktes C. Eine Abscisse mit der entsprechenden Ordinate heißen Koordinaten eines Punktes der Figur.

Dieses Verfahren kann zum Abzeichnen irgend einer Figur mn benutzt werden. Man wählt eine Abscissenachse MN, fällt von Punkten der Figur Senkrechte auf dieselbe und verfährt wie angegeben.

c) Netzmethode. Man legt über die abzuzeichnende Figur ein Netz zweier Systeme von parallelen Linien, kopiert das Netz genau, trägt Abstände wie ab, cd auf, um die Punkte b, d, . . der Figur zu übertragen, und verbindet hierauf die gleichliegenden Punkte. Hierbei ist es gleichgültig, ob die Parallelen beider Systeme senkrecht oder schief zu einander sind; ob sie gleichen oder verschiedenen Abstand haben.

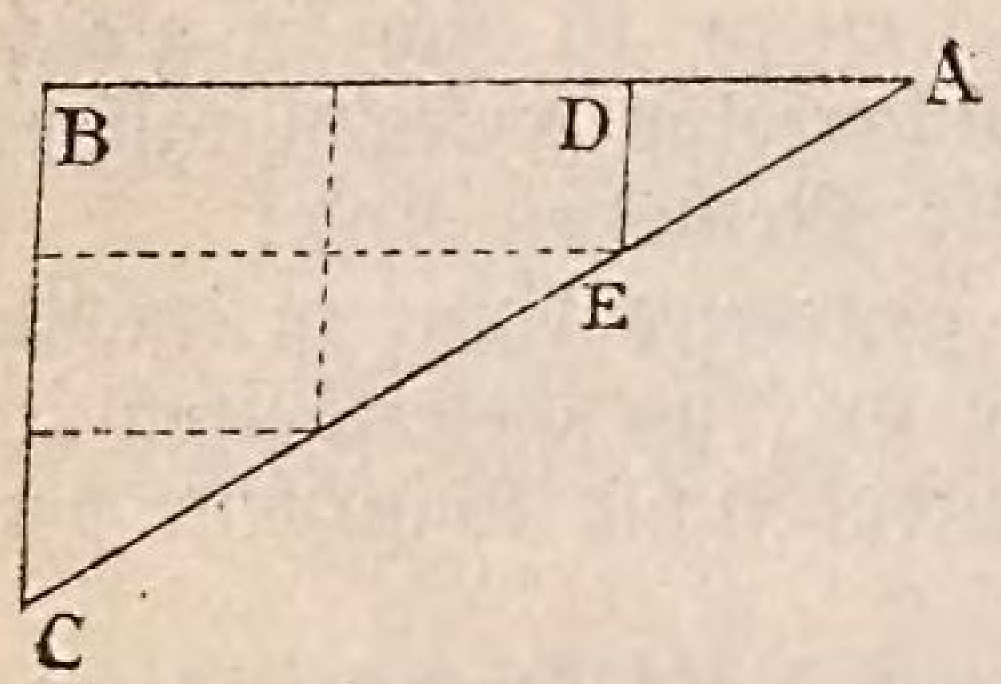


IV. Aehnlichkeit der Figuren.

1. **Erklärung.** Haben zwei Figuren Winkel, wovon je zwei und zwei einander gleich sind und in gleicher Ordnung auf einander folgen, und sind zudem die gleichliegenden Seiten unter einander proportional so heißen die Figuren ähnlich.

2. **Dreiecke.** Bei zwei Dreiecken genügt zur Aehnlichkeit: Gleichheit aller drei Winkel, Gleichheit eines Winkels und Proportionalität,

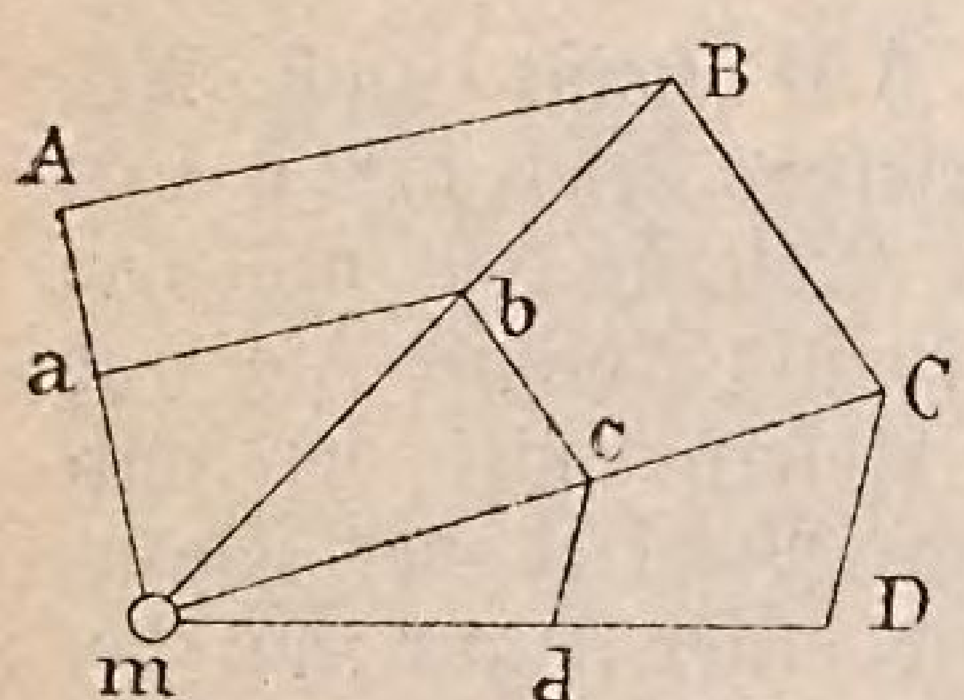
der ihn einschließenden Seiten, Proportionalität aller drei Seiten beider Dreiecke.

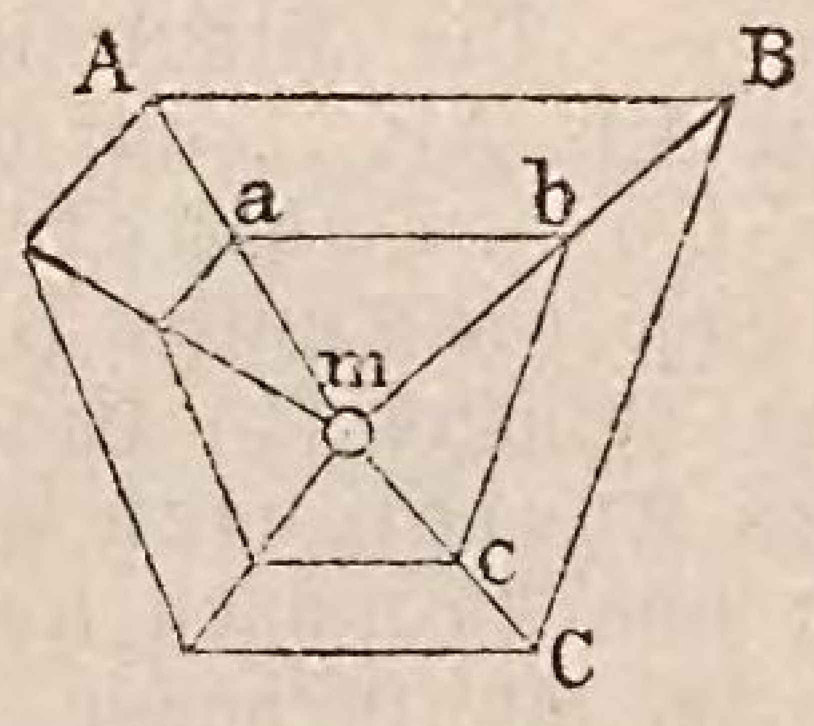


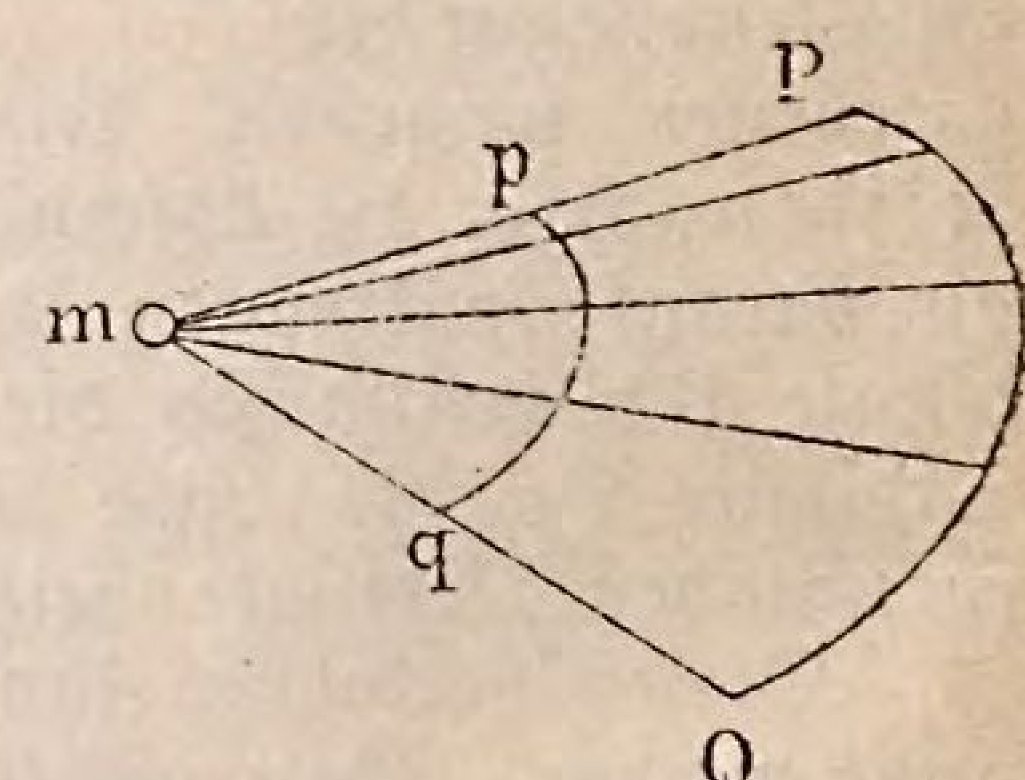
Es sei z. B. die Gerade DE parallel zur Seite BC des Dreiecks ABC, so sind die Winkel der Dreiecke ADE und ABC einander gleich. Ist ferner BC = 3DE, so ist auch BA = 3DA und CA = 3EA, d. h. die Seiten des einen Dreiecks sind ein Gleichvielfaches der Seiten des andern Dreiecks, also unter einander proportional.

3. **Vielecke.** Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn sie sich in ähnliche Dreiecke von gleicher Anordnung zerlegen lassen.

Ein Vieleck, das einem gegebenen ABCD . . ähnlich ist und dessen Seiten sich zu den Seiten des. gegebenen verhalten z. B. wie 3 : 5, läßt sich wie folgt konstruieren. Man ziehe von einem beliebigen Punkt m Gerade nach den Endpunkten A, B, C . . der gegebenen Figur, teile mA in 5 gleiche Teile, mache ma gleich 3 solcher Teile, ziehe die Gerade ab parallel zu AB, bc parallel zu BC, u. s. w., so wird die Figur abcd . . ähnlich der Figur ABCD . .



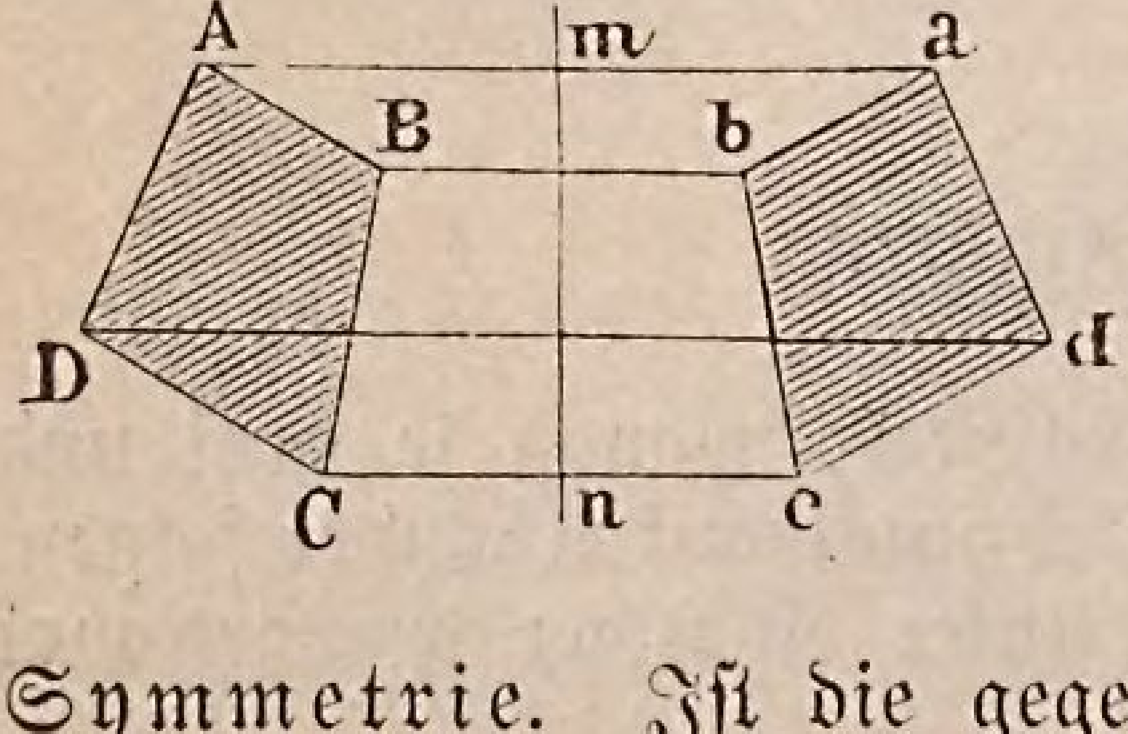




Dieses Verfahren läßt sich auch auf die Konstruktion einer krummen Linie PQ übertragen, die einer gegebenen Kurve pq ähnlich ist. Es entstehen nämlich durch die Strahlen, welche von m nach den Kurven führen, ähnliche Dreiecke, sobald man sich die Bogenstücke klein genug denkt.

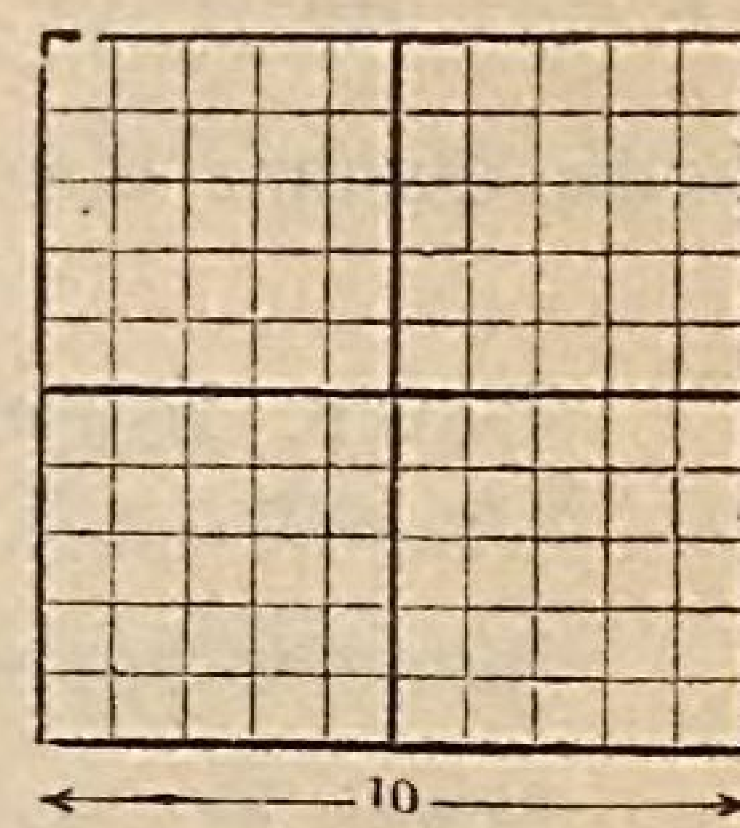
V. Symmetrie der Figuren.

Es seien der Punkt A und die Gerade mn gegeben. Man fälle die Gerade Ama senkrecht auf mn und mache den Abstand am = Am, so liegen die Punkte A und a symmetrisch zur Geraden mn. Wenn die Geraden Bb, Cc, . . senkrecht auf mn stehen und von dieser halbiert werden, so liegen die Figuren ABCD und abcd symmetrisch zu mn. Hierbei heißt die Gerade mn Achse der Symmetrie. Ist die gegebene Figur ABCD krummlinig, so sind so viele Gerade Aa, Bb, . . senkrecht auf die Achse zu ziehen, als zur Verzeichnung des krummen Zuges nötig ist.



VI. Inhalt der Figuren.

1. **Flächenmaßstab.** Als Flächeneinheit, womit andere Flächen gemessen werden, dient das Quadrat. Ist die Seite eines Quadrates 1 Meter lang, so heißt es Quadratmeter. Ebenso sind die Benennungen Quadratdecimeter, Quadratfuß, Quadratklafter 2c. zu verstehen.



Aus der Figur kann ersehen werden, daß 1 Q.-Meter 10 . 10 = 100 Q.-Decimeter, oder ebenso, daß 1 Q.-Fuß nach 10teiligem Maße 10 . 10 = 100 Q.-Zolle, 1 Q.-Zoll 10 . 10 = 100 Q.-Linien hat. Nach dem 12teiligen Maß enthält 1 Q.-Fuß 12 . 12 = 144 Q.-Zolle, 1 Q.-Zoll = 144 Q.-Linien, u. s. w. Die Bezeichnung ist:

1 qm = 100 qdm = 10000 qcm = 100 000 qmm
1 qmm = 0,01 qcm = 0,0001 qdm = 0,000 001 qm
1 q′ = 100 q″ = 10000 q‴
1 q‴ = 0,01 q″ = 0,0001 q′

Jede nächstfolgende Flächeneinheit ist daher 100mal kleiner als die vorhergehende. Die Zahl 0,31457 qm enthält hiernach: 31 qdm, 45 qcm und 70 qmm, ebenso die Zahl 3,0475 q′ nach dem 10teiligen Maße: 3 q′, 4 q″ und 75 q‴. Man schreitet daher beim Ablesen vom Komma aus nach rechts je um 2 Stellen vor, um die Einheiten der nächsten Unterabteilung zu erhalten. Ebenso ist jede nächst größere Einheit 100mal größer, als die vorangegangene. Daher ist z. B.

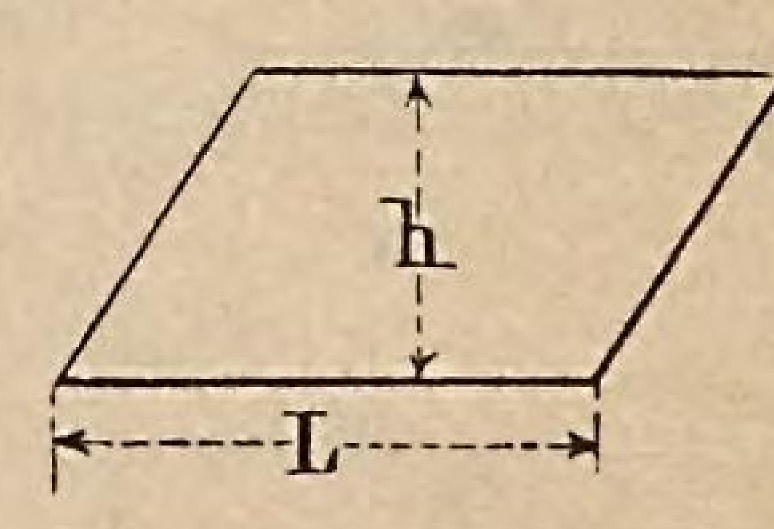
1573647 qmm = 1 qm 57 qdm 46 qcm 47 qmm

2. **Quadrat.** Seine Fläche wird gefunden, wenn man dessen Seitenlänge mit sich selbst multipliziert; die Seite dagegen, wenn man aus der Fläche die Quadratwurzel auszieht.

Es sei die Seite = 2,5 m, so ist die Fläche = 2,5 . 2,5 = 6,25 qm.

Wenn die Fläche = 12,96 qm, so ist die Seite = $\sqrt{12,96}$ = 3,6 m.

3. **Parallelogramm.** Sein Flächeninhalt wird gefunden, wenn seine Grundlinie L mit der darauf senkrecht stehenden Höhe h multipliziert wird.



Länge und Höhe werden Dimensionen genannt. Man findet eine der Dimensionen, wenn man die Fläche durch die andere dividiert.

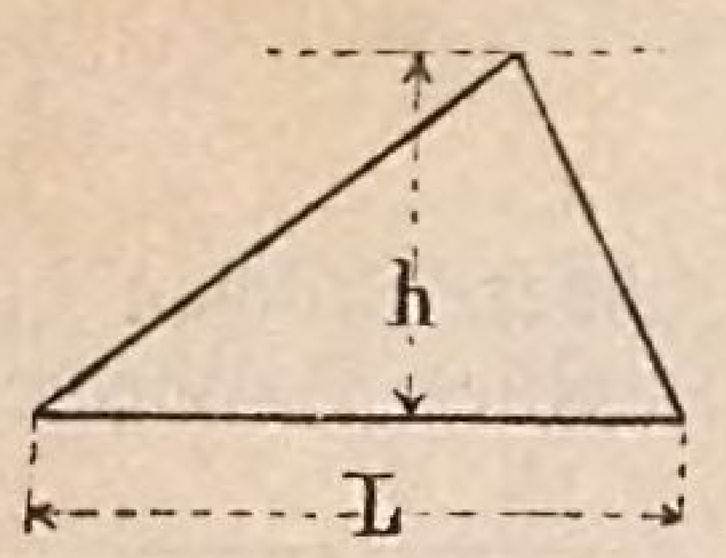
Beisp. 1. Wenn die Länge eines rechtwinkligen Zimmerbodens 8,4 m und seine Breite 5,6 m, so ist

Fläche des Bodens 8,4 . 5,6 = 47,04 qm.

Beisp. 2. Eine rechtwinklige Oeffnung soll 42 qcm Fläche und 12 cm Länge haben; wie groß ist die Breite?

Gesuchte Breite 42 : 12 = 3,5 cm.

4. **Dreieck.** Die Fläche desselben wird gefunden, wenn man die Grundlinie L mit der darauf senkrechten Höhe h multipliziert und mit



2 dividiert. Eine, dieser Dimensionen wird gefunden, wenn man die doppelte Fläche mit der andern Dimension dividiert.

Beisp. Wenn $L = 1{,}6$ m, $h = 0{,}7$ m, so ist Dreiecksfläche . . . $= \frac{1{,}6 \cdot 0{,}7}{2} = 0{,}56$ qm.

Sind a, b, c die Seiten eines Dreiecks, s die halbe Summe dieser Seiten und F die Fläche des Dreiecks, so ist

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.$$

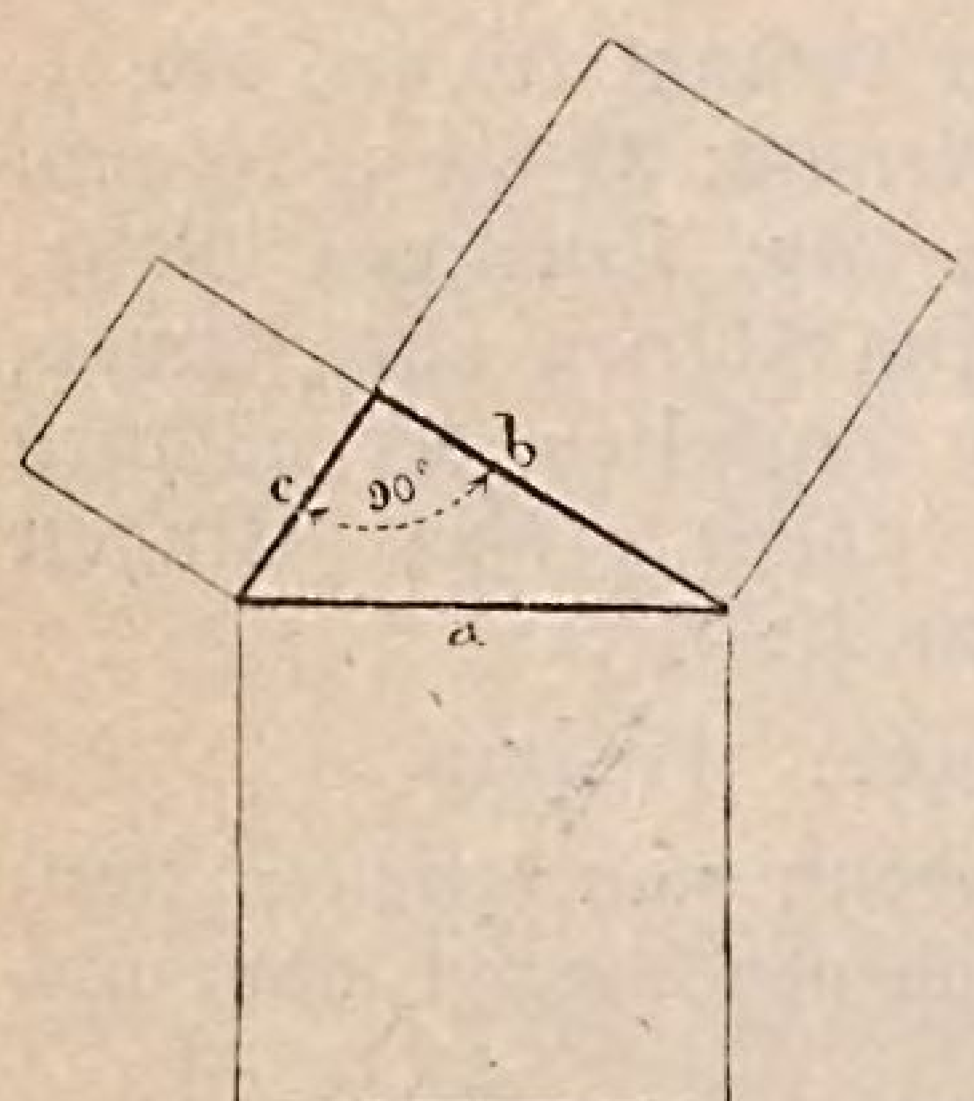
Beisp. Wie groß ist die Fläche eines Dreiecks, dessen Seiten $a = 6$ m, $b = 8$ m und $c = 3$ m sind, und wie groß die auf b senkrechte Höhe h?

Zunächst hat man $s = \frac{6+8+3}{2} = 8{,}5$ m; folglich

Fläche $F = \sqrt{8{,}5 \cdot (8{,}5-6)(8{,}5-8)(8{,}5-3)} = 7{,}644$ qm.

Höhe . . . . $h = \frac{2F}{b} = \frac{2 \cdot 7{,}644}{8} = 1{,}911$ m.

5. **Rechtwinkliges Dreieck.** Die zwei Seiten, welche den rechten Winkel bilden, heißen Katheten, die dritte Seite Hypotenuse. Nun ist nach dem pythagoräischen Lehrsatz das Quadrat über der Hypotenuse a so groß, wie die Quadrate über den Katheten b und c zusammen, also (nach Fig.)



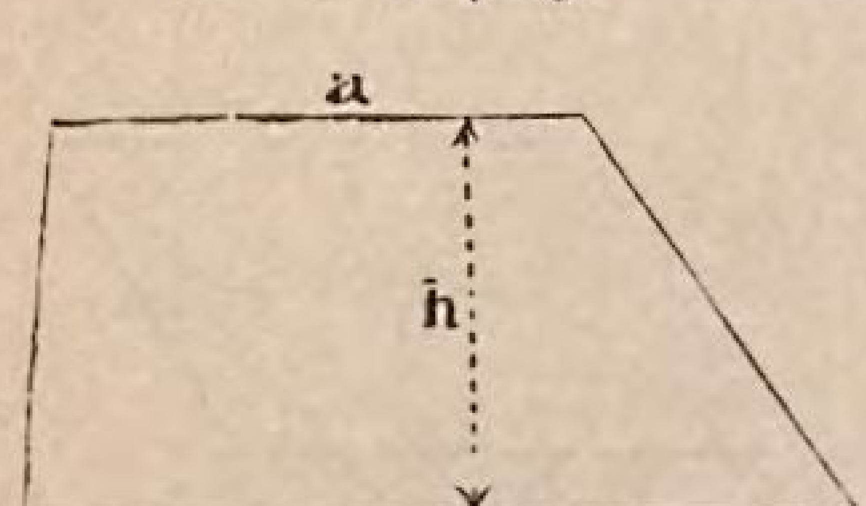
$a^2 = b^2 + c^2$, $a = \sqrt{b^2 + c^2}$, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Beisp. Es seien $b = 4$, $c = 3$, so ist

$$a = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

Die Figur zeigt, wie zwei Quadrate, z. B. über den Katheten b und c, in eines verwandelt werden über der Hypotenuse a; ferner, wie der Unterschied zweier Quadrate, z. B. von a^2 und b^2, als Quadrat über c dargestellt wird.

6. **Trapez.** Seine Fläche wird gefunden, wenn man die halbe Summe der parallelen Seiten mit dem Abstand der Parallelen multipliziert. Es ist also



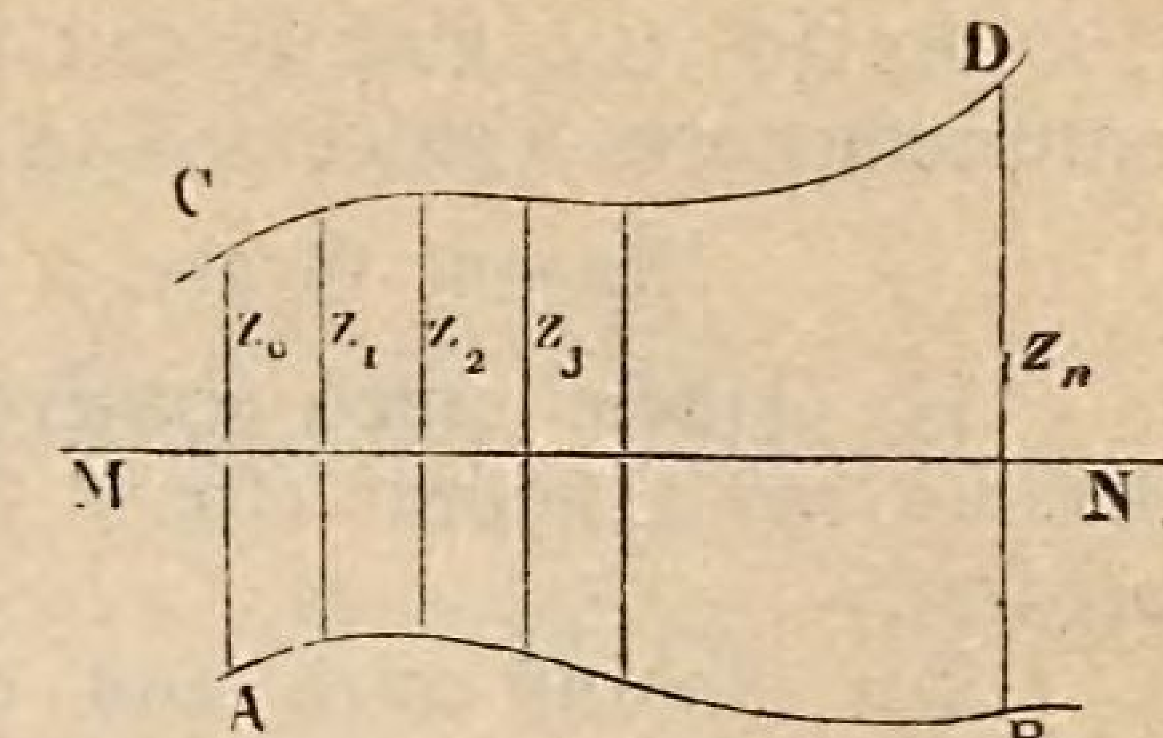
$$\text{Fläche} = \frac{1}{2}(a+b)\,h.$$

Beisp. $a = 0{,}6$ m; $b = 0{,}9$ m; $h = 0{,}5$ m;

Fläche $= \frac{1}{2}(0{,}6 + 0{,}9) \cdot 0{,}5 = 0{,}375$ qm.

7. **Vielecke.** Ihre Fläche wird gefunden, wenn man sie in Dreiecke oder Trapeze zerlegt, diese Teile berechnet und addiert.

8. **Flächen von beliebiger krummer Begrenzung.** Bei Berechnung einer Figur ABDC, welche von Kurven AB und CD eingeschlossen ist, wird das Trapez zu Grunde gelegt. Man ziehe eine Gerade MN durch die Figur, teile sie in eine beliebige (möglichst große) Anzahl Teile und errichte durch die Teilungspunkte Ordinaten z_0, z_1, z_2, z_3, . . . z_n senkrecht auf MN. Nun betrachte man die Figuren zwischen



zwei auf einander folgenden Ordinaten als Trapeze und addiere die Inhalte derselben, so hat man annähernd den Inhalt der ganzen Figur.

Ist MN in eine gerade Anzahl gleicher Teile geteilt worden und bezeichnet man einen solchen Teil mit d, so ist nach der Simpsonschen Regel die Gesamtfläche F ziemlich genau:

$$F = \frac{d}{3}[z_0 + z_n + 4(z_1 + z_3 + ..) + 2(z_2 + z_4 + ...)].$$

Man addiere also zur Summe der beiden äußersten Ordinaten die vierfache Summe aller Ordinaten mit ungerader und die doppelte Summe aller Ordinaten mit gerader Stellenzahl und multipliziere die Totalsumme mit dem Drittel der Entfernung je zweier Ordinaten, so erhält man die Gesamtfläche.

Beisp. Es seien $z_0 = 12{,}0$ m $z_1 = 13{,}0$ m $z_2 = 13{,}4$ m
$z_6 = 9{,}0$ „ $z_3 = 12{,}2$ „ $z_4 = 11{,}2$ „
$z_5 = 10{,}0$ „
Ferner Abstand $d = 3{,}6$ „ , so wird nach obiger Formel

$$F = \frac{3{,}6}{3}[12 + 9 + 4(13 + 12{,}2 + 10) + 2(13{,}4 + 11{,}2)] = 253{,}2 \text{ qm}.$$

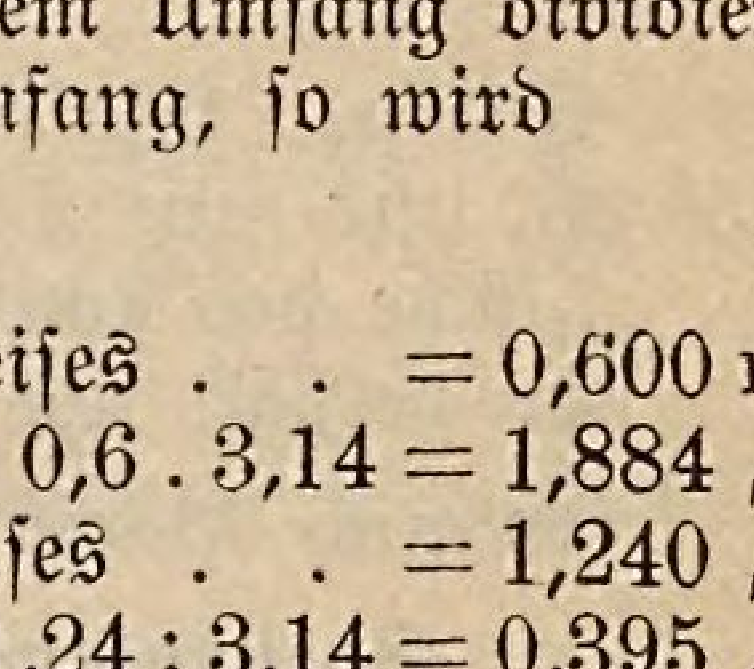
9. **Kreislinie.** Beim Kreise verhält sich der Durchmesser zum Umfang annähernd wie 7 : 22, genauer wie 113 : 355 oder auch wie 1 : 3,14159265 . . . Für gewöhnliche Zwecke nimmt man statt der letztern Zahl nur 3,14. Diese Verhältniszahl 3,14 . . wird allgemein mit dem griechischen Buchstaben π (sprich py) bezeichnet.

Hiernach ist der Umfang eines Kreises gleich dem Durchmesser multipliziert mit π, und der Durchmesser gleich dem Umfang dividiert mit π. Es sei d der Durchmesser und U der Umfang, so wird

$$U = d\pi; \quad d = \frac{U}{\pi}.$$

Beisp. 1. Wenn der Durchmesser eines Kreises . . = 0,600 m
so ist der Umfang desselben . . 0,6 . 3,14 = 1,884 „
Beisp. 2. Wenn aber der Umfang des Kreises . . = 1,240 „
so wird der Durchmesser . . 1,24 : 3,14 = 0,395 „

10. **Kreisbogen im Längen- oder Gradmaß.** Ist die Bogenlänge AB = b, die entsprechende Anzahl Grade = n, der Durchmesser des Kreises = d, so hat man



$$b : d\pi = n : 360^0$$

d. h. es verhält sich die Bogenlänge zur Peripherie, wie die Anzahl Grade, welche dem Bogen entsprechen, zu 360 Graden (S. 19).

Beisp. 1. Wie lang ist ein Bogen von 25°, wenn der Radius desselben 0,7 m beträgt?

$$\text{Bogenlänge } b = 1{,}4 \,.\, 3{,}14 \,.\, \frac{25}{360} = 0{,}3053 \text{ m}.$$

Beisp. 2. Ein Bogen sei 0,3 m lang und der Durchmesser des entsprechenden Kreises 0,4 m; wie viele Grade hat der Bogen?

$$\text{Anzahl Grade } n = 360 \cdot \frac{0,3}{0,4 \cdot 3,14} = 85,98^0.$$

11. **Fläche eines Kreises.** Sie wird gefunden, wenn man den Radius ins Quadrat erhebt und das Resultat mit $\pi = 3,14$ . . multipliziert.

Der Radius wird aus der Kreisfläche gefunden, wenn man die Fläche mit 3,14 . . dividiert und aus dem Resultate die Quadratwurzel auszieht.

Wenn r der Radius, d der Durchmesser und F die Fläche, so ist

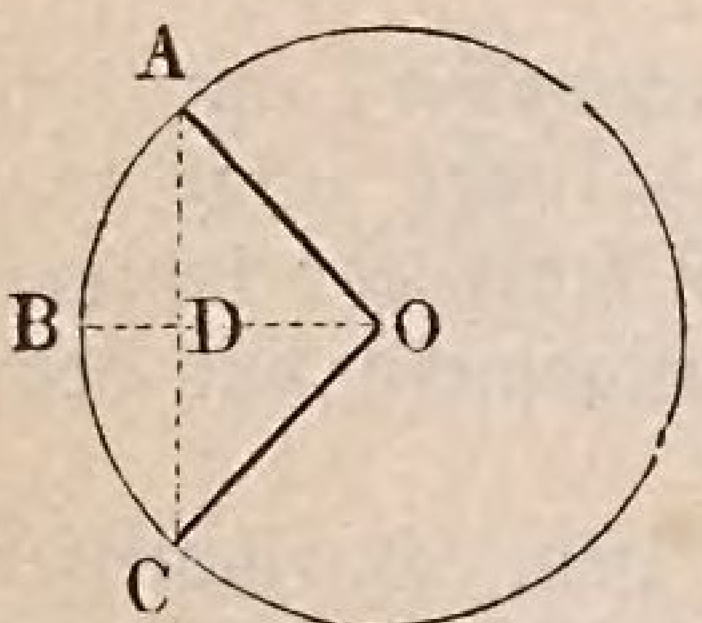
$$F = r^2\pi, \text{ oder } F = \frac{d^2\pi}{4}, \text{ und } r = \sqrt{\frac{F}{\pi}}.$$

Beisp. 1. Es sei der Radius eines Kreises . . = 0,450 m,
so ist die Kreisfläche . 0,45 . 0,45 . 3,14 = 0,636 qm.

Beisp. 2. Wenn aber die Fläche eines Kreises . = 1,327 qm,
so beträgt ihr Radius . . $r = \sqrt{\frac{1,327}{3,14}} = 0,650$ m.

12. **Flächeninhalt eines Kreisringes.** Man findet ihn dadurch, daß man die Fläche des kleinern Kreises von der des größern subtrahiert.

13. **Die Fläche eines Kreissektors** (Ausschnittes) AOCB ist gleich derjenigen eines Dreiecks, dessen Grundlinie die Bogenlänge ABC und dessen Höhe der Radius des Kreises ist. Wenn der Bogen in Graden ausgedrückt ist, so muß derselbe zuerst im Längenmaße gesucht werden. Statt dessen kann man auch die Fläche des ganzen Kreises berechnen und die Proportion anwenden: Wie sich der Bogen zu 360⁰ verhält, so der Inhalt des Sektors zur Kreisfläche.



Beisp. Wie groß ist die Fläche eines Sektors, wenn sein Bogen 15⁰ 30′ und sein Durchmesser 0,8 m beträgt?

Fläche des ganzen Kreises 0,4 . 0,4 . 3,14 = 0,5024 qm.
Es verhält sich . . . . 360 : 15,5 = 0,5024 : Sektor.

$$\text{Folglich Fläche des Sektors } \frac{15,5 \cdot 0,5024}{360} = 0,0216 \text{ qm.}$$

14. **Sehnenlänge und Pfeilhöhe.** Es sei die Hälfte des Mittelpunktwinkels AOC = n, der Radius AO = r, so ist (s. Trigonometrie S. 34):

Abstand der Sehne vom Mittelpunkt . . $DO = r \cos n$.
Pfeilhöhe des Kreisbogens . $BD = BO - DO = r(1 - \cos n)$.
Sehnenlänge . . . . $AC = 2r \sin n$.

Beisp. Für $n = 50^0$, $r = 0,8$ m wird

$r \cos n = 0,8 \cdot \cos 50 = 0,8 \cdot 0,6428 = 0,5142$ m.
$r(1 - \cos n) = 0,8(1 - \cos 50) = 0,8 \cdot 0,3572 = 0,2858$ „
$2r \sin n = 1,6 \cdot \sin 50 = 1,6 \cdot 0,7660 = 1,2256$ „

15. **Fläche eines Kreissegmentes.** Man berechne den Flächeninhalt des ganzen Sektors AOCB, ferner den des Dreiecks AOC, welches aus der Sehne und den zwei Radien des Sektors gebildet ist.

Ist das Segment größer als der Halbkreis, so zähle man die beiden Flächeninhalte zu einander; ist es hingegen kleiner, so zähle man sie von einander ab.

16. **Fläche ähnlicher Figuren.** Diese Flächen verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten, die gleichliegenden Seiten wie die Quadratwurzeln aus den Flächen.

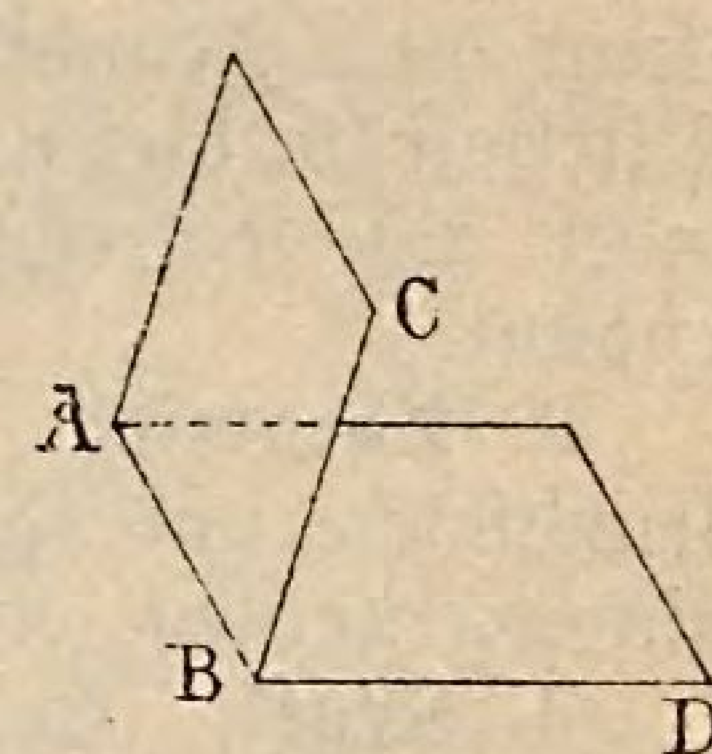
Verhalten sich z. B. die Seiten wie 3 : 5, so verhalten sich die Flächen wie 9 : 25.

Verhalten sich aber die Flächen z. B. wie 1 : 2, so verhalten sich die Seiten wie $1 : \sqrt{2}$, oder 1 : 1,414.

3. Stereometrie.

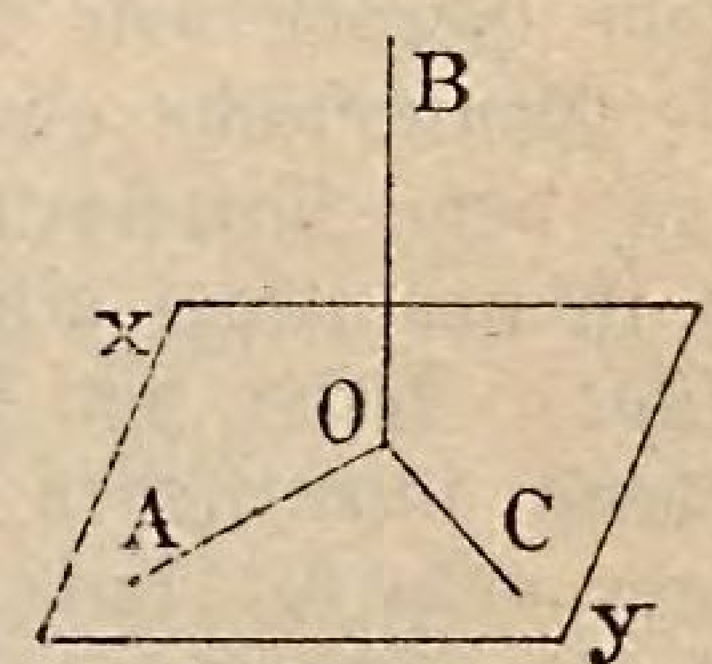
I. Linien und Ebenen.

1. **Durchschnitt zweier Ebenen.** Wenn sich zwei Ebenen ABC und ABD schneiden, so ist ihre Durchschnittslinie AB geradlinig.



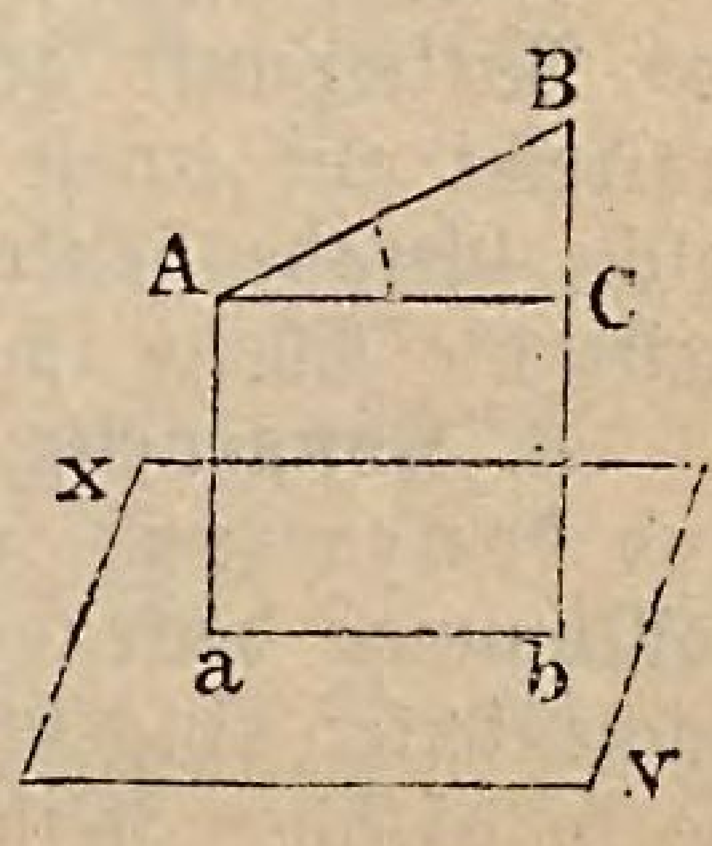
2. **Neigungswinkel zweier Ebenen.** Wenn bei diesen Ebenen die Geraden CB und DB senkrecht auf der Durchschnittslinie AB stehen, so heißt der Winkel CBD Neigungswinkel der beiden Ebenen. Ist dieser Winkel ein rechter, so stehen die beiden Ebenen senkrecht aufeinander.

3. **Senkrechte auf eine Ebene.** Sind die beiden Ebenen BOA und BOC senkrecht auf der dritten Ebene xy, so steht die Durchschnittslinie BO der beiden ersten Ebenen senkrecht auf der dritten Ebene. Die Senkrechte von einem Punkt B außerhalb einer Ebene auf diese Ebene heißt Abstand des Punktes von der Ebene.



4. **Gleiche Winkel.** Denkt man sich durch diesen Punkt B zwei Gerade gezogen, die eine parallel zu OA, die andere parallel zu OC, so entsteht ein Winkel, der gleich AOC ist.

5. **Parallele Ebenen.** Legt man durch die Schenkel des einen und des andern der genannten beiden gleichen Winkel Ebenen, so sind sie parallel. Schneiden parallele Geraden zwei solche Ebenen, so werden die Stücke der Geraden, welche zwischen den parallelen Ebenen liegen, gleich groß. Ist eine von ihnen auf der einen Ebene senkrecht, so ist sie es auch auf der andern und heißt Abstand der parallelen Ebenen.



6. **Projektion einer Geraden auf einer Ebene.** Es sei AB eine Gerade außerhalb der Ebene xy. Man fälle von den Endpunkten der Geraden Senkrechte auf die Ebene; ihre Fußpunkte seien a und b, so heißt man diese Punkte Projektionen von A

und B, und die Gerade ab Projektion der Linie im Raum. Man ziehe AC parallel zu ab, so heißt der Winkel BAC Neigungswinkel der Geraden AB zur Ebene; es ist dies der Winkel, welchen die Gerade mit ihrer Projektion bildet.

7. **Projektion einer Fläche und eines Körpers.** Man projiziere eine Reihe von Punkten der Fläche oder des Körpers auf einer Ebene und verbinde die Projektionspunkte unter einander, wie sie an der Fläche oder an dem Körper verbunden sind, so erhält man die gesuchte Projektion.

II. Einfache Körperformen.

1. **Prisma.** Dasselbe hat zu Grundflächen zwei gleiche parallele Figuren und zu Seitenflächen Parallelogramme. Das rechtwinklige Prisma heißt auch Parallelepiped. Hat das letztere gleiche Kanten, so entsteht der Würfel.

2. **Cylinder.** Er ist ein Prisma mit krummliniger Grundfläche. Wenn diese Grundfläche ein Kreis und wenn die Verbindungslinie der Mittelpunkte dieser Kreise senkrecht auf denselben steht, so wird der Cylinder ein senkrechter Kreiscylinder und jene Verbindungslinie Achse genannt.

3. **Pyramide.** Sie ist von einer beliebigen geradlinigen Figur als Grundfläche und lauter Dreiecken als Seitenflächen, die in eine Spitze zusammenlaufen, eingeschlossen.

4. **Kegel.** Er ist eine Pyramide mit krummliniger Grundfläche. Jede Gerade von der Spitze längs des Mantels heißt Kante. Wenn die Grundfläche ein Kreis und wenn die Gerade, welche von der Spitze nach dem Mittelpunkt der Grundfläche führt, senkrecht auf dieser steht, so ist der Kegel ein senkrechter Kreiskegel und jene Gerade seine Achse. Wird der Mantel eines solchen Kegels geschnitten durch eine Ebene, so entstehen krumme Linien, welche Kegelschnitte heißen, und zwar eine Ellipse, wenn die Ebene zwei einander diametral gegenüberliegende Kanten schneidet, eine Parabel, wenn sie zu einer Kante parallel ist, und eine Hyperbel, wenn weder das eine noch das andere eintritt (S. 42).

5. **Kugel.** Dreht sich ein Halbkreis um seinen Durchmesser, so beschreibt er eine Kugel, die Halbkreislinie die Kugelfläche und irgend ein Bogen der Halbkreislinie eine Flächenzone der Kugel.

Jeder ebene Schnitt durch die Kugel ist ein Kreis; derjenige durch den Mittelpunkt heißt größter Kreis. Eine Gerade vom Mittelpunkt, senkrecht auf einen solchen Schnitt, trifft die Mitte des Schnittes; eine solche Gerade, senkrecht auf eine Ebene, welche die Kugelfläche berührt, trifft die Ebene im Berührungspunkt.

6. **Kongruenz, Aehnlichkeit und Symmetrie der Körper.** Körper sind kongruent, wenn ihre Oberflächen so beschaffen sind, daß sie sich vollkommen decken können; ähnlich, wenn sie von gleich vielen Oberflächenteilen eingeschlossen werden, die paarweise ähnlich sind und wenn sie in gleicher Reihenfolge angeordnet sind; symmetrisch, wenn sich

zu jedem Punkt des einen Körpers ein Punkt am zweiten Körper findet, deren gerade Verbindungslinie senkrecht auf einer Ebene, der Ebene der Symmetrie, steht und von dieser halbiert wird (S. 22).

III. Oberflächen und Inhalte der Körper.

1. **Einheit des Körpermaßes.** Als solche dient der Würfel. Derselbe ist von gleich großen quadratischen Flächen begrenzt. Ist seine Kante 1 Meter lang, so heißt er Kubikmeter. In gleichem Sinne sind Kubikdecimeter, Kubikcentimeter, Kubikfuß, Kubikzoll 2c. zu verstehen.

Ein Kubikmeter enthält 1000 Kubikdecimeter; denn man zerlege ihn in 10 gleich dicke Schichten, so wird jede Schicht 10 . 10 = 100 Kubikdecimeter, also alle 10 Schichten 10 . 10 . 10 = 1000 Kubikdecimeter enthalten. Auf gleiche Weise ergeben sich die Unterabteilungen jedes andern würfelförmigen Maßes.

Wegen dieser 1000fachen Verjüngung von einer Maßeinheit zur nächsten Unterabteilung teile man die gegebene Ziffer vom Komma aus rechts in Klassen von je 3 Ziffern, z. B. wie folgt:

2,54367245 kbm = 2,|543|672|450|

Hierin enthält die erste Klasse nach dem Komma die Kubikdecimeter, die zweite die Kubikcentimeter, die dritte die Kubikmillimeter. Diese letztere besteht eigentlich nur aus den beiden Ziffern 45, muß daher noch um eine 0 ergänzt werden zu 450. Die gegebene Zahl enthält daher

2 kbm, 543 kdm, 672 kcm, 450 kmm.

Beim Uebergang von den niedern Körpereinheiten zu den höhern teile man die gegebene Zahl von den Einheiten aus nach links in Klassen von je 3 Ziffern, bis man zu den Kubikmetern gelangt, etwa wie folgt: 17052438 kcm = 17|052|438

so erhält man 17 kbm, 52 kdm, 438 kcm.

Ganz ebenso hat man beim 10teiligen Fußmaß:

0,173026 Kubikfuß = 173 Kub.″ und 26 Kub.‴

4005342 Kubik.‴ = 4 Kub.′, 5 Kub.″, 342 Kub.‴

Nach dem 12teiligen Maße ist

1 Kub.′ = 12 . 12 . 12 = 1728 Kub.″; 1 Kub.″ = 1728 Kub.‴

2. **Würfel.** Sein Körperinhalt wird gefunden, wenn man die Würfelkante dreimal mit sich selbst multipliziert.

Beisp. Wie viel Inhalt hat ein Würfel von 6,2 m Kantenlänge?

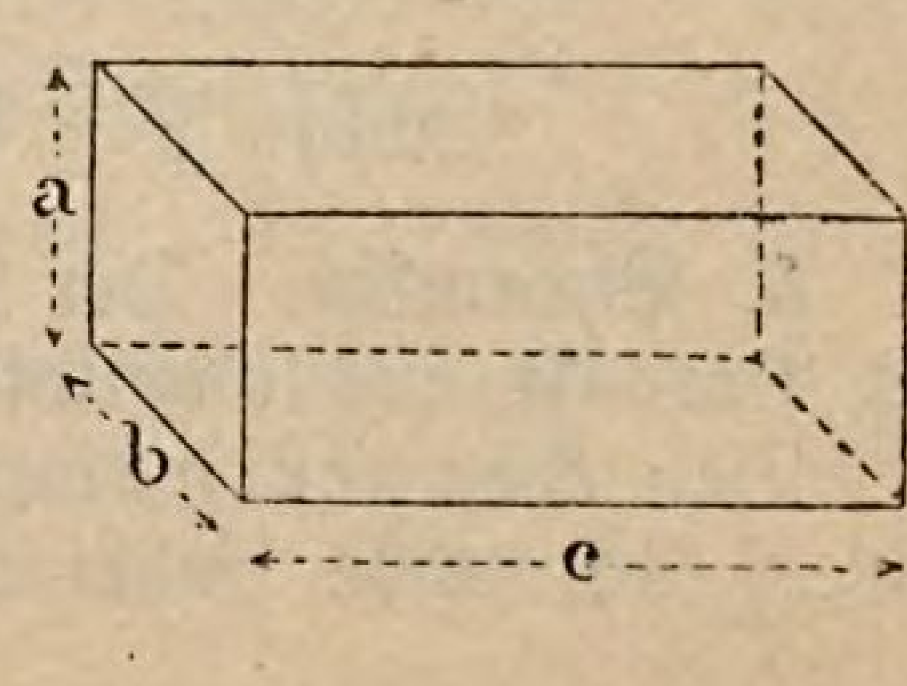
Inhalt 6,2 . 6,2 . 6,2 = 238,328 kbm.

Die Kantenlänge eines Würfels wird gefunden, wenn man aus dessen Körperinhalt die Kubikwurzel auszieht.

Beisp. Wenn der Körperinhalt eines Würfels 100 kdm, so ist

Kantenlänge = $\sqrt[3]{100}$ = 4,641dm.

3. **Prisma.** Sein Inhalt wird gefunden, wenn man die Grundfläche mit der (darauf senkrecht stehenden) Höhe multipliziert. Ist der Inhalt in Kubikmetern anzugeben, so muß die Grundfläche in Quadratmetern und die Höhe in Metern ausgedrückt werden. Ueberhaupt ist dabei einerlei Längenmaß anzuwenden.



Der Inhalt J des rechtwinkligen Prismas ist gleich dem Produkt seiner drei rechtwinklig aufeinander stehenden Dimensionen a, b, c; daher

$$J = abc.$$

Beisp. Bei einem rechtwinkligen Balken sei die Breite a = 11″, Dicke b = 9″ und Länge L = 24′; so ist sein Inhalt (für 10teil. Maß)

$$J = 1{,}1 \,.\, 0{,}9 \,.\, 24 = 23{,}76 \text{ Kub.}'$$

Man findet eine Dimension des Körpers, wenn man dessen Inhalt mit dem Produkt der beiden andern Dimensionen dividiert. So ist

$$a = \frac{J}{bc}, \qquad b = \frac{J}{ac}, \qquad c = \frac{J}{ab}.$$

Beisp. Wie lang muß ein rechtwinklig ausgehöhlter Brunnentrog sein, der 4 Kubikmeter Wasser fassen soll, bei einer Breite von 1,4 m und einer Tiefe von 0,9 m?

$$\text{Es ist Länge} = \frac{4}{1{,}4 \,.\, 0{,}9} = 3{,}174 \text{ m}.$$

4. **Cylinder.** Die Mantelfläche des Cylinders kann in ein rechtwinkliges Viereck abgewickelt werden, dessen Länge gleich dem Umfang $2r\pi$ der Grundfläche und dessen Höhe h gleich der Höhe des Cylinders ist. Bezeichnet F die Fläche des Mantels, so hat man:

$$F = 2r\pi \,.\, h.$$

Beisp. Wie groß ist die Mantelfläche einer kreisrunden Säule von 0,84 m Durchmesser und 5,8 m Höhe?

$$\text{Mantelfläche } F = 0{,}84 \,.\, 3{,}14 \,.\, 5{,}8 = 15{,}298 \text{ qm}.$$

Der kubische Inhalt des Cylinders wird gefunden, indem man die Grundfläche $r^2\pi$ mit der Höhe h multipliziert, folglich

$$J = r^2\pi \,.\, h.$$

Beisp. Wie viel Kubikmeter Wasser faßt eine cylindrische Röhre von 6 m Länge und 0,18 m Weite?

$$\text{Inhalt } J = 0{,}09 \,.\, 0{,}09 \,.\, 3{,}14 \,.\, 6 = 0{,}1526 \text{ kbm}.$$

Die Höhe des Cylinders wird gefunden, wenn man den kubischen Inhalt durch die Grundfläche $r^2\pi$ dividiert; ferner die Grundfläche, wenn man den kubischen Inhalt durch die Höhe dividiert. Mithin ist

$$h = \frac{J}{r^2\pi}, \qquad r^2\pi = \frac{J}{h}, \qquad r = \sqrt{\frac{J}{\pi h}}.$$

Beisp. 1. Es werden 0,35 kbm Wasser in eine cylindrische Röhre von 0,12 m Halbmesser gegossen; wie hoch wird die Röhre angefüllt?

$$\text{Höhe } h = \frac{0{,}35}{0{,}12 \,.\, 0{,}12 \,.\, 3{,}14} = \frac{35}{4{,}5216} = 7{,}74 \text{ m}.$$

Beisp. 2. Wenn ein cylindrischer Baumstamm 6 m Länge und 3,2 kbm Inhalt hat, so ist dessen

$$\text{Radius } r = \sqrt{\frac{2{,}3}{3{,}14 \,.\, 6}} = \sqrt{0{,}1221} = 0{,}35 \text{ m}.$$

5. **Pyramide.** Der Inhalt der Pyramide ergibt sich, indem man das Produkt aus Grundfläche und Höhe durch 3 dividiert.

Den Körperinhalt einer parallel zur Grundfläche abgeschnittenen Pyramide findet man durch die Formel:

$$J = \frac{h}{3}\left(F + f + \sqrt{Ff}\right),$$

F Grundfläche, f Schnittfläche und h Abstand dieser beiden Flächen.

6. **Kegel.** Die Mantel- oder Seitenfläche des Kegels kann in einen Kreisausschnitt abgewickelt werden, dessen Radius die Seitenkante OC und dessen Bogenlänge die Peripherie der Grundfläche ist. Wenn F die Seitenfläche und R der Radius der Grundfläche, so wird

$$F = R\pi \,.\, OC.$$

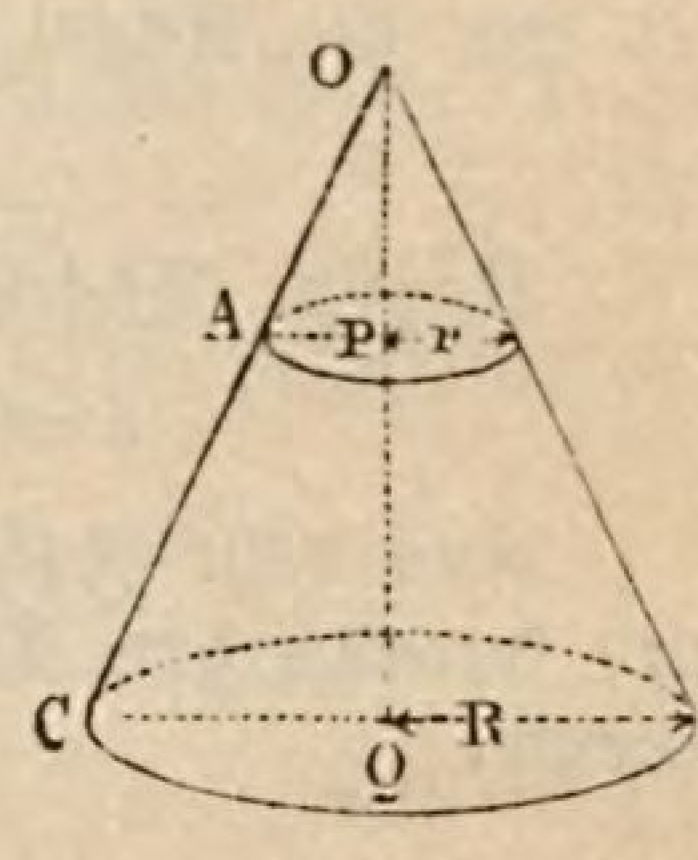
Beisp. Wie groß ist die Seitenfläche eines Kegels, wenn die Höhe OQ = 16 und der Radius CQ = 5?

Nach dem pythagoräischen Satze (S. 24) berechnet man zuerst OC. Man erhält

$$OC = \sqrt{OQ^2 + CQ^2} = \sqrt{16^2 + 5^2} = \sqrt{281} = 16{,}76.$$

Somit die Fläche des Mantels:

$$F = 5 \,.\, 3{,}14 \,.\, 16{,}76 = 263{,}13.$$



Die Seitenfläche eines oben parallel mit der Grundfläche abgestutzten Kegels kann in Form einer Ringfläche abgewickelt werden, und findet sich somit, wenn man den untern und obern Umfang addiert und die Hälfte dieser Summe mit der Seitenkante AC multipliziert. Bezeichnet r den Radius der Schnittfläche, so ist die Mantelfläche

$$F = (R + r)\,\pi \,.\, AC.$$

Beisp. Wenn der untere Radius R = 4, der obere r = 2,5 und die Seitenlinie AC = 10, so ist die Seitenfläche

$$F = (4 + 2{,}5) \,.\, 3{,}14 \,.\, 10 = 204{,}1.$$

Der kubische Inhalt eines vollständigen Kegels wird gefunden, indem man das Produkt aus Grundfläche und Höhe mit 3 dividiert. Bezeichnet J den Körperinhalt und OQ = h die Höhe, so ist

$$J = \frac{h}{3} \,.\, R^2\pi.$$

Beisp. Der Radius der Grundfläche eines Kegels sei 3,4 m, seine Höhe 7 m; wie groß sein Körperinhalt?

$$J = \frac{7}{3} \,.\, 3{,}4 \,.\, 3{,}4 \,.\, 3{,}14 = 84{,}696 \text{ kbm}.$$

Der Kubikinhalt J eines parallel zur Grundfläche abgeschnittenen Kegels wird berechnet nach der Formel:

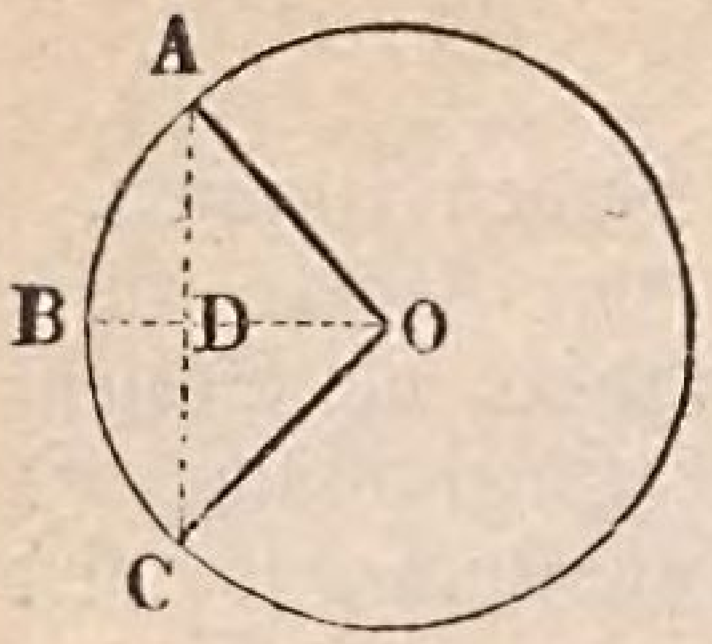
$$J = \frac{\pi}{3} h\,(R^2 + r^2 + Rr),$$

worin R, r die Radien der beiden Kreisflächen und h den Abstand dieser Kreise bezeichnen.

Beisp. Welches ist der Kubikinhalt eines abgestumpften Kegels, wenn der untere Radius = 7, der obere = 4 und die Höhe PQ = 9 ist?

$$J = \frac{3{,}1416}{3} \,.\, 9\,(7^2 + 4^2 = 7 \,.\, 4) = 1{,}0472 \,.\, 9\,(49 + 16 + 28) = 876{,}5.$$

7. **Kugel.** Derjenige Teil ABC der Kugelfläche, welcher durch eine Ebene AC abgeschnitten wird, heißt Kalotte, BD Höhe der Kalotte, der Körper ABC zwischen der Kalotte und dem Schnitt AC



Kugelabschnitt und der Körper AOCB zwischen der Kalotte AC und dem Kegelmantel AOC Kugelausschnitt.

Die Oberfläche der Kugel ist das 4fache eines größten Kreises; folglich wenn r den Radius, d den Durchmesser und F die Oberfläche bedeutet:

$$F = 4r^2\pi = d^2\pi.$$

Beisp. Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel, wenn ihr Durchmesser 0,7 m beträgt?

$$F = 0{,}7 \,.\, 0{,}7 \,.\, 3{,}1416 = 1{,}5394 \text{ qm}.$$

Der Flächeninhalt einer Kalotte ABC ist gleich dem Umfang $d\pi$ eines größten Kreises, multipliziert mit ihrer Höhe BD.

Der Kubikinhalt einer Kugel ist $\frac{\pi}{6} = 0{,}5236$ vom Inhalt d^3 des um die Kugel beschriebenen Würfels; daher Inhalt der Kugel

$$J = \frac{\pi}{6}\, d^3 = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Beisp. Welches ist der Inhalt einer Kugel von 0,7 m Durchmesser?

$$J = \frac{3{,}14}{6} \,.\, 0{,}7 \,.\, 0{,}7 \,.\, 0{,}7 = 0{,}1795 \text{ kbm}.$$

Aus dem Inhalt der Kugel kann man den umschriebenen Würfel und daraus den Durchmesser berechnen. Man erhält aus der letzten Formel

$$d^3 = \frac{6\,J}{\pi}, \qquad d = \sqrt[3]{\frac{6\,J}{\pi}}.$$

Beisp. Welchen Durchmesser hat eine Kugel von 1 kbm Inhalt?

$$d = \sqrt[3]{\frac{6 \,.\, 1}{3{,}14}} = 1{,}241 \text{ m}.$$

Der Inhalt eines Kugelausschnittes (s. letzte Fig.) ist:

$$J = \frac{2}{3}\, r^2 \pi h$$

und der Inhalt eines Kugelabschnittes ACB:

$$J = \pi h^2 \left(r - \frac{1}{3} h\right),$$

worin h die Höhe BD der begrenzenden Kalotte ausdrückt.

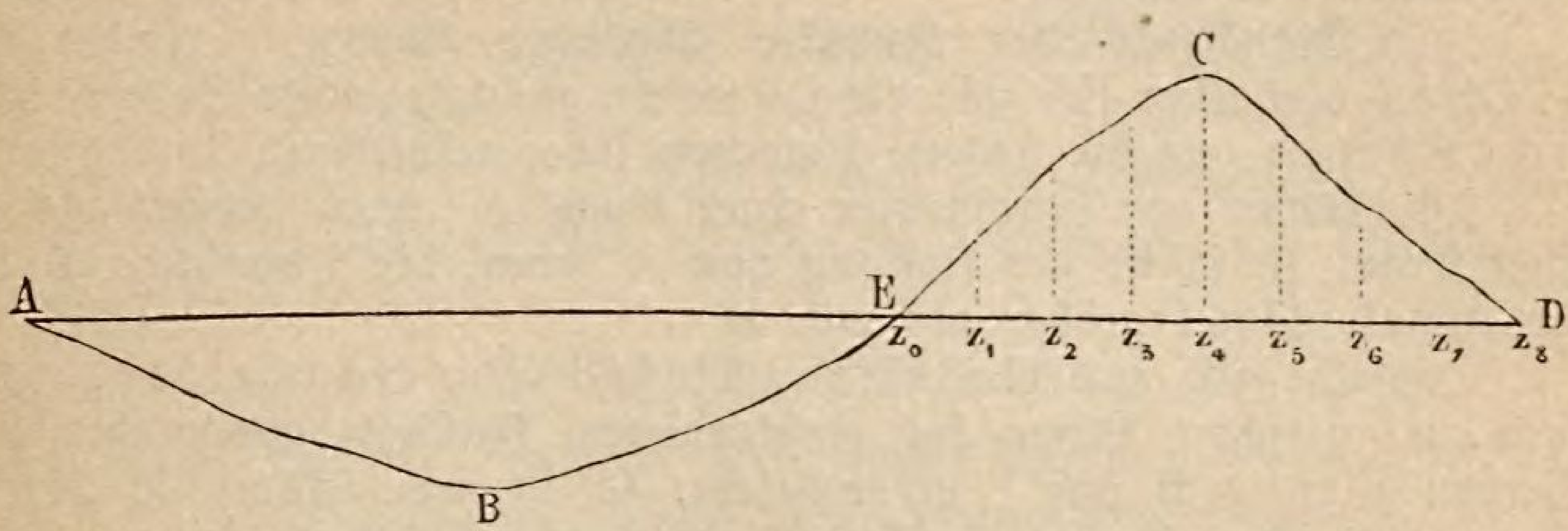
8. **Körper von beliebiger Begrenzung.** Wenn sich Körperformen nicht bequem auf die in den vorigen Abschnitten berechneten zurückführen lassen, so lege man durch sie in ihrer Längenrichtung eine Achse und bestimme eine Reihe von Querschnitten senkrecht auf diese Achse. Alsdann ergibt sich annähernd der Kubikinhalt eines Körperteils, welcher zwischen zwei Querschnitten liegt, indem man die halbe Summe dieser Querschnitte mit ihrem senkrechten Abstand multipliziert.

Genauer wird der Kubikinhalt durch Anwendung der Simpsonschen Regel (S. 25) gefunden, wobei für die Ordinaten die Querschnitte zu nehmen sind.

Beisp. Es soll eine horizontale Straße durch ein unebenes Terrain angelegt werden, so daß der Abtrag für eine gewisse Strecke gleich dem benachbarten Auftrag werde.

Es sei ABCD das Längenprofil des natürlichen Bodens. Die

Horizontallinie AED soll so ausgemittelt werden, daß der Abtrag ECD gleich dem Auftrag ABE sei. Man nehme die Höhe der Ebene AED nach bloßer Schätzung an und prüfe ihre richtige Lage, wie folgt.



Man bestimme in gleichen Abständen die Flächeninhalte einer geraden Anzahl Querschnitte $z_0, z_1, z_2, \ldots$, senkrecht auf ED. Es sei etwa

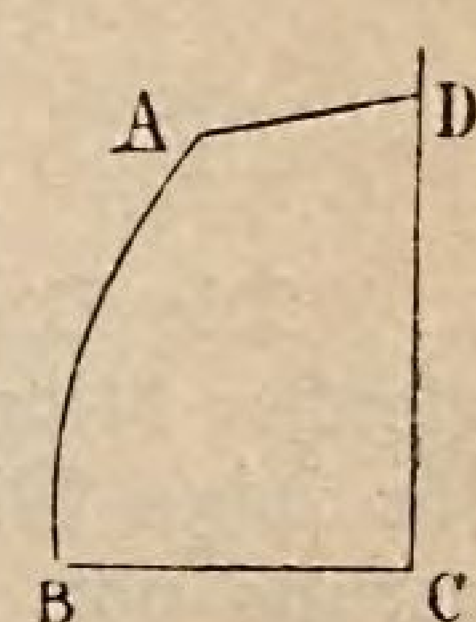
$z_0 = 0$, $z_1 = 8{,}2$ qm, $z_2 = 12{,}5$ qm, Abstand $d = 16{,}5$ m,
$z_8 = 0$, $z_3 = 14{,}7$ „ $z_4 = 17{,}2$ „
$z_5 = 15{,}3$ „ $z_6 = 10{,}4$ „
$z_7 = 7{,}8$ „ so ist der Inhalt des Abtrages:

$$J = \frac{16{,}5}{3}[0 + 0 + 4\,(8{,}2 + 14{,}7 + 15{,}3 + 7{,}8) + 2\,(12{,}5 + 17{,}2 + 10{,}4)]$$

$$J = 5{,}5\,[4 \,.\, 46{,}0 + 2 \,.\, 40{,}1] = 1453{,}1 \text{ kbm.}$$

Ebenso bestimme man den Kubikinhalt des Auftrages. Sind beide Inhalte gleich, so wurde die Lage der Ebene AED richtig gewählt. Ist der Abtrag größer oder kleiner als der Auftrag, so muß diese Ebene höher oder tiefer gelegt werden. Man verlege in diesem Falle AD um ein Entsprechendes und wiederhole obiges Verfahren, bis AD der Bedingung genau genug entspricht.

9. **Guldin's Regel.** Dreht sich eine Linie AB um eine Achse CD, so beschreibt sie eine Rotationsfläche. Diese Fläche wird erhalten, wenn man die Länge der Linie AB mit dem Weg multipliziert, den der Schwerpunkt der Linie während der Bewegung zurücklegt.



Dreht sich eine Fläche ABCD um eine Achse CD, so beschreibt sie einen Rotationskörper. Der Rauminhalt desselben wird erhalten, wenn man die Fläche, welche sich dreht, multipliziert mit dem Weg, welchen der Schwerpunkt der Fläche während der Bewegung zurücklegt. — In beiden Fällen muß die Linie oder Fläche auf derselben Seite der Drehachse und in der Ebene der Achse liegen.

Beisp. Ein Kreis vom Durchmesser 0,12 m, dessen Mittelpunkt um 0,4 m von einer Geraden absteht, welche in der Ebene des Kreises liegt, drehe sich um diese Gerade. Man soll die Oberfläche und das Volumen des entstandenen Ringes finden.

Kreislinie, welche sich dreht . . . . 0,12 . 3,14 = 0,3768 m.
Kreisfläche, welche sich dreht . . 0,06 . 0,06 . 3,14 = 0,0113 qm.

Abstand des Kreisschwerpunktes von der Achse .		= 0,400	m.
Weg des Schwerpunktes (ein Kreis)	2 . 0,4 . 3,14	= 2,512	„
Oberfläche des Ringes	0,3768 . 2,512	= 0,9465	qm.
Volumen des Ringes	0,0113 . 2,512	= 0,0284	kbm.

10. **Verhältnis der Inhalte ähnlicher Körper.** Aehnliche Flächen verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten, ähnliche Körper wie die dritten Potenzen ihrer respektiven Dimensionen.

Ist hiermit der Durchmesser einer Kugel A 3mal größer als der einer Kugel B, so ist der Umfang von A 3mal, die Oberfläche 9= und der Inhalt 27mal größer als von B.

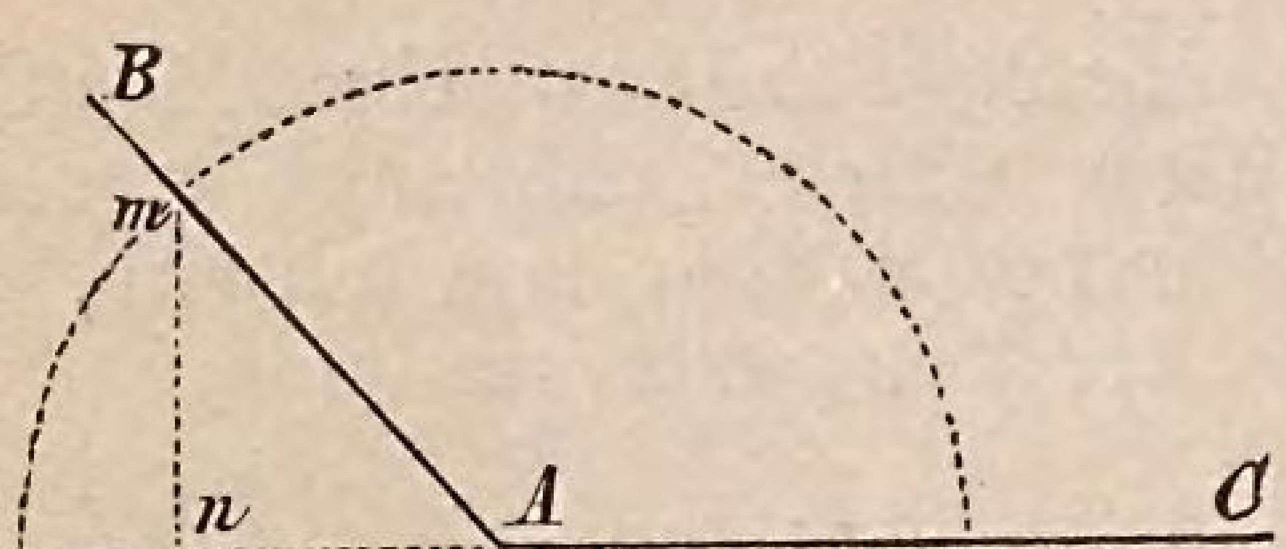
Dasselbe gilt von Modellen, Maschinen, Bauwerken, welche nach dem gleichen Plane bei verschiedenem Maßstab ausgeführt sind. Werden 6 m z. B. auf 1 m reduziert, so ist jede Fläche im Modelle 36mal und jeder körperliche Teil 6 . 6 . 6 oder 216mal kleiner.

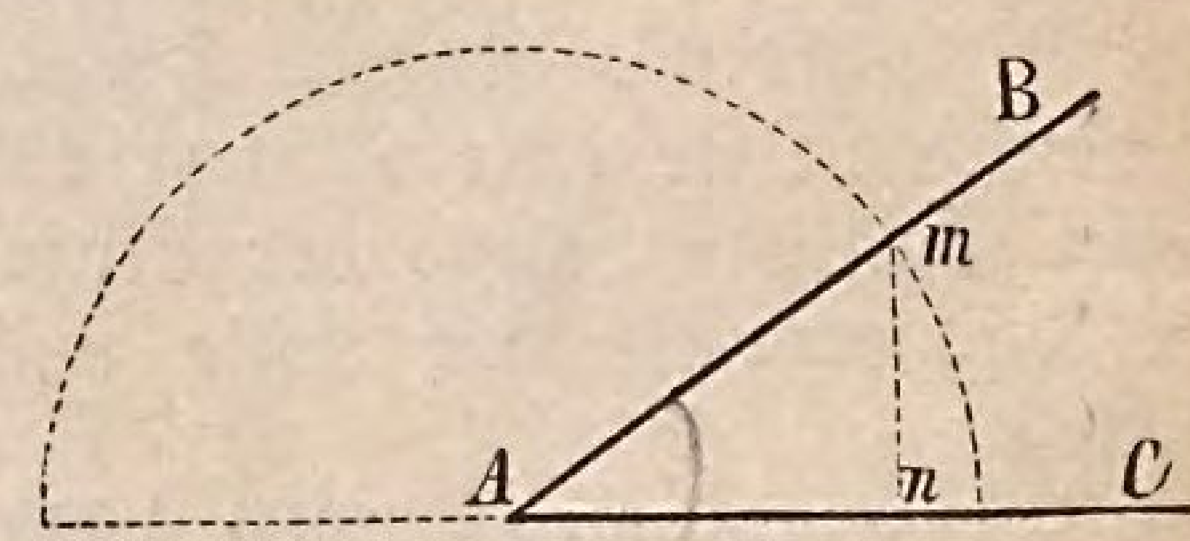
Verhalten sich die linearen Dimensionen zweier Maschinen z. B. wie 3 zu 4, so verhalten sich die Körperinhalte ihrer Teile und somit auch die Gewichte derselben wie 3 . 3 . 3 oder 27 zu 4 . 4 . 4 oder 64. Daher ist die zweite Maschine 64 : 27 oder 2,37mal schwerer als die erste.

4. Trigonometrie.

1. **Aufgabe der Trigonometrie.** Sie besteht darin, aus irgend welchen bestimmenden Elementen (Seiten, Winkeln) eines Dreiecks die übrigen durch Rechnung zu finden.

2. **Ordinate und Abscisse eines Winkels** B A C. Zieht man von einem beliebigen Punkte m des einen Schenkels A B eine Senkrechte m n auf den andern A C, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse A m, in welchem wir m n die Ordinate und A n die Abscisse dieses Winkels nennen wollen.





Die Ordinaten für Winkel zwischen 0 und 180° sind immer in gleicher Richtung zu den Schenkeln des Winkels, während die Abscisse für spitze Winkel auf dem Schenkel A C, für stumpfe auf der Verlängerung von A C liegt. Deshalb wird die Abscisse für spitze Winkel als positiv, für stumpfe als negativ betrachtet. Winkel über 180° kommen hier nicht in Betracht, weil solche in der industriellen Mechanik umgangen werden können.

3. **Trigonometrische Verhältniszahlen.** Der Sinus eines Winkels ist das Verhältnis zwischen Ordinate und Hypotenuse des Winkels. Daher

$$\sin A = \frac{mn}{Am}; \text{ folglich } mn = Am \cdot \sin A$$

Der **Cosinus** eines Winkels ist das Verhältnis zwischen Abscisse und Hypotenuse desselben. Daher

$$\cos A = \pm \frac{An}{Am}; \text{ folglich } An = \pm Am \,.\, \cos A$$

Die **Tangente** eines Winkels ist das Verhältnis zwischen Ordinate und Abscisse dieses Winkels. Daher

$$\text{tang } A = \pm \frac{mn}{An}; \text{ folglich } mn = \pm An \,.\, \text{tang } A$$

Die **Cotangente** eines Winkels ist das Verhältnis der Abscisse zur Ordinate. Daher

$$\text{cotang } A = \pm \frac{An}{mn}; \text{ folglich } An = \pm mn \,.\, \text{cotang } A$$

Diese Verhältnisse sind für gleich große Winkel unveränderlich, wie groß auch die Hypotenuse angenommen wird. Wächst der Winkel von 0 bis 90°, so nehmen Sinus und Tangente zu, während Cosinus und Cotangente abnehmen. In den obigen Verhältnissen gilt das Zeichen + für spitze, — für stumpfe Winkel.

Ist ein Winkel gegeben, so lassen sich die trigonometrischen Zahlen, und ist eine der letzteren gegeben, so läßt sich der Winkel, beides durch Konstruktion, annähernd bestimmen.

Beisp. 1. Man zeichne z. B. einen Winkel $BAC = 20\frac{1}{2}°$ (s. die nächste Figur) mit dem Transporteur auf, ziehe eine Ordinate BC und messe die 3 Seiten des Dreiecks. Findet man z. B. Hypotenuse AB = 100, Ordinate BC = 35, Abscisse AC = 93,7; so ist

$$\sin A = \frac{35}{100} = 0{,}35 \quad ; \quad \cos A = \frac{93{,}7}{100} = 0{,}937$$

$$\text{tang } A = \frac{35}{93{,}7} = 0{,}373\,..; \quad \text{cotg } A = \frac{93{,}7}{35} = 2{,}677\,..$$

Beisp. 2. Ist umgekehrt eine der 4 trigonometrischen Zahlen gegeben, z. B. tang A = 0,4, so zeichne man einen rechten Winkel ACB, mache den einen Schenkel BC als Ordinate = 4 und den andern AC als Abscisse = 10 und ziehe die Hypotenuse; hierauf messe man den Winkel A, welcher der Ordinate 4 gegenübersteht, mit dem Transporteur; so wird man annähernd 22 Grade dafür finden.

Auf diesem Wege findet man mit Hilfe der Zeichnung unmittelbar:

$$\sin 0° = 0,\quad \sin 90° = 1,\quad \sin 180° = 0,\quad \sin 30° = 0{,}5$$
$$\cos 0 = 1,\quad \cos 90 = 0,\quad \cos 180 = -1,\quad \cos 60 = 0{,}5$$
$$\text{tang } 0 = 0,\quad \text{tang } 90 = \infty,\quad \text{tang } 180 = 0,\quad \text{tang } 45 = 1{,}0$$
$$\text{cotg } 0 = \infty,\quad \text{cotg } 90 = 0,\quad \text{cotg } 180 = -\infty,\quad \text{cotg } 45 = 1{,}0$$
$$\sin 40° = \cos 50°,\quad \cos 10° = \sin 80°,\quad \cos 120° = -\sin 30°$$
$$\sin 112 = \sin 68,\quad \cos 112 = -\cos 68,\quad \text{tang } 70 = \text{cotg } 20$$
$$\text{tang } 112 = -\text{tang } 68,\quad \text{tang } 112 = -\text{cotg } 22,\quad \text{cotg } 140 = -\text{cotg } 40$$

4. Zusammenhang der trigonometrischen Zahlen untereinander.

Es ist

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1;\quad \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A};\quad \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$$

$$\text{tang } A = \frac{\sin A}{\cos A};\quad \text{cotang } A = \frac{\cos A}{\sin A};\quad \text{tang } A = \frac{1}{\text{cotang } A}$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A;\quad \cos 2A = 1 - 2\sin^2 A;\quad \text{tang } 2A = \frac{2 \text{ tang } A}{1 - \text{tang}^2 A}$$

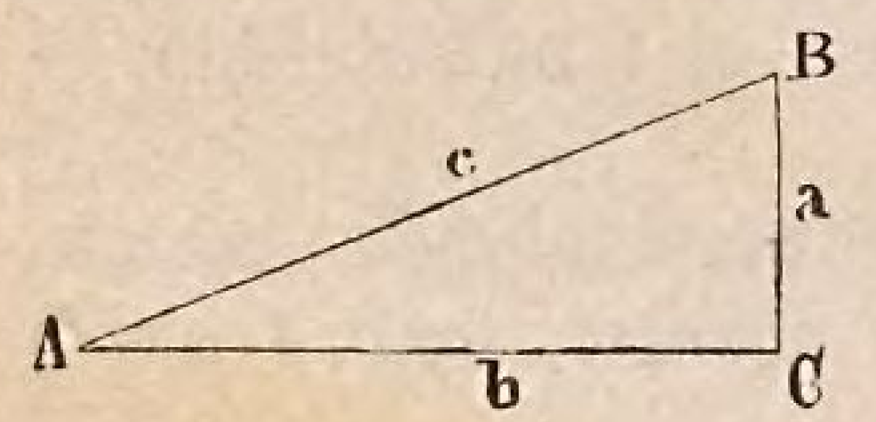
Hier dürfen $\sin^2 A$ und $\sin 2 A$ nicht miteinander verwechselt werden. Die erstere Größe ist das Quadrat von $\sin A$, die letztere der Sinus von einem Winkel, der 2mal größer ist als A.

5. **Tabelle der trigonometrischen Zahlen.** Die Tabelle am Ende des Buches enthält die trigonometrischen Zahlen für Winkel, welche je um halbe Grade fortschreiten.

Beisp. Es sei $\cos A = 0{,}7758$. Wie groß der Winkel A?

Nach der Tabelle ist $\cos 39^0 = 0{,}7771$ und $\cos 39{,}5^0 = 0{,}7716$. Es liegt also A zwischen beiden Winkelwerten. Der Differenz $0{,}7771 - 0{,}7716 = 0{,}0055$ entsprechen 30′; also wird die Differenz $0{,}7771 - 0{,}7758 = 0{,}0013$ am Winkel 7,1 Minuten ausmachen. Daher $A = 39^0\ 7{,}1'$.

6. **Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks.** Wenn zwei Elemente, worunter wenigstens eine Seite ist, gegeben sind, so können die übrigen gefunden werden. Es seien



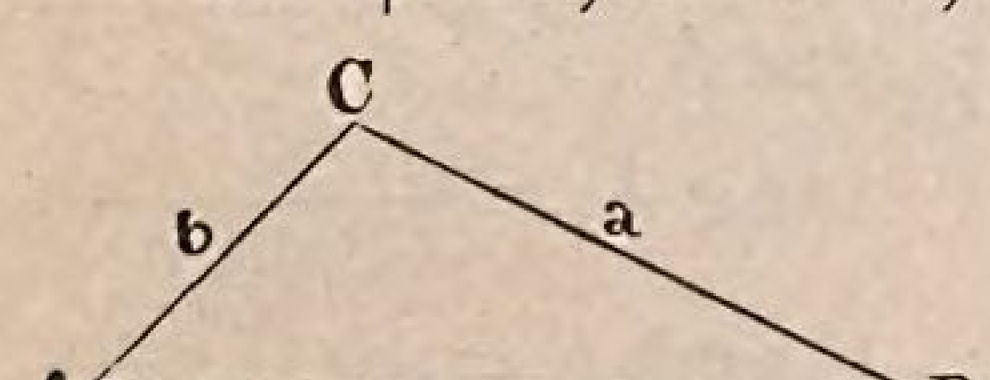
A, B, C die Winkel, wobei $C = 90^0$;
a, b, c die gegenüberstehenden Seiten,
so ergeben sich folgende Aufgaben:

Gegeben.	Gesucht.	Auflösung.
a, b	A, B, c	$\tang A = \frac{a}{b}$; $\tang B = \frac{b}{a}$; $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
a, c	A, B, b	$\sin A = \frac{a}{c}$; $\cos B = \frac{a}{c}$; $b = \sqrt{c^2 - a^2}$
a, A	b, c	$b = \frac{a}{\tang A}$; $c = \frac{a}{\sin A}$
b, A	a, c	$a = b \tang A$; $c = \frac{b}{\cos A}$
c, A	a, b	$a = c \sin A$; $b = c \cos A$

Beisp. Eine Bergstraße habe auf 142 m Länge 8,5 m Steigung; wie groß ist ihr Steigwinkel A? (Siehe obige Figur.)

Hier ist $c = 142$, $a = 8{,}5$; folglich $\sin A = \frac{a}{c} = \frac{8{,}5}{142} = 0{,}0598$.

Nach der Tabelle ist . . $\sin 3^0 = 0{,}0523$, $\sin 3^0\ 30' = 0{,}0611$.
Es ist daher annähernd $0{,}0598 = \sin 3^0\ 25'$; $A = 3^0\ 25'$.



7. **Auflösung des schiefwinkligen Dreiecks.** Wenn drei Elemente, worunter wenigstens eine Seite sein muß, gegeben sind, so können die übrigen Elemente gefunden werden. Es

gibt fünf Aufgaben, welche mittelst der Formeln der folgenden Zusammenstellung gelöst werden können. Es seien

A, B, C die drei beliebigen Winkel;
a, b, c die gegenüberliegenden Seiten.

Beisp. 1. Die drei Seiten eines Dreiecks seien gegeben; man soll einen der drei Winkel suchen. (Erste Aufgabe der Tab. S. 37).

Es sei a = 74, b = 49, c = 83; zu suchen A.

Auflösung mittelst der Formel $\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{b\,c}}$

Zunächst erhält man folgende Hilfsgrößen:

$s = \frac{74 + 49 + 83}{2} = 103$; $s - b = 54$; $s - c = 20$; folglich

$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{54 \,.\, 20}{49 \,.\, 83}} = \sqrt{0{,}26555} \,..= 0{,}5153.$

Mittelst der Tabelle am Ende des Buches findet man: $\sin 31^0\, 30' = 0{,}5225$ und $\sin 31^0 = 0{,}5150$. Es ist daher annähernd

$$\frac{1}{2} A = 31^0\, 1'; \text{ folglich } A = 62^0\, 2'.$$

Beisp. 2. Man soll die Breite BC eines Flusses berechnen, wenn gemessen werden kann (s. ob. Figur): Standlinie AC = 250 m, Winkel $A = 63^0$ und Winkel $C = 85^0$. (Vierte Aufgabe der unten stehenden Tabelle).

Zunächst ist Winkel $B = 180^0 - (63^0 + 85^0) = 32^0$.

Sodann wird sein: $BC : 250 = \sin 63^0 : \sin 32^0$; folglich

$$BC = 250 \,.\, \frac{\sin 63}{\sin 32} = 250 \,.\, \frac{0{,}8910}{0{,}5299} = 420{,}36 \text{ m}.$$

Gegeben.	Gesucht.	Auflösung.
a, b, c	A, B, C	$s = \frac{a+b+c}{2}$; $\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{b\,c}}$ $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$; $\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{s\,(s-a)}{b\,c}}$
a, b, C	c, A, B	$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos C$ $\operatorname{cotg} A = \frac{b - a \cos C}{a \sin C}$; $\operatorname{cotg} B = \frac{a - b \cos C}{b \sin C}$
a, c, C	b, A, B	$\sin A = \frac{a \sin C}{c}$; $B = 180 - A - C$; $b = \frac{c \sin B}{\sin C}$
a, B, C	b, c, A	$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$; $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$; $A = 180 - B - C$
a, A, B	b, c, C	$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$; $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$; $C = 180 - A - B$

5. Anwendung der Algebra auf Geometrie.

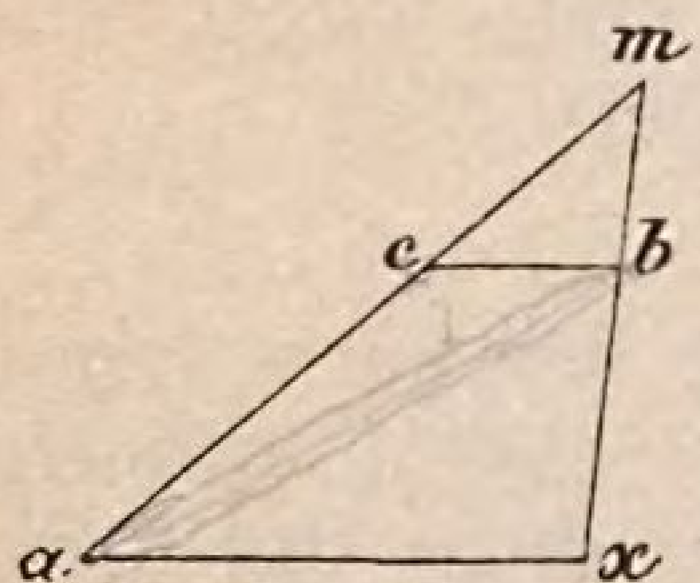
1. **Konstruktion algebraischer Ausdrücke.** Für die folgenden Ausdrücke

$$x = \frac{ab}{c},\ x = \frac{a}{bc},\ x = \frac{abc}{d},\ x = \sqrt{ab}$$

soll der Wert von x durch Zeichnung bestimmt werden.

Jede dieser Gleichungen muß homogen (gleichartig) sein. Bezeichnen daher in der ersten die Größen a, b, c Linien, so ist ab ein Rechteck, also auch cx ein solches, daher x eine Seite desselben, also x auch eine Linie. In diesem Falle sind a, b, c durch eine und dieselbe Längeneinheit (den Maßstab) auszudrücken.

Aufl. zu 1. Es entsteht die Proportion $c : b = a : x$. Es ist also zu drei gegebenen Linien die vierte Proportionale zu finden. Man zeichne einen beliebigen Winkel amx, trage auf den Schenkeln vom Scheitel m aus ab: $mc = c$, $ma = a$, $mb = b$, ziehe die Gerade cb und ferner ax parallel zu cb, so wird $mx = x$ sein. Dadurch ist nun das Rechteck mit den Seiten a, b verwandelt in ein solches mit der Grundlinie c und der Höhe x.



Wenn $c = 1$, so wird $x = ab$ (Multiplikation zweier Größen). Man schreibe $x . 1 = ab$ und konstruiere wie oben die Proportion $1 : b = a : x$. Wenn zudem $b = a$, so wird $x = a^2$ (Potenzierung) oder $x . 1 = aa$, also die Proportion $1 : a = a : x$. Wenn nur $b = 1$, so wird $x = \frac{a}{c}$ (Division zweier Zahlen). Man schreibe $cx = a . 1$ oder $c : a = 1 : x$. In allen diesen Fällen kann also x durch das gleiche Verfahren als Linie, in der gleichen Maßeinheit ausgedrückt, erhalten werden.

Aufl. zu 2. Man setze zunächst $z = bc$, bestimme durch Zeichnung z, so erhält man $x = \frac{a}{z}$, welcher Ausdruck unter dem Vorigen vorkommt. Wenn $a = 1$ und $b = c$, so wird $x = \frac{1}{b^2}$.

Aufl. zu 3. Man setze zunächst etwa $y = \frac{ab}{d}$, verzeichne diesen Ausdruck, so bleibt noch darzustellen der bekannte Ausdruck $x = cy$.

Oder man setze zuerst $z = ab$, suche z, so wird $x = \frac{cz}{d}$.

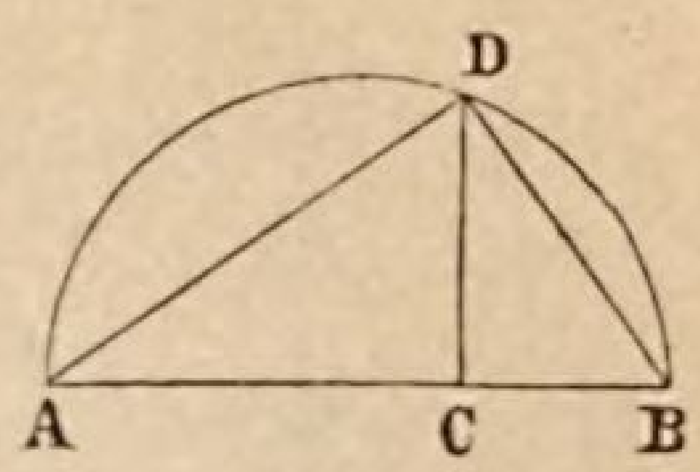
Wenn $d = 1$ und $b = a$, so wird $x = a^2c$; wenn $d = 1$ und $c = b = a$, so wird $x = a^3$ (Potenzierung).

Durch die vorstehenden Konstruktionen kann der Wert von x leicht gefunden werden in Ausdrücken wie

$$x = \frac{ab + cd}{f},\ x = \frac{ab^3 - c^2d^2}{fg}, \ldots$$

Aufl. zu 4. Wenn $x = \sqrt{ab}$, so wird $x^2 = ab$. Die Aufgabe besteht daher darin, ein Rechteck mit den Seiten a, b in ein Quadrat

zu verwandeln. Man erhält die Proportion $a : x = x : b$, in welcher man x das geometrische Mittel oder auch die mittlere geometrische Proportionale zu a und b nennt. Man mache auf einer Geraden $AC = a$ und $CB = b$, beschreibe über AB als Durchmesser einen Halbkreis und ziehe CD senkrecht auf den Durchmesser, bis diese die Kreislinie scheidet, so ist $CD = x$, weil die Dreiecke ACD und BCD gleiche Winkel, also auch proportionale Seiten haben, so daß $AC : CD = CD : CB$ wird.



Wenn $b = 1$, so wird $x = \sqrt{a}$ (Quadratwurzel aus einer Größe). Es ist alsdann $x^2 = a \,.\, 1$ oder $a : x = x : 1$. Wenn daher $BC = 1$, $AC = a$, so wird $CD = x$ die gesuchte Quadratwurzel sein.

Wenn z. B. $x = \sqrt{3}$, so wird $x^2 = 3 \,.\, 1$, also $3 : x = x : 1$; $AC = 3$, $CB = 1$, daher $CD = \sqrt{3}$.

Auf $\sqrt{a}$ kann auch z. B. $\sqrt{a^2 + bc}$ zurückgeführt werden. Man setze $z = a^2$ und $y = bc$, stelle z und y als Linien dar, so wird die Größe unter dem Wurzelzeichen zu $z \pm y$, also durch Addition oder Subtraktion zu einer einzigen Größe, welche mit v bezeichnet sei. Daher wird $x = \sqrt{a^2 \pm bc} = \sqrt{v}$.

2. **Geometrische Darstellung der Funktionen.** In Gleichungen wie $y = 2x + 3$, $y = \log x$, u. s. w. denke man sich die Größe x veränderlich, so ändert sich auch y, d. h. der Wert des Ausdruckes auf der rechten Seite, und zwar entspricht gewissen Werten von x ein bestimmter Wert von y. Die Abhängigkeit der Größe y von x wird dadurch angedeutet, daß man sagt, es sei y eine Funktion von x. Jede solche Gleichung kann nun auf folgende Weise geometrisch dargestellt werden. Es sei z. B. gegeben

$$y = x^3 - 2x^2 + 3.$$

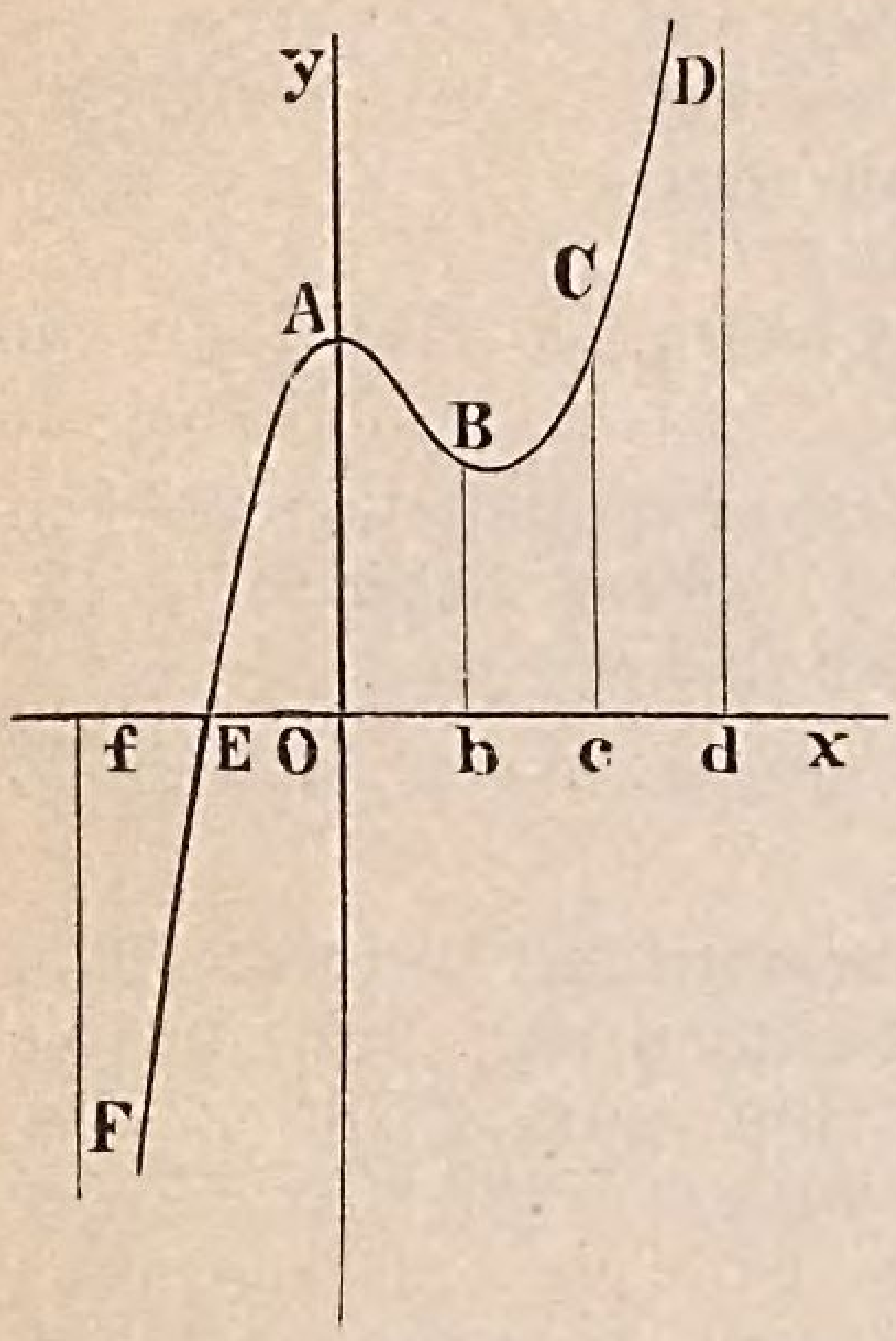
Man nehme x veränderlich an und berechne die entsprechenden Werte von y. So erhält man z. B.

$$\text{für } x = 0,\ 1,\ 2,\ \ 3, -1, -\ \ 2, \ldots$$
$$y = 3,\ 2,\ 3,\ 12,\ \ \ 0, -13, \ldots$$

Nun seien (nächste Fig.) Ox, Oy zwei rechtwinklige Koordinatenachsen. Man trage vom Anfangspunkt O aus die Werte von x auf Ox ab und zwar die positiven nach rechts, die negativen nach links; mache also z. B. $Ob = 1$, $Oc = 2$, $Od = 3$, $OE = -1$, $Of = -2, \ldots$; errichte in den Punkten $b, c, d, \ldots$ Ordinaten, senkrecht zu Ox; mache, wie obige Werte von y dies fordern, $OA = 3$, $bB = 2$, $cC = 3$, $dD = 12$, $fF = -13, \ldots$ und verbinde die Punkte $FEABCD \ldots$ stetig, so erhält man eine Kurve, deren Verlauf das Gesetz der Funktion zur Darstellung bringt.

Diese Kurve schneidet im Punkte E die Abscissenachse, macht zwischen A und B eine Wendung, d. h. die konkave Seite geht in die konvexe über und verläuft nach F und D hin ins Unendliche. Von E aus steigt sie gegen A hin, um von da an nach B hin zu sinken und sodann wieder zu steigen. Daher wird y zu einem Maximum (größten

Werte) für $x = 0$ und zu einem **Minimum** (kleinsten Werte) in der Nähe von B für $x = 1{,}33$. Der Maximalwert wird $= 3$, der Minimalwert $= 1{,}81\ldots$ Wenn man durch diese höchsten und tiefsten Punkte Tangenten an die Kurve zieht, so werden sie parallel zur Abscissenachse Ox.

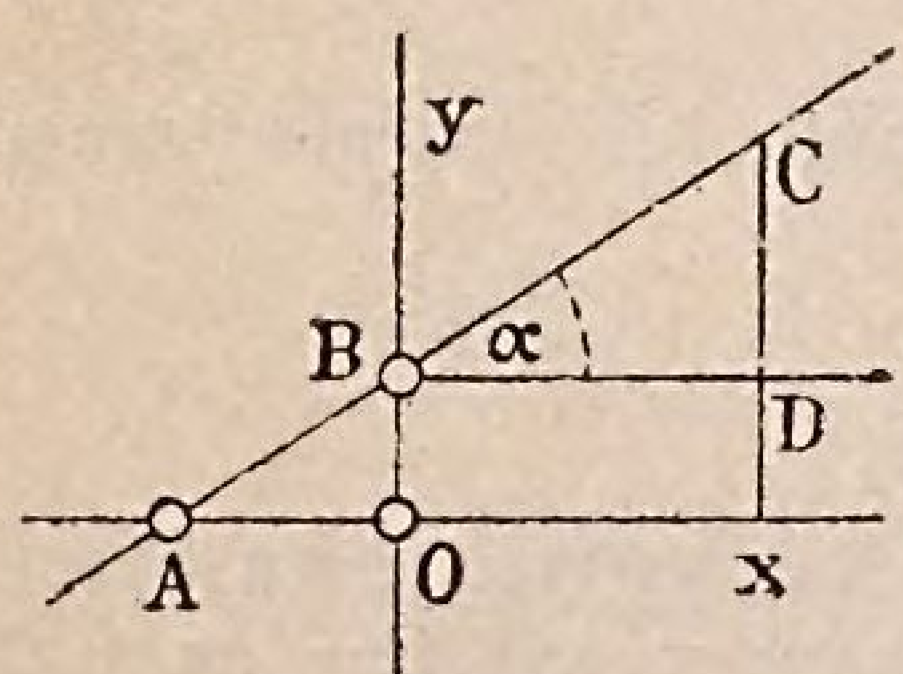


Für $x = -1$ wird $y = 0$, d. h. es ist -1 eine **Wurzel** der Gleichung $x^3 - 2x^2 + 3 = 0$. Würde die Kurve mit ihrem tiefsten Punkte bei B weiter hinabreichen, so daß sie die Abscissenachse in zwei weiteren Punkten schneiden würde, so wären die Abscissen für diese Schnittpunkte zwei weitere Wurzeln der Gleichung. Zwei solche Schnittpunkte können auch in einen Punkt zusammenfallen; alsdann berührt die Kurve die Abscissenachse als eine Tangente und es werden zwei Wurzeln einander gleich.

So gibt $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ eine Kurve, welche die Abscissenachse in drei Punkten schneidet und zwar für $x = -1$, $+1$ und $+3$. Daher sind diese drei letzten Werte Wurzeln der Gleichung $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$. Diese Kurve kann die Abscissenachse höchstens in drei Punkten schneiden, also kann auch die entsprechende, auf Null gebrachte Funktion höchstens drei Wurzeln haben.

3. **Gleichung vom ersten Grad mit zwei Veränderlichen.** Diese Gleichung hat die allgemeine Form $Ay + Bx + C = 0$. Man kann sie aber immer auf folgende einfache Form bringen:

$$(1) \qquad y = ax + b.$$



Es seien wieder Ox, Oy zwei rechtwinklige Achsen. Man verzeichne mittelst Werten von x und den entsprechenden von y Kurvenpunkte, verbinde sie stetig, so entsteht eine gerade Linie ABC.

Für den Punkt B ist $x = 0$, daher wird nach (1) $y = b = OB$.

Wenn $y = 0$, so wird nach (1) $0 = ax + b$, daher $x = -\frac{b}{a} = OA$. Hierdurch sind die Punkte B und A, wo die Gerade die Achsen schneidet, bestimmt.

Man ziehe BD parallel zu Ox, so wird $CD = y - b = ax$, woraus folgt

$$(2) \qquad a = \frac{y - b}{x} = \frac{CD}{BD} = \operatorname{tang} \alpha.$$

Es ist also a die trigonometrische Tangente des Winkels α, welchen die Gerade mit der Abscissenachse bildet.

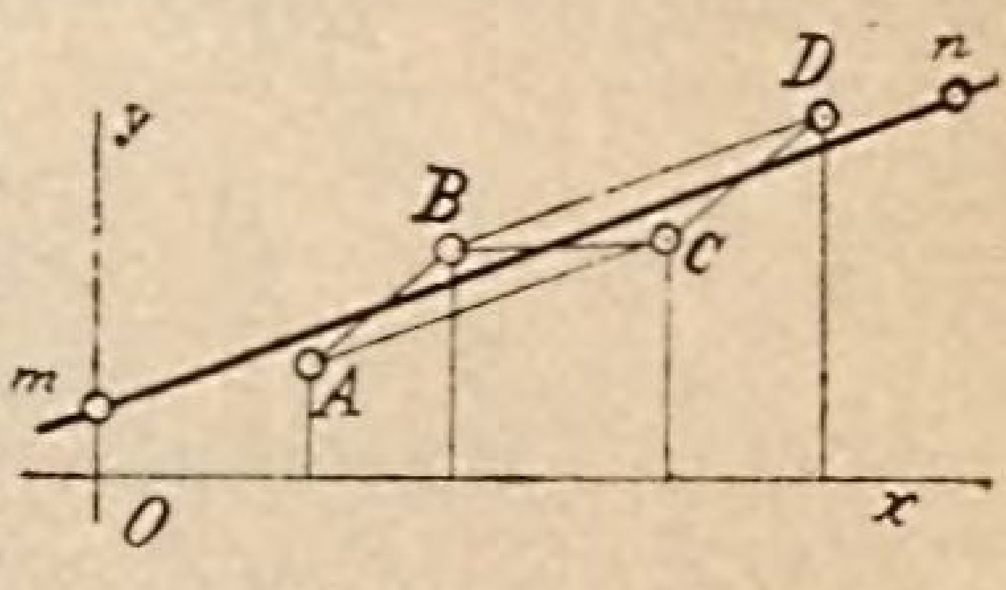
Wenn $b = 0$, also $y = ax$, so geht die Gerade durch den Anfangspunkt O der Achsen. Wenn $a = o$, so ist nach (1) $y = b$; es entsteht

dann eine Gerade, welche zu O x parallel geht und zwar im Abstand b von O aus.

Beisp. 1. Aus $y = 2x + 3$ folgt: $BO = 3$; $OA = -1{,}5$; $\tang \alpha = 2$.

Beisp. 2. Es seien in Gleichung (1) die Konstanten a und b zu bestimmen, wenn eine Reihe zusammen gehörender Werte von x und y durch Versuche ermittelt sind.

Man ziehe die rechtwinkligen Achsen O x, O y, trage mittelst zusammengehörender Werte von x, y Punkte A, B, C, D, . . ein, so sollten diese in einer geraden Linie liegen. Unter Benutzung der beiden ersten Paar Werte erhielte man die Gerade AB, des ersten und dritten Paares die Gerade AC, des zweiten und dritten Paares die Gerade BC, des zweiten und vierten die Gerade BD u. s. w. Welche Gerade ist nun die wahrscheinlich richtige? Man wird, um diese annähernd zu erhalten, eine Gerade ziehen, welche zwischen den Punkten A, B, C, . . hindurchgeht, welche also die Geraden AB, BC, CD . . möglichst in der Mitte schneidet.



Auf dieser merke man sich zwei möglichst auseinander gelegene Punkte m und n. Die Abscissen dieser Punkte seien 0 und 9, die Ordinaten 0,8 und 4,7, so ist $b = 0{,}8$ und a findet sich aus der Gleichung

$$4{,}7 = 9a + 0{,}8;\ a = \frac{4{,}7 - 0{,}8}{9} = 0{,}433\,..$$

mithin die gesuchte Gleichung der Geraden

$$y = 0{,}433\ a + 0{,}8.$$

Sollen die Punkte A, B, C, D, . . in einer Kurve liegen, so wird die Linie mn diese Kurve sein. Diese geht dann ebenso zwischen den Punkten A, B, C, . . hindurch, die einen auf der hohlen, die anderen auf der erhabenen Seite von ihr liegen lassend.

4. **Gleichung vom zweiten Grad mit zwei Variabeln.** Die allgemeine Form dieser Gleichung ist

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Die geometrische Darstellung dieser Gleichung gibt Kegelschnitte (S. 28) und zwar eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel, je nachdem die Größe $B^2 - 4AC$ gleich Null, negativ oder positiv wird. Diese allgemeine Gleichung vereinfacht sich durch die Verlegung der Koordinatenachsen.

5. **Parabel.** Diese Kurve ABH besteht aus zwei zur Achse BD symmetrischen Kurvenästen. Es sei $BD = x$ die Abscisse, $AD = y$ die Ordinate eines Parabelpunktes A. Man ziehe CE senkrecht zur Diagonale des Rechteckes BDAE und bezeichne CB mit 2p, so ergibt die Aehnlichkeit der Dreiecke CBE und DBE die Proportion $2p : y = y : x$, woraus die Gleichung

$$(1) \qquad y^2 = 2px$$

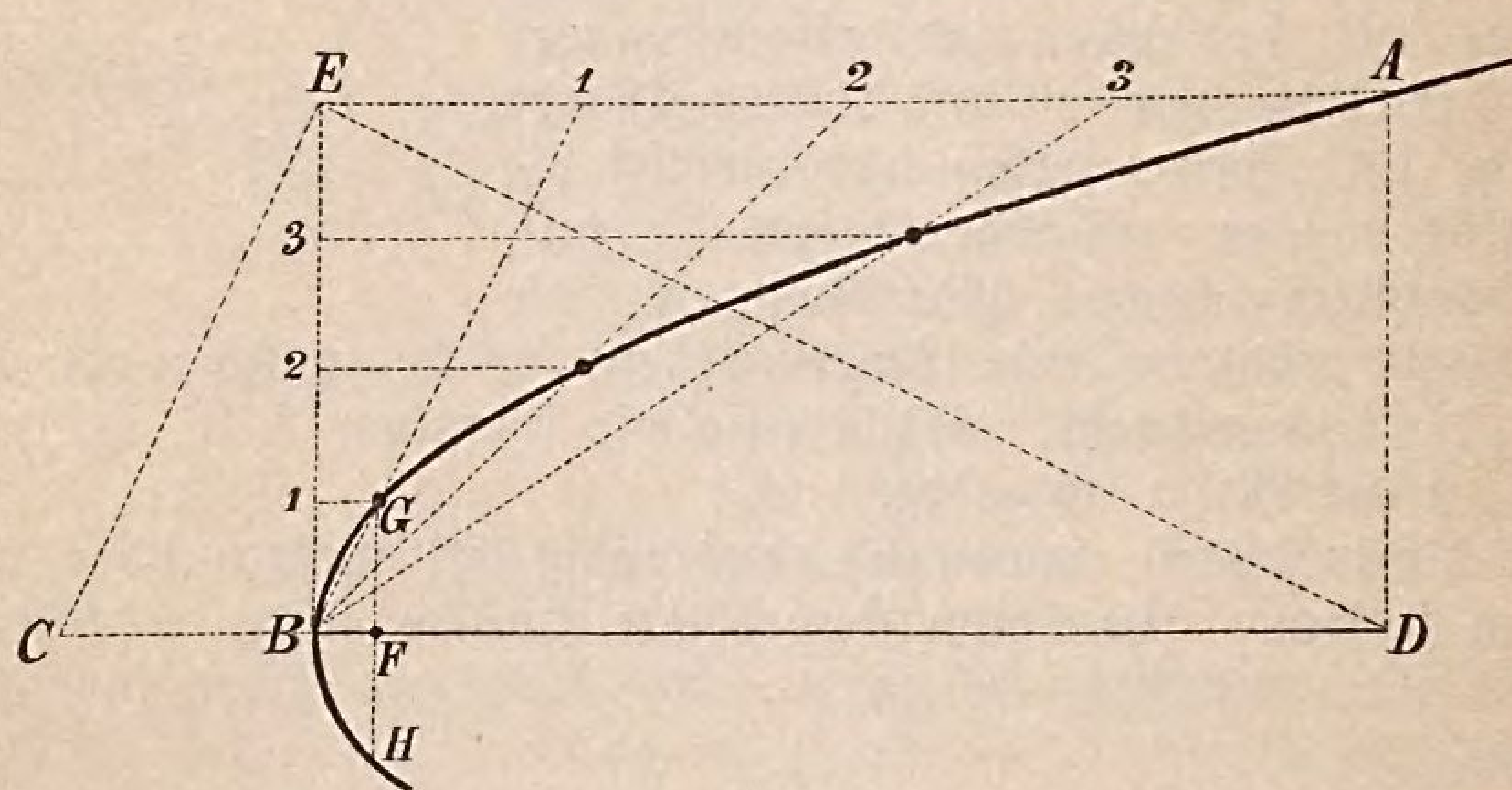
der Parabel folgt. Die Größe 2p ist konstant und heißt Parameter.

Es seien x_1 und y_1 die Koordinaten eines andern Parabelpunktes, so geht die Gleichung (1) über in $y_1^2 = 2px_1$; folglich durch Division in (1) die Proportion

$$(2) \qquad y^2 : y_1^2 = x : x_1$$

d. h. es verhalten sich die Abscissen wie die Quadrate der Ordinaten.

Man mache $BF = \frac{1}{4} CB$, so ist F der Brennpunkt der Parabel. Dreht man den Parabelast AB um die Achse BD herum, so beschreibt er eine parabolische Oberfläche. Wenn Lichtstrahlen auf einen parabolisch gekrümmten Hohlspiegel, parallel zur Achse, auffallen, so werden



diese Strahlen so vom Spiegel zurückgeworfen, daß sie sich im Brennpunkt schneiden.

Die Sehne GH, welche durch den Brennpunkt geht, ist = 2p; also die Ordinate des Brennpunktes das Doppelte der Abscisse BF derselben.

6. **Verzeichnung der Parabel**, wenn die Richtung der Achse, der Scheitel und ein weiterer Punkt der Parabel gegeben sind.

Ist B der Scheitel, BD die Richtung der Achse und A der gegebene Punkt; so errichte man über der Abscisse BD und der Ordinate AD das Parallelogramm BDAE, teile AE und EB in gleich viele je unter sich gleiche Teile, ziehe von B aus die Linien B 1, B 2, B 3, . . . und von den Teilungspunkten der Linie EB Parallellinien mit der Achse, so liegen die dadurch entstandenen Durchschnittspunkte in der Parabel.

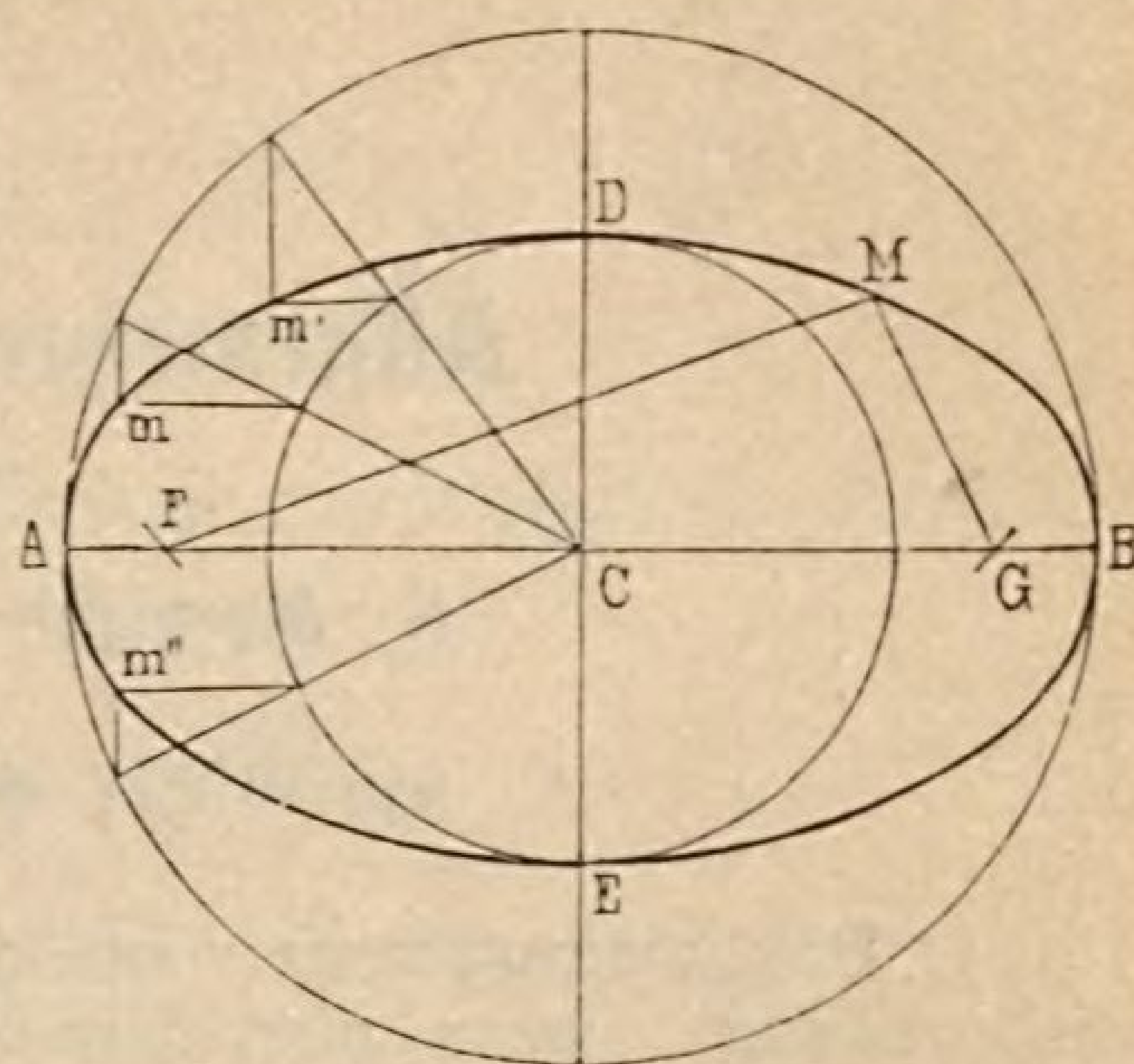
7. **Ellipse.** Es sei $AB = 2a$ die große und $DE = 2b$ die kleine Achse der Ellipse, x die Abscisse eines Ellipsenpunktes M, und y die zugehörende Ordinate: so heißt die Gleichung der Ellipse

Abscisse vom Scheitel A aus gezählt $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$;

Abscisse von der Mitte C aus gezählt $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$.

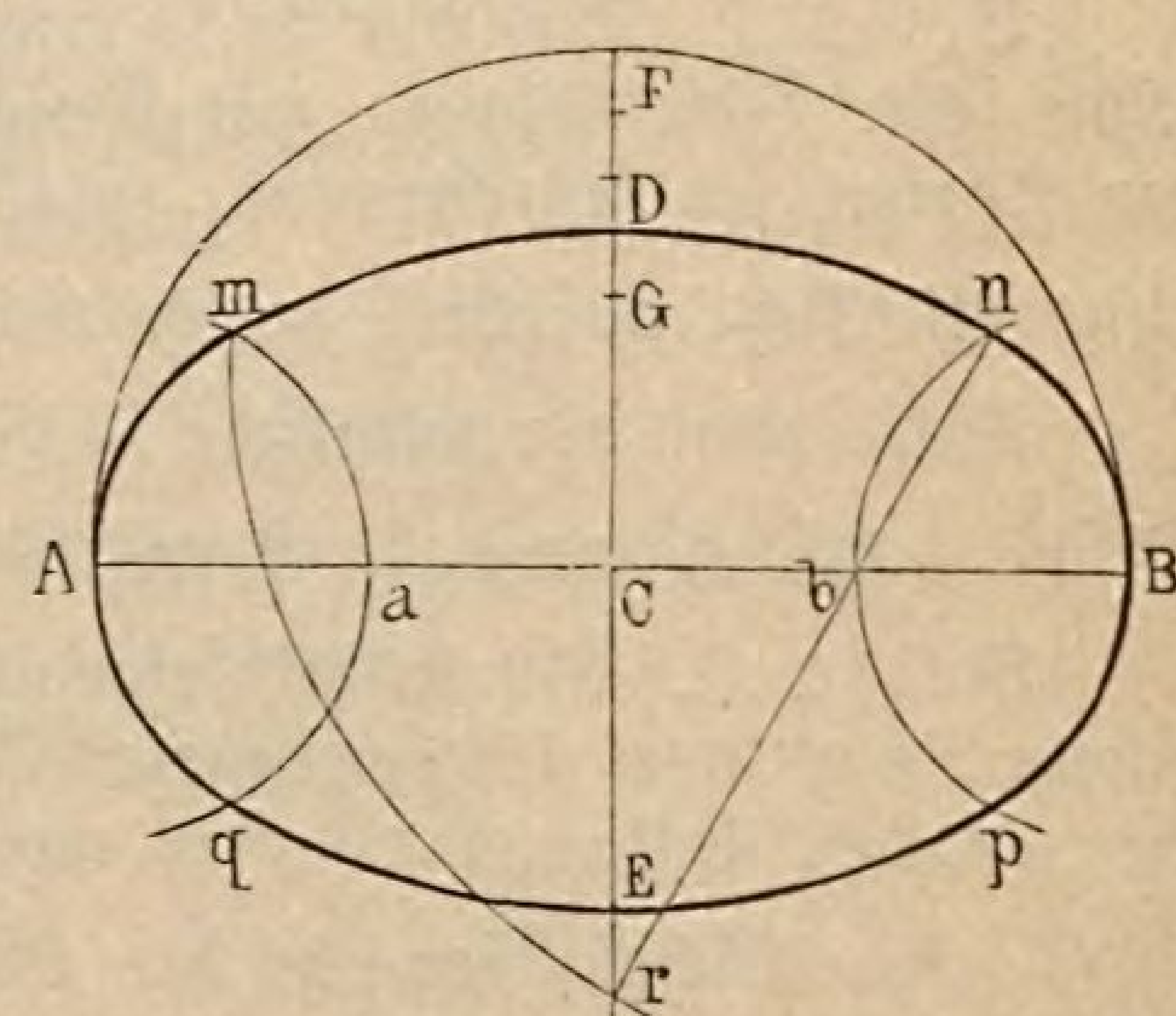
Wenn $b = a$, so wird die Ellipse zu einem Kreise mit dem Durchmesser $2a$. Geht dabei die Ellipsenordinate y über in die Kreisordinate Y, so entsteht die Proportion $y : Y = b : a$.

Man durchschneide von D oder E aus mit der Zirkelöffnung a die große Achse in F und G, so nennt man diese Durchschnittspunkte **Brennpunkte** der Ellipse. Wird eine Ellipse um ihre große Achse gedreht, so beschreibt sie ein **Ellipsoid**. Hat ein Hohlspiegel die Krümmung eines Ellipsoides und man stellt ein Licht in den einen Brennpunkt, so werden die Strahlen, welche den Spiegel treffen, nach dem andern Brennpunkt reflektiert und bringen daselbst wieder einen leuchtenden Punkt hervor. Der Abstand der Brennpunkte wird **Excentricität** genannt. Zwei Gerade, welche von den Brennpunkten nach irgend einem Punkte M der Ellipse führen, heißen **Leitstrahlen** und geben zusammen immer die große Achse.



8. **Verzeichnung der Ellipse,** wenn die große Achse AB und die kleine DE derselben gegeben sind. Es sei C (letzte Fig.) der Mittelpunkt, in welchem sich die Achsen rechtwinklig halbieren. Man ziehe von C aus Kreise mit den halben Achsen und lege durch C verschiedene Radien; von den daraus erhaltenen Punkten am äußern Kreise errichte man Parallelen zur kleinen Achse und von den korrespondierenden Punkten am innern Kreise Parallelen zur großen Achse, so sind die Begegnungspunkte m, m′, m″, . . . Punkte der Ellipse.

9. **Annähernde Konstruktion einer Ellipse durch Kreisbogen.** Es sei AB die große, DE die kleine Achse. Man beschreibe aus dem Mittelpunkt C mit CA den Bogen AF, teile DF in 3 gleiche Teile, mache DG gleich einem solchen Teil, beschreibe mit CG von A und B aus zwei Bogen, welche die große Achse in a, b schneiden, beschreibe von a, b aus zwei Bogen durch A und B, so entstehen die Schnittpunkte m, q, n, p; sodann beschreibe man aus n mit nm den Bogen mr, so ist r der Mittelpunkt für den Bogen mDn. Mit dem gleichen Radius ist der Bogen qEp zu zeichnen.



Allgemeine Mechanik.

---

6. Gewicht der Körper.

A. Specifisches Gewicht der Körper.

1. **Bestimmungsweise.** Das specifische Gewicht eines Körpers wird erhalten, wenn man sein absolutes Gewicht dividiert durch das Gewicht einer Wassermasse, welche gleichen Rauminhalt hat wie dieser Körper. Zu dieser Vergleichung nimmt man reines Wasser, das eine Temperatur von 4° nach Celsius hat.

Bei den gasförmigen Körpern wird gewöhnlich das Gewicht der atmosphärischen Luft, wenn dieselbe bei 0° C. einem Druck von 76 Centimeter Quecksilberhöhe ausgesetzt ist, als Einheit angenommen.

Beisp. 1. Ein Liter oder Kubikdecimeter Wasser wiegt 1000 Gramm; ein Stück Holz von gleichem Rauminhalt wäge 740 Gramm, so ist das specifische Gewicht dieses Holzes $\frac{740}{1000} = 0{,}74$.

Beisp. 2. Das Wasser in einer angefüllten Flasche habe 500 Gramm. Man fülle diese Flasche mit Fruchtkörnern und wäge sie; das Gewicht der Körner sei 350 Gramm, so ist das specifische Gewicht dieser Frucht, ohne Rücksicht auf die Zwischenräume $= \frac{350}{500} = 0{,}70$.

Füllt man die nämliche Flasche mit Oel und findet das Gewicht des Oeles = 460 Gramm, so ist das specifische Gewicht des Oeles $\frac{460}{500} = 0{,}92$.

Beisp. 3. Ein Kubikmeter atmosphärische Luft von 0° C. und unter einem Druck von 76 Centimeter Quecksilberhöhe wiegt 1,293 Kilogramm, ein gleiches Volumen Wasser wiegt 1000 Kilogramm; folglich ist

$$\text{specifisches Gewicht der Luft } \frac{1{,}293}{1000} = 0{,}001293 = \frac{1}{773}.$$

Beisp. 4. Bleibt ein Körper, wenn er ganz unter Wasser getaucht wird, an jeder Stelle in Ruhe, so ist sein absolutes Gewicht gleich dem Gewicht der ebenso großen Wassermasse, die er verdrängt. Folglich ist sein specifisches Gewicht = 1.

Beisp. 5. Ein Körper wäge in der Luft 400 Gramm und im Wasser, an einem Faden an eine Waage gehängt, 280 Gramm, so verliert er im Wasser 120 Gramm, d. h. das verdrängte Wasser wiegt 120 Gramm; folglich ist sein specifisches Gewicht $\frac{400}{120} = 3\frac{1}{3}$.

Beisp. 6. Ein Körper schwimme auf dem Wasser; man verbinde damit ein solches Stück Blei, daß er nun im Wasser untersinke. Hierbei sei:

das absolute Gewicht dieses Körpers . . . = 200 gr
das absolute Gewicht des Bleistückes . . . = 600 „
der Gewichtsverlust des Bleies im Wasser . = 54 „
der Gewichtsverlust beider Teile im Wasser . = 450 „
folglich derjenige des Körpers allein 450 — 54 = 396 „

also ist das specifische Gewicht des Körpers $\frac{200}{396}$ = 0,505.

2. Tabelle der specif. Gewichte fester und tropfbarflüssiger Körper.

Stoffe.	Specif. Gewicht. Gewicht von 1 Kubikdecimeter.	Stoffe.	Specif. Gewicht. Gewicht von 1 Kubikdecimeter.
Aether	0,73	Diamant . . .	3,50 bis 3,53
Ahornholz . . .	0,64 bis 0,75	Ebenholz . . .	0,80 „ 1,21
Alabaster . . .	2,64 „ 2,87	Eichenholz, lufttrock.	0,65 „ 0,95
Alaun	1,71 „ 1,75	Eis	0,92 „ 0,93
Alkohol, absolut .	0,795	Eiweiß	1,04
Aluminium . .	2,50 „ 2,67	Elfenbein . . .	1,83 „ 1,92
Amalgam, natürl.	13,76	Erde, Gartenerde .	1,36 „ 2,05
Anthracit . . .	1,34 „ 1,46	Erdpech	1,07 „ 1,16
Antimon . . .	6,70 „ 6,86	Erlenholz . . .	0,54 „ 0,68
Apfelbaumholz . .	0,67 „ 0,79	Eschenholz . . .	0,67 „ 0,84
Arsen	5,67	Feldspat	2,55 „ 2,75
Arsenik, weißer .	3,74	Fernambukholz .	1,01
Asbest	2,10 „ 2,80	Fette	0,92 „ 0,94
Asphalt	1,06 „ 1,16	Fichtenholz, trocken	0,43
Basalt	2,78 „ 3,10	Flußspat	3,09 „ 3,13
Bier	1,015 „ 1,034	Föhrenholz (Kiefer)	
Bimsstein . . .	0,91 „ 1,65	„ -kern, harzig	0,72
Birkenholz . . .	0,60 „ 0,79	„ -kern, trocken	0,62
Birnbaumholz . .	0,66 „ 0,73	„ -splint, trock.	0,40 „ 0,57
Blei	11,23 „ 11,45	Franzosenholz . .	1,33
Bleiglätte . . .	9,30 „ 9,50	Glas, Fensterglas .	2,53 „ 2,65
Bleiglanz . . .	7,40 „ 7,60	„ Flintglas .	3,20 „ 3,70
Borax	1,74	„ Krystallglas	2,89 „ 3,00
Brasilienholz . .	1,03	„ Spiegelglas	2,46
Braunkohle . . .	1,12 „ 1,35	Glimmer . . .	2,65 „ 2,93
Buchenholz . . .	0,75 „ 0,85	Glockenmetall . .	8,81
Buchsbaum, franz.	0,91	Gneis	2,39 „ 2,71
„ brasil.	1,03	Gold, gegossen .	19,24 „ 19,26
Butter	0,94	„ gehämmert .	19,34 „ 19,46
Calcium	1,58	Granit	2,64 „ 2,76
Campecheholz . .	0,91	Graphit, rein . .	2,09 „ 2,24
Cannelkohle . .	1,42	Gummi arab. . .	1,31 „ 1,45

Stoffe.	Specif. Gewicht. Gewicht von 1 Kubikdecimeter.	Stoffe.	Specif. Gewicht. Gewicht von 1 Kubikdecimeter.
Gußeisen, grau .	7,10	Mennige . . .	8,62 bis 9,14
„ weiß .	7,50	Menschlicher Körper	1,07 „ 1,11
Gyps	1,81 bis 2,96	Mergel	2,30 „ 2,60
„ gegoss., trock.	0,97	Messing, gegossen .	7,80 „ 8,60
Harz	1,05 „ 1,07	„ -draht . .	8,34 „ 8,73
Holz, fossiles . .	1,38	Milch	1,02 „ 1,04
Holzkohle, v. Föhren	0,33	Mohnöl	0,92
„ v. Buchen	0,51	Natrium . . .	0,97
Honig	1,45	Nickel, gegossen .	8,28
Hornblende . . .	2,92 „ 3,17	„ gestreckt .	8,67
Indigo	0,77	Olivenöl	0,92
Iridium, geschmolz.	18,68	Pappelholz . . .	0,35 „ 0,59
Kadmium . . .	8,60 „ 8,69	Pech	1,15
Käsestoff . . .	1,26	Petroleum . . .	0,75 „ 0,86
Kalium	0,86	Pflanzenfaser . .	1,48 „ 1,53
Kalk, gebrannt .	2,30 „ 3,18	Phosphor . . .	1,77 „ 1,83
Kalkmörtel . . .	1,64 „ 1,86	Platin, gegossen .	20,85 „ 21,53
Kalkstein . . .	2,46 „ 2,84	„ gezogen .	21,45 „ 22,06
Kanonenmetall .	8,44 „ 9,23	Pockholz (Guajak) .	1,33
Kartoffeln, gehäuft	0,83	Porphyr	2,61 „ 2,94
Kautschuk . . .	0,92 „ 0,99	Porzellan, Berlin. .	2,45 „ 2,61
Knochen von Ochsen	1,65 „ 1,99	„ chin. .	2,38
Kobalt, gegossen .	8,71	Porzellanerde . .	1,15
Kochsalz	2,08 „ 2,17	Quarz	2,56 „ 2,69
Korkholz	0,24	Quecksilber bei 0°	13,596
Kreide, weiß . .	2,25 „ 2,69	Repsöl	0,91
Kupfer, gegossen .	8,67 „ 8,85	Roggen, gehäuft .	0,69 „ 0,78
„ gehämmert	8,88 „ 8,95	Runkelrüben . .	1,02 „ 1,07
Lava	2,79 „ 2,82	Salpeter . . .	1,94 „ 2,00
Lindenholz . . .	0,55 „ 0,60	Salpetersäure . .	1,42
Luft, atm. bei 0° C.	0,001293187	Salzsäure . . .	1,24
und 76 cm Druck	$= \frac{1}{773}$	Sand, fein, trocken	1,40 „ 1,64
		„ grob . . .	1,37 „ 1,50
Magnesium . . .	1,74	Sandstein . . .	2,20 „ 2,60
Magneteisenstein .	5,09	Schiefer	2,64 „ 2,67
Mahagoniholz . .	0,56 bis 0,94	Schmiedeisen . .	7,70 „ 7,80
Mangan	8,01	Schwefel, rein . .	2,05
Marmor, carrar. .	2,71	Schwefelsäure . .	1,95
„ schles. weiß	2,65	Schweflige Säure .	1,49
Mauer, Bruchstein	2,30 „ 2,46	Schwerspat . . .	4,41 „ 4,68
Sandstein	2,05 „ 2,25	Silber, gegossen .	10,40 „ 10,47
Ziegelstein	1,41 „ 2,01	„ geschlagen	10,51 „ 10,62
Mehl von Weizen	0,50 „ 0,80	Silberglanz . . .	6,85 „ 7,20

Stoffe.	Specif. Gewicht. Gewicht von 1 Kubikdecimeter.	Stoffe.	Specif. Gewicht. Gewicht von 1 Kubikdecimeter.
Stahl, gehärtet .	7,82	Wasser, Meer- . .	1,026
„ ungehärtet	7,83	Wein, Burgunder .	0,992
„ Gußstahl .	7,83 bis 7,92	„ Cap- . . .	1,021
Steinkohle . . .	1,23 „ 1,36	„ Malaga . .	1,015
Steinsalz . . .	2,14 „ 2,41	„ Madeira .	1,038
Talg	0,97	„ Rhein- . .	0,99 bis 1,002
Talkerde	2,37	Weingeist (Alkohol)	0,795
Tannenholz, rotes	0,50	Weizen, gehäuft .	0,71 „ 0,81
„ weißes	0,55	Wismut, gegossen	9,82 „ 9,85
Terpentinöl . .	0,87	Ziegelstein . . .	1,41 „ 2,25
Thon, Töpfererde .	1,80 „ 2,63	Zink, gegossen . .	6,86 „ 7,21
Thran	0,92 „ 0,94	„ gehämmert .	7,19 „ 7,30
Ulmenholz . . .	0,57 „ 0,67	Zinn, engl. gegossen	7,29
Wachs	0,97	„ gehämmert .	7,47
Walrat	0,94	Zinnober . . .	8,06 „ 8,12
Wasser, rein . .	1,00	Zuckerkand . . .	1,61

3. Tabelle der specifischen Gewichte von Gasen.

Bei 0° Temperatur und unter 1 Atm. Druck; Dichte der Luft = 1.

Aether	2,586	Luft, atmosph. . . .	1,000
Aethylen (ölbild. Gas) .	0,971	Quecksilberdampf . .	6,980
Alkoholdampf . . .	1,617	Sauerstoffgas . . .	1,1065
Ammoniakgas . . .	0,596	Schwefelsauerstoffgas .	1,191
Chlorgas	2,470	Stickstoffgas . . .	0,9714
Grubengas (Sumpfgas)	0,555	Wasserstoffgas . . .	0,0693
Kohlenoxydgas . . .	0,968	Wasserdampf v. 100° C.	
Kohlensaures Gas . .	1,529	vgl. mit Luft von 100°	0,6407

B. Absolutes Gewicht der Körper.

1. **Gewichtsberechnung.** Es sei V das Volumen eines Körpers, γ (sprich gamma) das Gewicht der Kubikeinheit (Kubikmeter, Kubikdecimeter, Kubikfuß 2c.) desselben, so ist das Produkt γV das Gewicht des ganzen Körpers. Bezeichnet man dasselbe auch mit G, so wird

$$G = \gamma V.$$

Sind daher zwei dieser drei Größen bekannt, so kann die dritte gefunden werden.

Beisp. 1. Zu einer Transmission sei eine schmiedeiserne Welle von 9 cm Durchmesser und 12,5 m Länge nötig. Welches Gewicht wird sie haben?

Volumen der Welle . . $V = \frac{(0,09)^2}{4} \cdot 3,14 \cdot 12,5 = 0,0795$ kbm

Gewicht von 1 kbm Schmiedeisen (S. 46) . . $\gamma =$ 7800 kg

Folglich Gewicht der Welle $G = 7800 . 0,0795 =$ 620 „

2. Gewicht cylindrischer Eisenstangen, per 1 m Länge.

Spec. Gewicht 7,8.

Durchmesser.	Gewicht.	Durchmesser.	Gewicht.	Durchmesser.	Gewicht.	Durchmesser.	Gewicht.	Durchmesser.	Gewicht.
mm	kg	mm	kg	mm	kg	mm	kg	mm	kg
1	0,0061	37	8,387	73	32,646	109	72,784	145	128,80
2	0,0245	38	8,846	74	33,546	110	74,126	146	130,58
3	0,0551	39	9,318	75	34,459	111	75,479	147	132,38
4	0,0980	40	9,802	76	35,384	112	76,846	148	134,19
5	0,1531	41	10,298	77	36,232	113	78,124	149	136,01
6	0,2205	42	10,806	78	37,271	114	79,615	150	137,84
7	0,3002	43	11,327	79	38,233	115	81,018	151	139,68
8	0,3921	44	11,860	80	39,297	116	82,433	152	141,53
9	0,4962	45	12,405	81	40,193	117	83,860	153	143,41
10	0,6126	46	12,963	82	41,193	118	85,260	154	145,28
11	0,7413	47	13,533	83	42,203	119	86,752	155	147,18
12	0,8822	48	14,115	84	43,226	120	88,216	156	149,08
13	1,0353	49	14,709	85	44,261	121	89,692	157	150,92
14	1,2007	50	15,315	86	45,308	122	91,181	158	152,93
15	1,3784	51	15,934	87	46,368	123	92,682	159	154,87
16	1,5683	52	16,565	88	47,441	124	94,395	160	156,83
17	1,7704	53	17,208	89	48,525	125	95,720	161	158,78
18	1,9848	54	17,864	90	49,621	126	97,258	162	160,77
19	2,2115	55	18,351	91	50,730	127	98,808	163	162,76
20	2,4504	56	19,211	92	51,853	128	100,37	164	164,77
21	2,7016	57	19,904	93	52,935	129	101,95	165	166,78
22	2,9650	58	20,608	94	54,130	130	103,53	166	168,82
23	3,2407	59	21,325	95	55,288	131	105,13	167	170,85
24	3,5286	60	22,054	96	56,458	132	106,74	168	172,90
25	3,8288	61	22,795	97	57,640	133	108,36	169	174,97
26	4,1412	62	23,549	98	58,835	134	110,00	170	177,04
27	4,4659	63	24,314	99	60,042	135	111,65	171	179,13
28	4,8028	64	25,093	100	61,261	136	113,31	172	181,23
29	5,1520	65	25,883	101	62,492	137	114,98	173	183,35
30	5,5135	66	26,685	102	63,736	138	116,66	174	185,55
31	5,8872	67	27,500	103	64,992	139	118,36	175	187,61
32	6,2731	68	28,327	104	66,260	140	120,07	176	189,76
33	6,6712	69	29,166	105	67,540	141	121,79	177	191,92
34	7,0818	70	30,018	106	68,833	142	123,53	178	194,10
35	7,5045	71	30,882	107	70,138	143	125,25	179	196,28
36	7,9394	72	31,756	108	71,455	144	127,03	180	198,48

Beisp. 2. Eine massive Kugel von Gußeisen habe 100 kg Gewicht; wie groß ist ihr Durchmesser?

Gewicht von 1 kbm Gußeisen, angenommen $\gamma = 7200$ kg
Folglich Volumen der Kugel . $V = 100 : 7200 = 0{,}1389$ kbm

Daher nach der Formel (S. 32) . . . . . $d = \sqrt[3]{\frac{6\,V}{\pi}}$

Durchmesser der Kugel $\sqrt[3]{\frac{6\,.\,0{,}1389}{3{,}1416}} = \sqrt[3]{0{,}2653} = 0{,}298$ m.

Die vorstehende Tabelle kann auch benützt werden, um das Gewicht eines hohlen Cylinders zu bestimmen. Zu diesem Zwecke zieht man das Gewicht des Cylinders mit dem innern Durchmesser ab vom Gewicht des Cylinders mit dem äußern Durchmesser.

Die Durchmesser sind in Millimetern angegeben; man kann sie aber auch für Centimeter nehmen; dann wird das Gewicht 10 . 10 oder 100mal größer sein.

Beisp. 1. Es sei bei einer gezogenen schmiedeisernen Röhre der äußere Durchmesser 90, der innere 82 mm; so wird per 1 m Länge:
Gewicht für 90 mm Durchmesser (S. 48) . . . = 49,621 kg
Gewicht für 82 mm Durchmesser . . . . = 41,193 „
folglich Gewicht einer Röhre von 4 mm Wanddicke = 8,428 „

Beisp. 2. Welches Gewicht hat eine massive schmiedeiserne Welle von 28,5 cm Durchmesser bei 1 m Länge?
Es ist das Gewicht für 29 cm Durchmesser (S. 48) = 515,20 kg
und dasselbe für 28 cm Durchmesser . . . . . = 480,28 „
Folglich dasjenige für 28,5 (als Mittel aus diesen beiden Werten) annähernd . . . . = 497,74 „

3. Gewicht gewalzter Metallplatten, per 1 qm Fläche.

Blechdicke.	Eisen.	Kupfer.	Blei.	Zink.	Zinn.
mm	kg	kg	kg	kg	kg
1	7,788	8,788	11,352	6,861	7,300
2	15,576	17,576	22,704	13,722	14,600
3	23,364	26,364	34,056	20,583	21,900
4	31,152	35,152	45,408	27,444	29,200
5	38,940	43,940	56,760	34,305	36,500
6	46,728	52,728	68,112	41,166	43,800
7	54,516	61,516	79,464	48,027	51,100
8	62,304	70,304	90,816	54,888	58,400
9	70,092	79,092	102,168	61,749	65,700
10	77,880	87,880	113,520	68,610	73,000

Beisp. Was wiegt 1 qm Kupferblech von 1,1 mm Dicke?
Gewicht bei 1 mm Dicke = 8,788; bei 0,1 mm Dicke = 0,879 kg
Folglich Gewicht bei 1,1 mm Dicke (als Summe) = 9,667 „

4. Gewicht gußeiserner Kugeln.

Specifisches Gewicht = 7,2.

Durchmesser.	Gewicht.	Durchmesser.	Gewicht.	Durchmesser.	Gewicht.	Durchmesser.	Gewicht.
mm	kg	mm	kg	mm	kg	mm	kg
50	0,471	110	5,038	170	18,52	230	45,87
55	0,627	115	5,734	175	20,32	235	48,92
60	0,814	120	6,515	180	21,99	240	52,12
65	1,037	125	7,363	185	23,87	245	55,44
70	1,293	130	8,298	190	25,95	250	58,91
75	1,590	135	9,276	195	28,01	255	62,51
80	1,930	140	10,345	200	30,16	260	66,39
85	2,351	145	11,493	205	32,48	265	70,16
90	2,748	150	12,722	210	34,91	270	74,21
95	3,243	155	14,038	215	37,47	275	78,40
100	3,770	160	15,442	220	40,30	280	82,76
105	4,364	165	16,935	225	42,95	285	87,57

5. Gewicht eines Gußstückes.

Berechnet aus dem Gewicht seines Modelles.

Wenn das Modell aus:	Wenn der Abguß gemacht ist aus:					
	Gußeisen.	Messing.	Rotguß.	Bronze.	Glockenmetall.	Zink.
Tannenholz . . .	14,0	15,8	16,7	16,3	17,1	13,5
Eichenholz	9,0	10,1	10,4	10,3	10,9	8,6
Buchenholz . . .	9,7	10,9	11,4	11,3	11,9	9,4
Lindenholz . . .	13,4	15,1	15,7	15,5	16,3	12,9
Birnbaumholz . .	10,2	11,5	11,9	11,8	12,4	9,8
Birkenholz	10,6	11,9	12,3	12,2	12,9	10,2
Erlenholz	12,8	14,3	14,9	14,7	15,5	12,2
Mahagoniholz . .	11,7	13,2	13,7	13,5	14,2	11,2
Messing	0,84	0,95	0,99	0,98	1,00	0,81
Zink	1,00	1,13	1,17	1,16	1,22	0,96
Zinn (mit 1/4 à 1/3 Blei)	0,89	1,00	1,03	1,03	1,12	0,85
Blei oder Hartblei .	0,64	0,72	0,74	0,74	0,78	0,61
Gußeisen	0,97	1,09	1,13	1,12	1,18	0,93

Beisp. Ein gußeisernes Gestell, dessen Modell aus Lindenholz 65 kg wiegt, hat demnach ein Gewicht von cirka 13,4 . 65 = 871 kg.

7. Kräfte, ihre Zusammensetzung und Zerlegung.

A. Ueber Kräfte im allgemeinen.

1. An den Kräften unterscheidet man die Größe (Intensität), die Richtung und den Angriffspunkt. Kräfte werden durch Gewichte gemessen und in Zeichnungen durch Linien dargestellt, deren Richtung und Länge die Richtung und Größe der Kräfte angeben.

2. Der Angriffspunkt einer Kraft kann in ihrer Richtung verlegt werden, wenn der neue Angriffspunkt mit dem frühern starr verbunden wird.

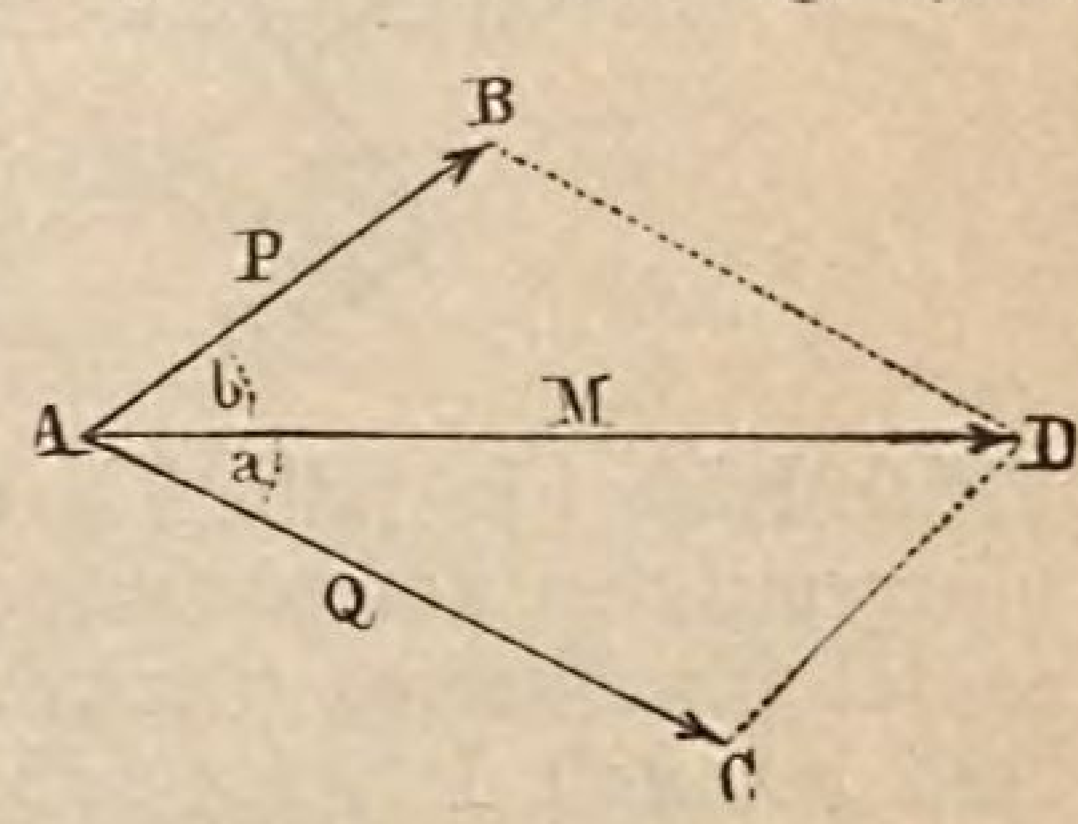
3. Wirkt eine Kraft auf einen Körper, so bildet sich in diesem ein Widerstand, der gleich und entgegengesetzt der Kraft ist. Daher sagt man: Aktion gleich Reaktion.

4. Wirken zwei oder mehr Kräfte auf einen Körper, so gibt es in gewissen Fällen eine einzige Kraft, welche jene Kräfte zu ersetzen vermag. Diese eine Kraft heißt Mittelkraft (Resultante), jene heißen Seitenkräfte (Komponenten).

B. Kräfte mit demselben Angriffspunkt.

1. **Kräfte in gleicher Richtung.** Wirken zwei Kräfte auf einen Punkt nach gleicher Richtung, so ist ihre Mittelkraft gleich der Summe beider Kräfte; wirken diese nach entgegengesetzter Richtung, so ist ihre Mittelkraft gleich dem Unterschied dieser Kräfte.

2. **Zwei Kräfte mit verschiedener Richtung.** Es seien $AB = P$ und $AC = Q$ zwei Kräfte, welche auf einen Punkt wirken. Zeichnet man nun das Parallelogramm ABDC, so stellt die Diagonale $AD = M$ die Mittelkraft aus den Seitenkräften P und Q dar. Die Figur heißt das Parallelogramm der Kräfte. Durch diese Figur erhält man also die Größe der Kraft M, welche die andere ersetzt und ihre Richtung, d. h. die Winkel a und b, welche sie mit den Seitenkräften bildet.

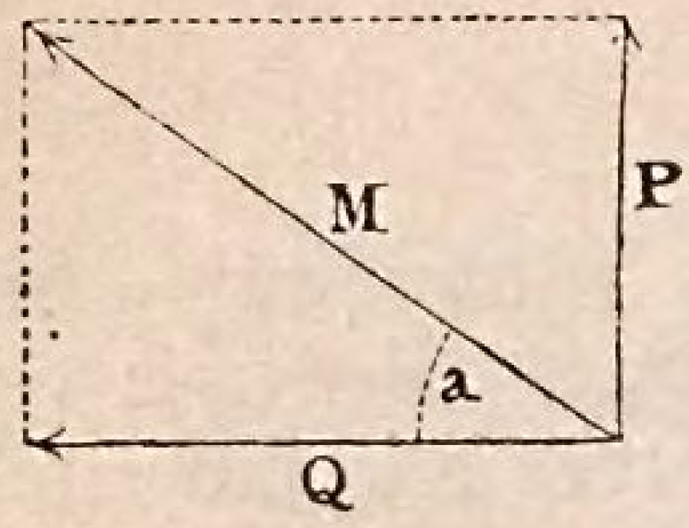


Bringt man in A eine Kraft an, welche gleich und entgegengesetzt ist der Diagonale M, so halten sich diese Kraft und die Kräfte P und Q das Gleichgewicht.

Durch das Parallelogramm der Kräfte kann eine Kraft AD in zwei Seitenkräfte AB und AC zerlegt werden.

Trägt man die gegebenen Kräfte in einem bestimmten Maßstab auf, so erhält man auch die gesuchten in demselben Maßstab. Es seien z. B. $P = 16$ kg, $Q = 23$ kg. Man stelle nun je 1 kg durch 1 mm dar, so findet man $AD = 30$ mm, d. h. Kraft $M = 30$ kg.

Durch Rechnung ist der Zusammenhang zwischen den Kräften und beliebigen Winkeln gegeben durch die Formeln (erste Fig.)



$$P : Q = \sin a : \sin b,$$
$$P : M = \sin a : \sin (a + b),$$
$$M = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2 P Q \cos (a + b)}$$

und, wenn P und Q rechtwinklig sind, durch

$$P = M \sin a, \quad Q = M \cos a,$$
$$\frac{P}{Q} = \operatorname{tang} a, \quad M = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

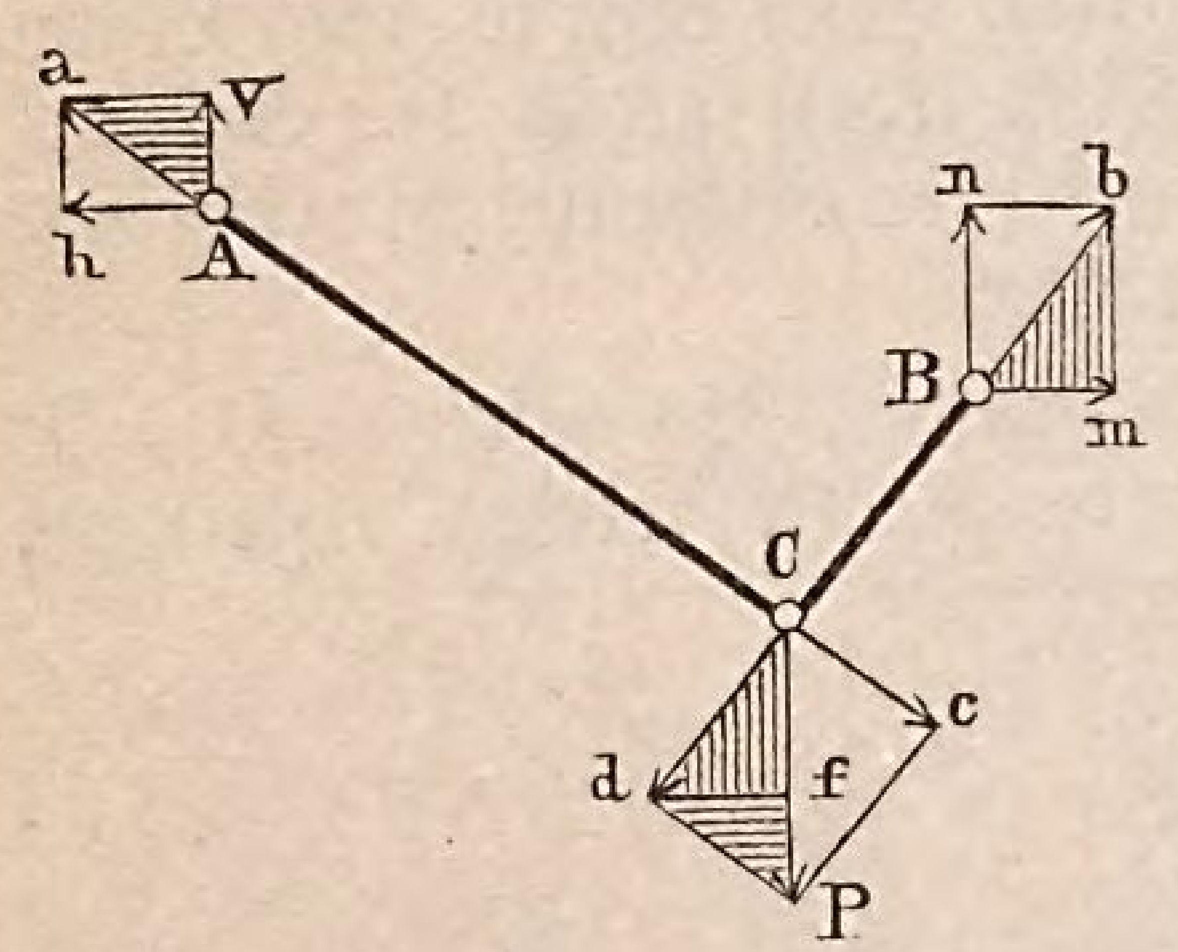
Beisp. 1. Ein Schiff werde durch eine Kraft M in einem Kanal fortgezogen; wenn die Richtung der Zugkraft M mit der Längenrichtung des Kanals einen Winkel $a = 20^0$ bildet, mit welcher Kraft Q könnte dieses Schiff in der Richtung seiner Bewegung fortgezogen werden und mit welcher Kraft P wird es gegen das Ufer gedrängt?

Kraft in der Richtung der Bewegung $Q = M \cos 20^0 = 0{,}9397\ M$,
Kraft, senkrecht gegen das Ufer . . $P = M \sin 20^0 = 0{,}3420\ M$,

d. h. die erstere ist etwa 94, die letztere 34 Prozent der Zugkraft.

Beisp. 2. Ein Seil sei in A und B aufgehängt und im Knoten C mit einem Gewicht P belastet. Man soll die Spannung der Seilstücke, sowie die Kräfte, welche sich in den Aufhängepunkten geltend machen, bestimmen.

Man mache die Vertikale CP = P, verlängere die Richtung der Seilstücke, diese geradlinig gedacht, über C hinaus, konstruiere das Parallelogramm CcPd, so wird das Seil links gespannt mit der Kraft Cc, das rechts mit Cd. Man verlängere die Seilrichtungen über die Aufhängepunkte hinaus, mache Aa = Cc, Bb = Cd, so ist Aa der Widerstand der Stütze links, Bb jener der Stütze rechts. Denn die Spannung pflanzt sich fort von C nach A und von C nach b. Man zerlege diese Widerstände durch Parallelogramme in horizontale und vertikale Seitenkräfte, so sind Ah und Bm die horizontalen und Av und Bn die vertikalen Komponenten. Man ziehe df horizontal, so sind die horizontal schraffierten Dreiecke kongruent, ebenso die vertikal schraffierten. Von der Last P trägt daher die Stütze links den Teil Pf = Av, und von der Stütze rechts den Teil Cf = Bn. Die horizontalen Kräfte Ah und Bm sind gleich, weil jede von ihnen gleich ist df.



Wäre eine der Stützen, z. B. B, selbst wieder ein Knoten, so käme für das dritte Seilstück das gleiche Verfahren in Anwendung.

3. **Drei oder mehr Kräfte**, welche auf einen Punkt wirken, sei es, daß die Kräfte in einer Ebene liegen oder nicht, werden zusammengesetzt, indem man zuerst die Mittelkraft von zweien sucht, dann diese Mittelkraft und die dritte zusammensetzt, und so fortfährt, bis die Mittelkraft gefunden ist.

4. **Parallelepiped der Kräfte.** Wirken drei Kräfte, welche nicht in einer Ebene liegen, auf einen Punkt, so denke man sich diese Kräfte als drei Seitenkanten eines Parallelepipeds, welche in einen Punkt (den Angriffspunkt) zusammenlaufen. Die Diagonale, welche von diesem Punkte aus nach dem gegenüberliegenden Eckpunkt des Körpers geht, ist die Mittelkraft jener drei Kräfte.

Beisp. Ein Gestell bestehe aus drei Stützen, welche in einen Punkt zusammenlaufen und unter sich gleiche Winkel bilden (gleichseitiges Dreibein). Am Vereinigungspunkt hänge eine Last M so, daß jede Stütze mit der vertikalen Richtung der Last einen Winkel von 40° bildet. Wie groß ist der Druck auf jede Stütze?

Es zerlegt sich M in drei gleiche Seitenkräfte, wovon jede gleich

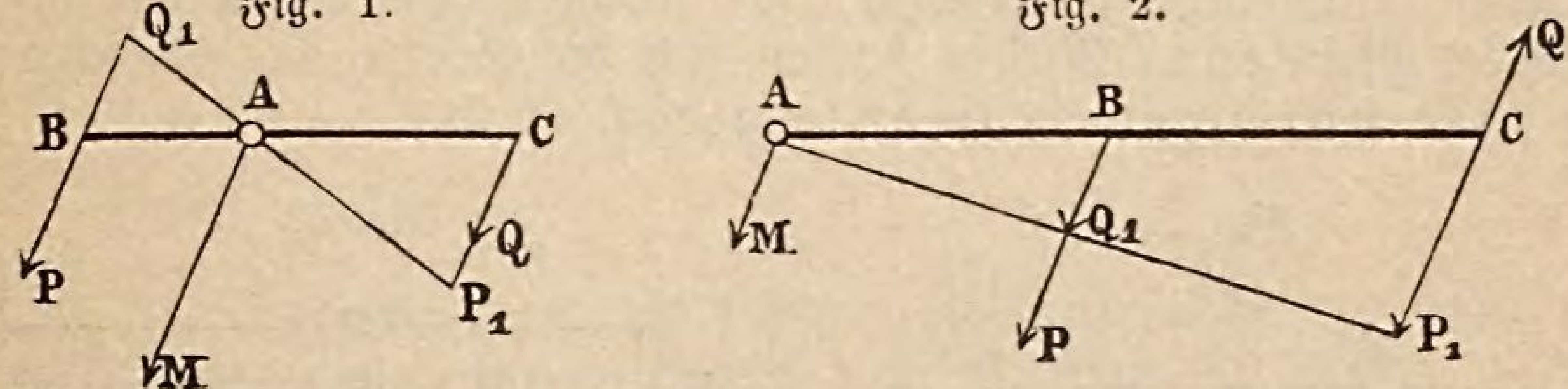
$$\frac{M}{3 \cos 40} = 0{,}435\ M.$$

Daher ist der Druck auf jede 43,5 Prozent der Last M.

C. Parallele Kräfte.

1. **Zwei parallele Kräfte.** Diese Kräfte seien P und Q, ihre auf einer Stange liegenden Angriffspunkte B und C. Ihre Mittelkraft ist parallel zu den Seitenkräften und gleich der Summe derselben, wenn die Kräfte (Fig. 1) auf derselben Seite, gleich der Differenz, wenn sie (Fig. 2) nach entgegengesetzter Seite wirken. Man verbinde die Angriffspunkte B und C durch eine gerade Linie und denke sich den Angriffspunkt A der Mittelkraft AM auf dieser Geraden. Er wird näher der größern Seitenkraft liegen und zwar im ersten Fall zwischen B und C, im zweiten in der Verlängerung von BC, auf Seite der größern Kraft.

Fig. 1. Fig. 2.



Man findet den Punkt A, wenn man beide Seitenkräfte in der Zeichnung vertauscht und zudem die eine derselben nach entgegengesetzter Seite aufträgt, also wenn man BP nach CP_1 und CQ nach BQ_1 bringt und hierauf die Punkte P_1 und Q_1 geradlinig verbindet. Der Durchschnitt A dieser Geraden mit der Stangenrichtung BC ist der gesuchte Angriffspunkt der Mittelkraft AM. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ACP_1 und ABQ_1 folgt die Proportion

$$P : Q = AC : AB$$

d. h. es verhalten sich die Seitenkräfte umgekehrt wie die Stücke auf der Stange, welche vom Angriffspunkt der Mittelkraft nach den Angriffspunkten der Seitenkräfte reichen.

Bringt man im Punkte A eine Kraft an, welche gleich und entgegengesetzt ist der Resultante, so halten sich diese Kraft und die Seiten-

kräfte P und Q das Gleichgewicht. — Legt man statt dessen durch A eine feste Drehachse, senkrecht zur Ebene der Seitenkräfte, so halten sich P und Q das Gleichgewicht.

Wird die Gerade BC senkrecht auf die Kräfte genommen, so entsteht aus Fig. 1 ein zwei-, aus Fig. 2 ein einseitiger *Hebel* (§ 8).

2. **Drei oder mehr parallele Kräfte**, welche auf einen Körper wirken, mögen sie in einer Ebene liegen oder nicht, werden zusammengesetzt, indem man zuerst die Mittelkraft von zweien bestimmt, hierauf diese mit einer dritten Kraft zusammensetzt u. s. w. Der Angriffspunkt der Resultante heißt auch *Mittelpunkt* der parallelen Kräfte. (Anwendung auf die Bestimmung des Schwerpunktes.)

8. Mathematischer Hebel.

Der Hebel ist ein Körper, der sich um eine feste gerade Linie drehen kann. Wirken Kräfte am Hebel und erfolgt keine Drehung, so halten sich die Kräfte das Gleichgewicht. Kommt das Gewicht des Hebels nicht in Betracht, so entsteht der mathematische Hebel.

1. **Gerader Hebel mit zwei Kräften.** Es seien P, Q die Kräfte, welche am Hebel wirken, senkrecht zur Hebelrichtung und in einer Ebene, welche senkrecht zur Drehachse A steht; ferner p, q die ihnen entsprechenden Hebelsarme, d. h. die Abstände der Drehachse von den Kräften; so besteht (s. o.) Gleichgewicht, *wenn sich die Kräfte umgekehrt verhalten wie die Hebelsarme*, also wenn

$$P : Q = q : p.$$

Bei einer Proportion ist das Produkt der äußern Glieder gleich dem Produkt der innern, also wird hier $Pp = Qq$. Das Produkt aus einer Kraft und dem Hebelsarm, an welchem die Kraft wirkt, heißt *statisches Moment*. Mithin halten sich die Kräfte das Gleichgewicht, *wenn ihre statischen Momente gleich sind*.

Fig. 1.

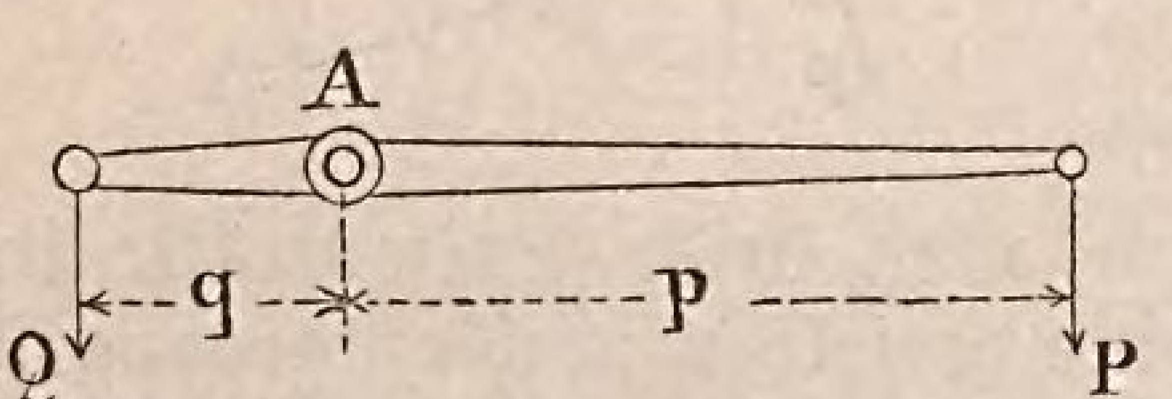
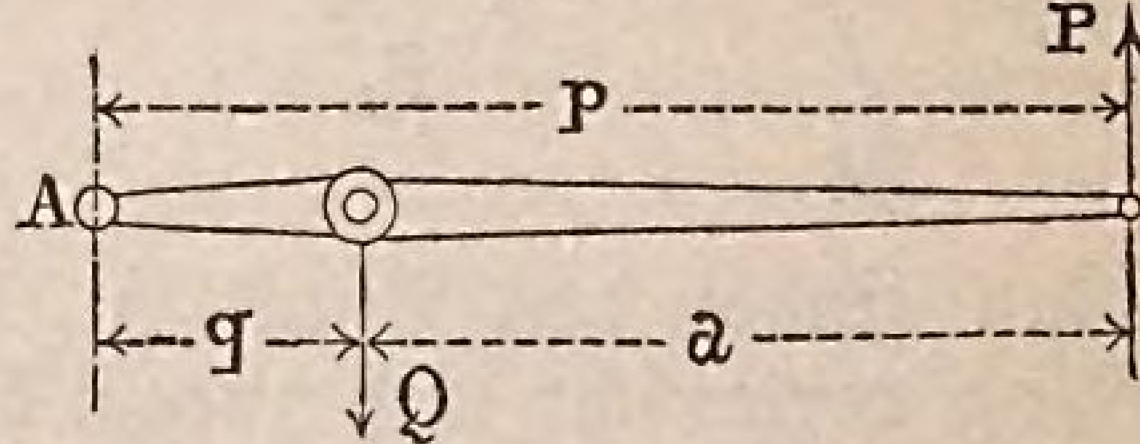


Fig. 2.



Der Druck auf die Drehachse ist bei den hier verzeichneten Anordnungen: bei der ersten, wo die Kräfte auf derselben Seite des Hebels liegen, gleich der Summe $P + Q$ der Kräfte; bei der zweiten, wo die Kräfte auf entgegengesetzter Seite liegen, gleich der Differenz $Q - P$ der Kräfte.

Beisp. 1. Wenn der Hebelsarm p 4mal größer ist als der Hebelsarm q, so ist die Kraft P am längern Arm nur $^1/_4$ von Q.

Wäre dagegen die Kraft P 3mal in der Kraft Q enthalten, so müßte für das Gleichgewicht der Arm q 3mal im Arm p enthalten sein.

Ist ein Hebel verzeichnet, so sehe man nach, wie oft der kürzere Arm im längern enthalten ist; ebenso oft ist die Kraft am längern Arm enthalten in der Kraft am kürzern Arm.

Beisp. 2. Wenn die Kraft Q = 100 kg und ihr Hebelsarm q = 0,6 m beträgt, wie groß muß die Kraft P sein, welche ihr an einem 1,5 m langen Hebelsarm das Gleichgewicht hält?

Es verhält sich hier $P : 100 = 0{,}6 : 1{,}5$; folglich

$$\text{Kraft } P = \frac{100 \cdot 0{,}6}{1{,}5} = 40 \text{ kg}.$$

2. **Kräftepaar.** Es sei (Fig. 2) der Abstand der Kräfte = a, so wird die Bedingung des Gleichgewichtes $Qq = P(a + q)$, woraus folgt

$$q = a \frac{P}{Q - P}.$$

Wenn nun hierin $P = Q$, so wird q unendlich groß. Eine unendlich entfernt gelegene Drehachse ist aber unmöglich. Daher halten sich zwei parallele Kräfte, welche gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet sind, nie das Gleichgewicht. Sie bilden ein Kräftepaar, dessen statisches Moment immer = Pa ist, wo auch die Drehachse, senkrecht zur Ebene der Kräfte, angenommen wird.

3. **Winkelhebel mit zwei Kräften.** Wirken die Kräfte P und Q, wie in Fig. 3, senkrecht auf die Stangen AC, AB, so sind diese

Fig. 3.

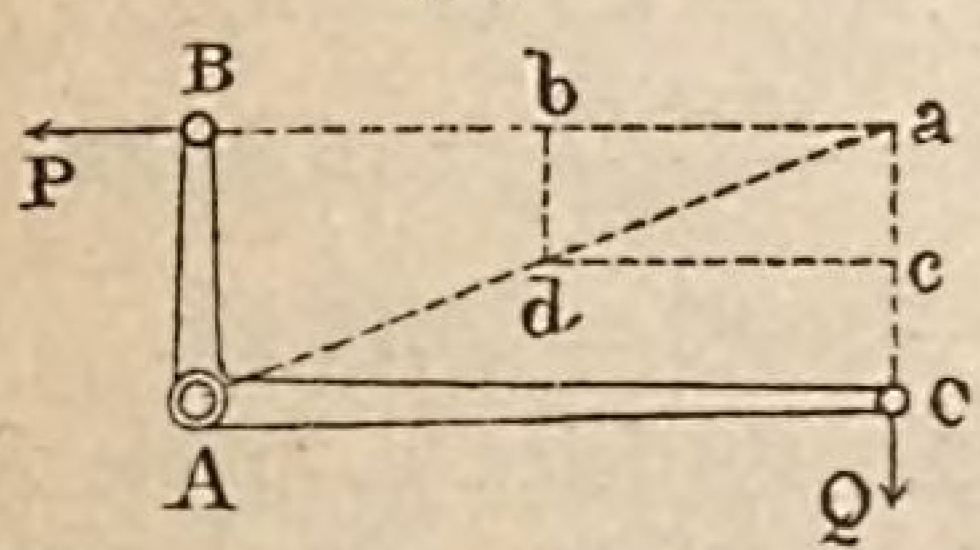
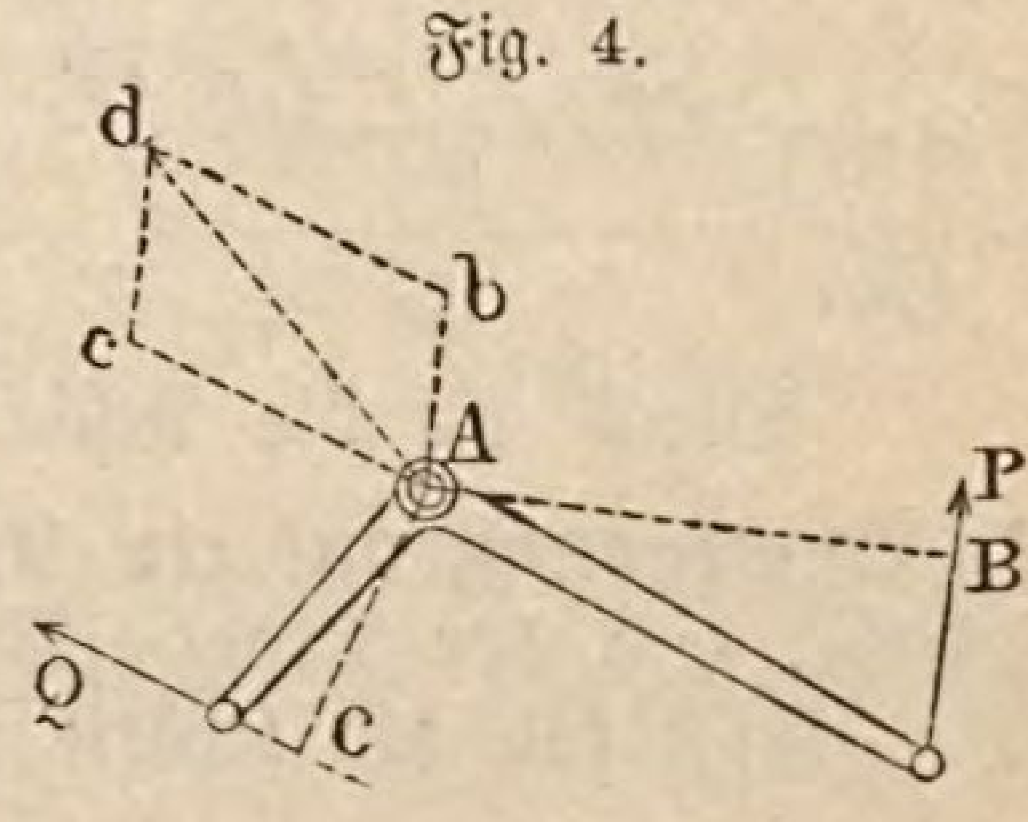


Fig. 4.



Stangen als Hebelsarme zu betrachten. Ist dies nicht der Fall, wie in Fig. 4, so ziehe man AB senkrecht auf die Richtung von P und AC senkrecht auf die Richtung von Q, und betrachte diese Senkrechten als Hebelsarme, alsdann ist für das Gleichgewicht, wie oben:

$$P \cdot AB = Q \cdot AC.$$

Der Druck auf die Drehachse kann auf eine der beiden folgenden Arten erhalten werden:

Fig. 3. Man verlängere die Richtungen der Kräfte P und Q, bis sie sich in a schneiden, mache ab = P und ac = Q, beschreibe über ab und ac das Parallelogramm abdc, so stellt die Diagonale ad den Druck auf die Achse dar. Die Richtung dieser Diagonale muß durch die Achse A gehen.

Fig. 4. Man ziehe von der Drehachse aus Ac parallel zur Kraft Q und Ab parallel zur Kraft P, mache Ac = Q, Ab = P, vollende

das Parallelogramm Abdc, so ist die Diagonale Ad der Druck auf die Achse.

4. **Hebel mit mehr als zwei Kräften.** Angenommen, es wirken die Kräfte Q, Q' nach der einen und P, P', P'' nach der entgegengesetzten Richtung; ferner seien ihre Hebelsarme beziehungsweise q, q'; p, p', p''; so ist Gleichgewicht, wenn

$$Qq + Q'q' = Pp + P'p' + P''p''$$

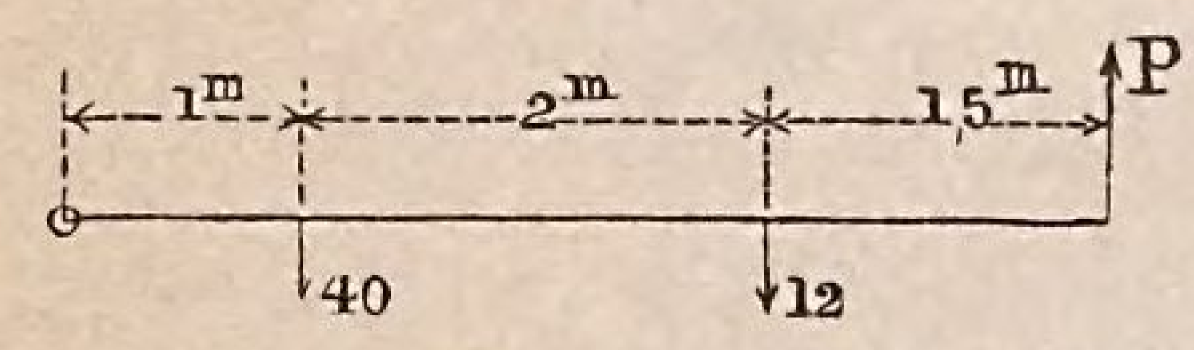
d. h. wenn die Summe der statischen Momente, welche nach der einen Seite Drehung anstreben, gleich ist der Summe der statischen Momente, welche nach der entgegengesetzten Seite wirken. Von den Größen, welche in der Gleichung vorkommen, kann immer eine berechnet werden, wenn die übrigen bekannt sind.

Der Druck auf die Achse wird erhalten, wenn man sämtliche Kräfte mit gleicher Größe und Richtung nach der Achse verlegt und sie hier in eine Mittelkraft zusammensetzt. Diese Mittelkraft ist der Druck auf die Achse.

Beisp. An dem Hebel, welcher in folgender Figur dargestellt ist, soll die Kraft P und der Druck auf die Achse bestimmt werden.

Den Kräften . . .	40	12	P
entsprechen die Arme .	1	3	4,5
die statischen Momente	1 . 40	3 . 12	4,5 P.

Folglich erhält man für das Gleichgewicht

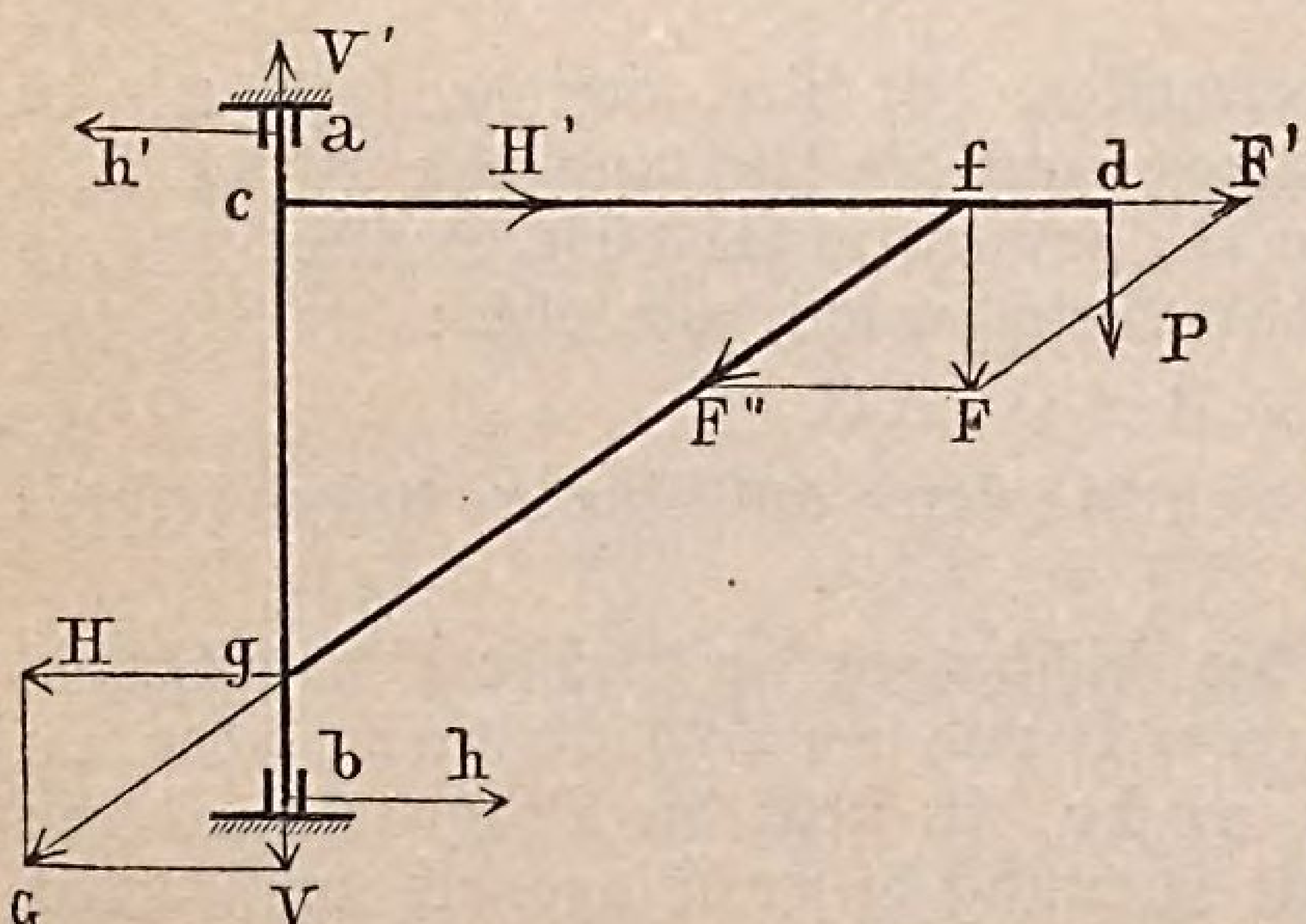


$$1 . 40 + 3 . 12 = 4,5 \text{ P}$$

$$\text{P} = \frac{40 + 36}{4,5} = 16,89 \text{ kg.}$$

Druck auf die Achse $40 + 12 - 16,89 = 35,11$ kg.

5. **Anwendung auf ein Kranengestell.** Es seien a, b die Zapfen der Säule, c d der Tragbalken und f g die Stütze. In d hänge die Last P. Man soll die Kräfte bestimmen, welche in f, c, g, a und b aus P hervorgehen.



Der Hebel cd mit der Drehachse in c wird in f abwärts gedrückt mit einer Kraft fF = F, wobei

$$\text{F} = \text{P}\,\frac{\text{cd}}{\text{cf}}.$$

Man zerlege F in die Seitenkräfte F' und F'', mache F' = cH' = H' und F'' = gG = G; zerlege G in die horizontale Kraft gH = H und die Vertikale gV = V; so zieht H' die Säule bei c nach rechts und H drückt sie bei g nach links. Aus der Gleichheit der Dreiecke fFF'' und gGV folgt H' = H und V = F.

Der Hebel cfd mit der Drehachse in f wird in d abwärts gedrückt durch die Last P und in c aufwärts mit einem Drucke V′, wo

$$V' = P\frac{df}{cf}.$$

Nun zieht V′ nach oben, V drückt nach unten; daher der Unterschied

$$V - V' = P\frac{cd}{cf} - P\frac{df}{cf} = P.$$

Das Lager in a reagiert waagrecht mit einer Kraft h′ nach links, das in b mit einer Kraft h nach rechts, daher h′ = h. Der Hebelsarm des Kräftepaares H, H′ ist cg, derjenige des Paares h′, h aber ab. Nun müssen ihre Momente h . ab und H . cg einander gleich sein; daher

$$h = H\frac{cg}{ab}.$$

9. Schwerpunkt der Körper.

Jeder Körper besteht aus Teilen, an welchen Schwerkräfte vertikal abwärts wirken. Setzt man diese parallelen Kräfte (S. 53) zusammen, so entsteht eine Mittelkraft, gleich dem gesamten Gewicht des Körpers, mit einem Angriffspunkt, welcher Schwerpunkt des Körpers heißt. Wird dieser Punkt unterstützt, so ist der Körper am Fallen verhindert.

Wo die Lage des Schwerpunktes nicht direkt erkannt werden kann, wende man zu dessen Bestimmung eines der folgenden Verfahren an.

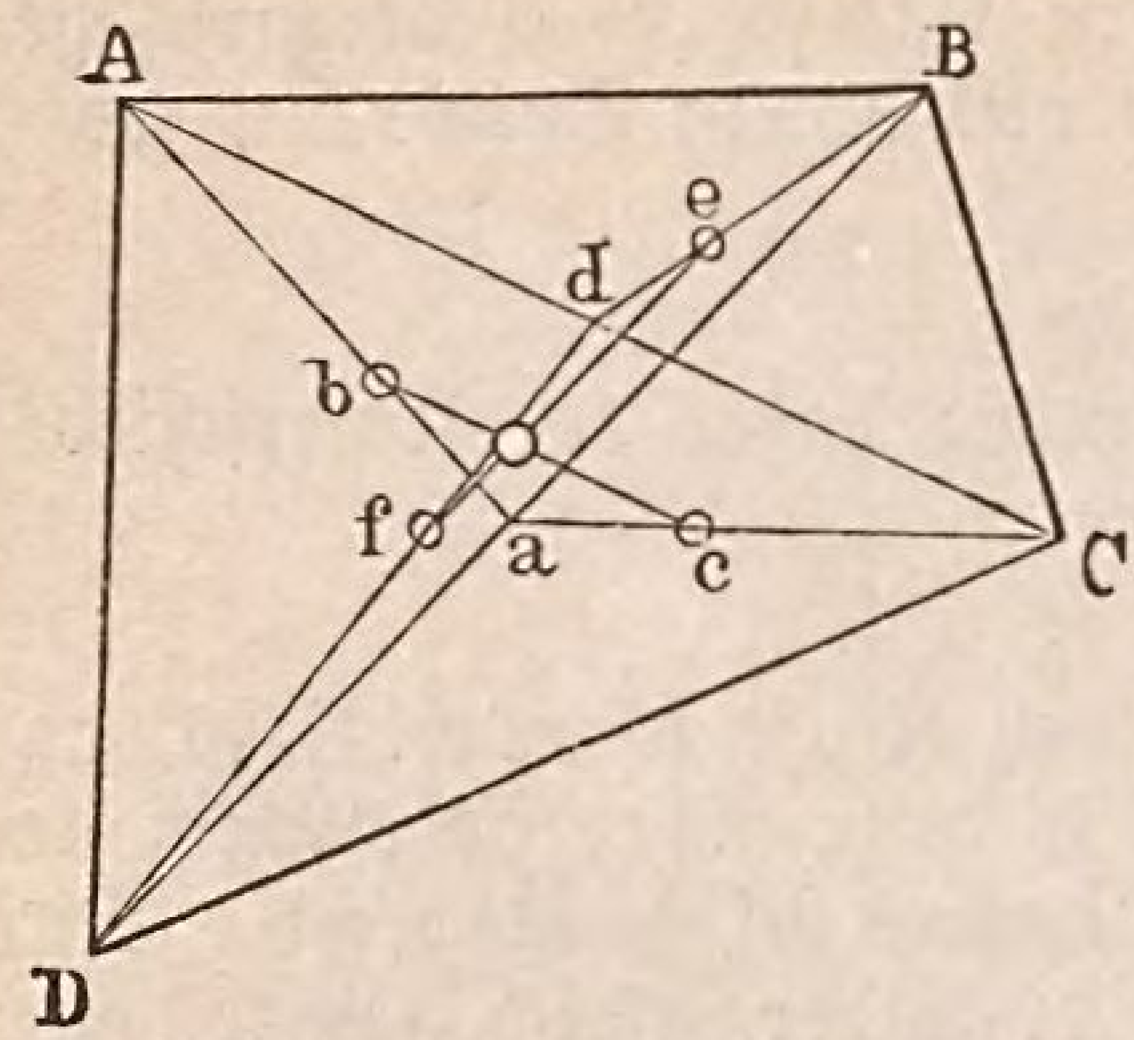
1. **Aufhängemethode.** Man hänge den Körper an irgend einem Punkte frei auf, so liegt der Schwerpunkt in der Vertikallinie, welche durch den Aufhängepunkt geht.

2. **Balanciermethode.** Man lege den Körper auf eine scharfe horizontale Kante so, daß er darauf im Gleichgewicht bleibt, so liegt der Schwerpunkt in der Vertikalebene, welche durch diese Kante geht.

3. **Methode der Schwerlinien.** Jede Gerade, welche durch den Schwerpunkt des Körpers geht, heißt Schwerlinie. Lassen sich zwei oder mehr solcher Schwerlinien angeben, so liegt der gesuchte Schwerpunkt im Durchschnitt dieser Schwerlinien.

a) Dreiecksfläche. Man erhält Schwerlinien, wenn man von den Eckpunkten nach der Mitte der gegenüberliegenden Seiten gerade Linien zieht. Diese Geraden schneiden sich in einem Punkt, der jede in zwei Teile teilt, die sich verhalten wie 1 : 2. Mithin liegt der Schwerpunkt in $^1/_3$ dieser Geraden von der Grundlinie aus, somit auch in $^1/_3$ der Dreieckshöhe.

b) Viereck. Man ziehe von den Ecken A, C des Vierecks aus gerade Linien nach der Mitte a der Diagonale BD, mache $ab = \frac{1}{3}\,aA$ und $ac = \frac{1}{3}\,aC$, so sind b und c die Schwerpunkte der Dreiecke ABD und BCD. Folglich liegt der Schwerpunkt des Vierecks in der Schwer-

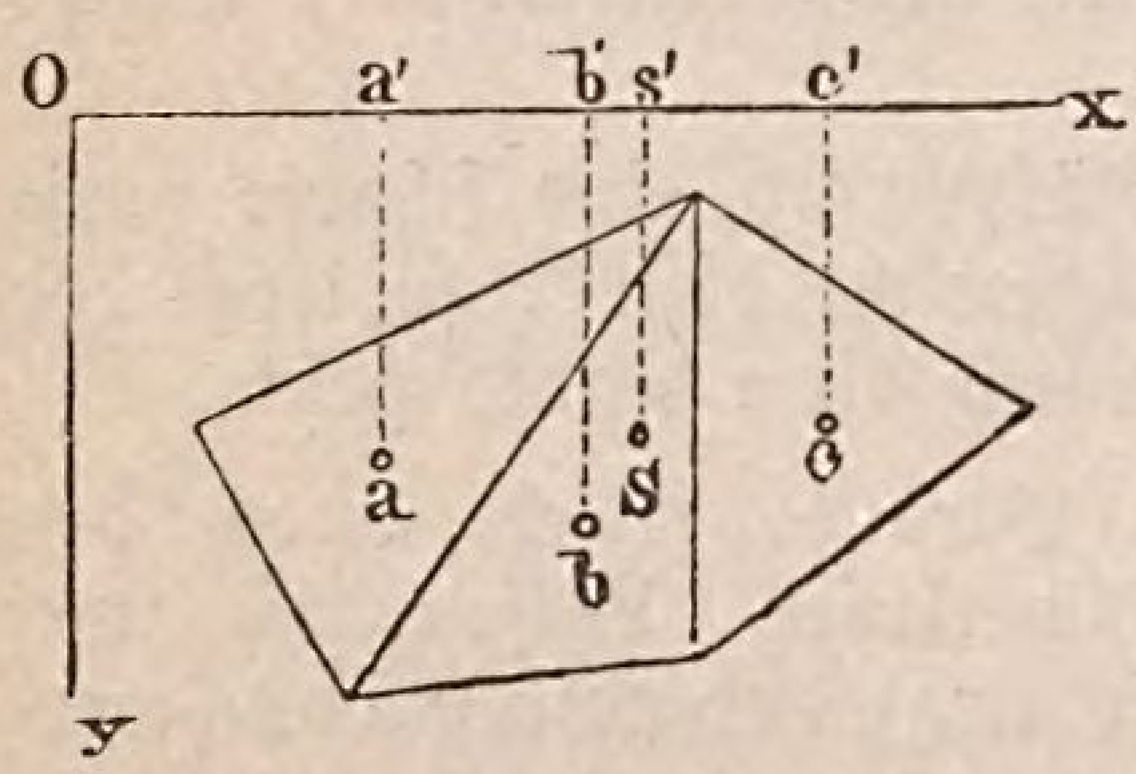


linie bc. Ebenso ziehe man von B und D eine gerade Linie nach der Mitte d der Diagonale AC, mache $de = \frac{1}{3} dB$ und $df = \frac{1}{3} dD$, so liegt der Schwerpunkt des Vierecks auch in der Schwerlinie ef. Also liegt er im Durchschnitt der Geraden bc und ef.

c) Pyramide und Kegel. Der Schwerpunkt liegt in der Geraden, welche die Spitze mit dem Schwerpunkt der Grundfläche verbindet und zwar um $^1/_4$ derselben von der Grundfläche an.

4. **Methode der parallelen Kräfte.** Man zerlege den Körper in solche Teile, deren Schwerpunkte sich direkt angeben lassen. Die Gewichte dieser Teile seien z. B. A, B, C, ihre Schwerpunkte a, b, c. Man ziehe eine Gerade von a nach b, so liegt der Schwerpunkt d der Gewichte A, B in dieser Geraden so, daß sich die Teile ad und bd verhalten wie die Gewichte B und A (S. 53). Hierauf ziehe man eine Gerade von d nach c, so liegt der Schwerpunkt s der Gewichte A + B und C auf dieser Geraden so, daß sich die Abstände sd und sc verhalten wie C zu A + B. Mithin ist s der Schwerpunkt aller Teile, also auch des Ganzen.

5. **Methode der statischen Momente.** Man zerlege den Körper in Gewichtsteile A, B, C, . ., deren Schwerpunkte sich angeben lassen; lege durch den Körper eine horizontale Ebene mit zwei zu einander rechtwinkligen Achsen Ox, Oy, so wird diese Ebene jene Vertikallinien schneiden, welche durch die Schwerpunkte der Teile und des Ganzen gehen. Es geschehe dies in den Punkten a, b, c, . . s. Nun fälle man aa′, bb′, . . ss′ senkrecht auf Ox, so ist

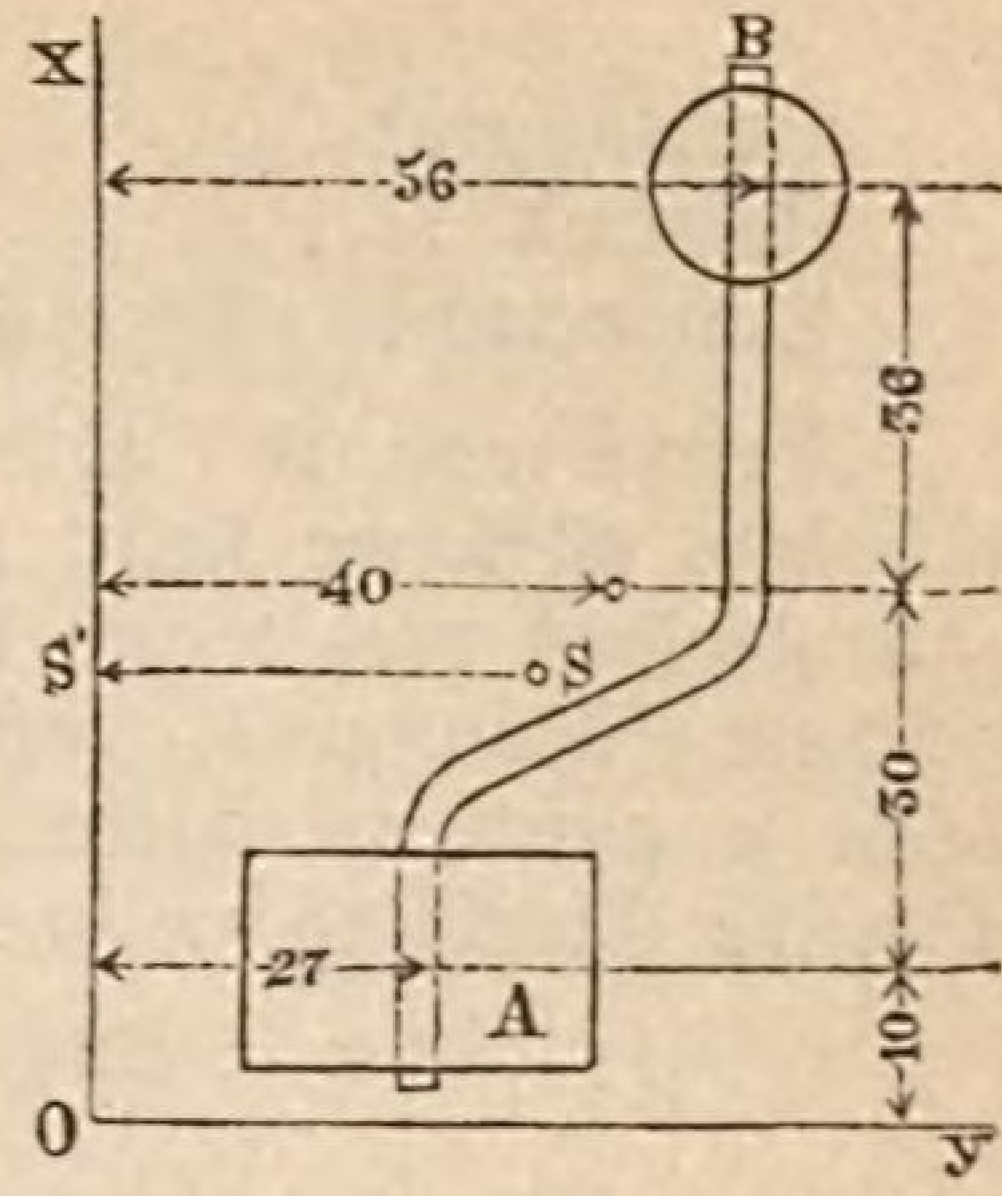


$$\text{Abstand } ss' = \frac{A \cdot aa' + B \cdot bb' + C \cdot cc' + \ldots}{A + B + C + \ldots}$$

$$\text{Abstand } Os' = \frac{A \cdot Oa' + B \cdot Ob' + C \cdot Oc' + \ldots}{A + B + C + \ldots}$$

Um einen dieser Abstände zu erhalten, multipliziert man die Gewichte der Teile mit den Entfernungen ihrer Schwerpunkte von der Achse, addiert die Resultate und dividiert mit dem Gewicht des ganzen Körpers.

Diese Regel kann auch zur Bestimmung der Schwerpunkte von Rauminhalten, Flächen und Linien verwendet werden, nur bezeichnen dann A, B, C, . . Raum-, Flächen- oder Linienteile.



Beisp. Eine Stange von 20 kg Gewicht, deren Schwerpunkt für sich allein 40 cm von der Drehachse Ox und 40 cm von der Drehachse Oy entfernt ist, trage am einen Ende ein Gewicht A von 60 kg, am andern ein Gewicht B von 35 kg; man sucht den Schwerpunkt dieser Körperverbindung mit Rücksicht auf die in der Figur angegebenen Maße (cm).

Die gesuchten Abstände ss' und Os' des Schwerpunktes von den Vertikalebenen sind:

$$ss' = \frac{60 \,.\, 27 + 20 \,.\, 40 + 35 \,.\, 56}{60 + 20 + 35} = 38{,}1 \text{ cm},$$

$$Os' = \frac{60 \,.\, 10 + 20 \,.\, 40 + 35 \,.\, 76}{60 + 20 + 35} = 35{,}4 \text{ cm}.$$

6. **Methode der Guldin'schen Regel.** Es sei x der Abstand des Schwerpunktes einer Linie oder Fläche von einer Drehachse. Macht die Linie von der Länge L oder die Fläche vom Inhalt L eine volle Drehung, so wird eine Oberfläche oder ein Volumen V beschrieben. Daher wird (S. 33) sein

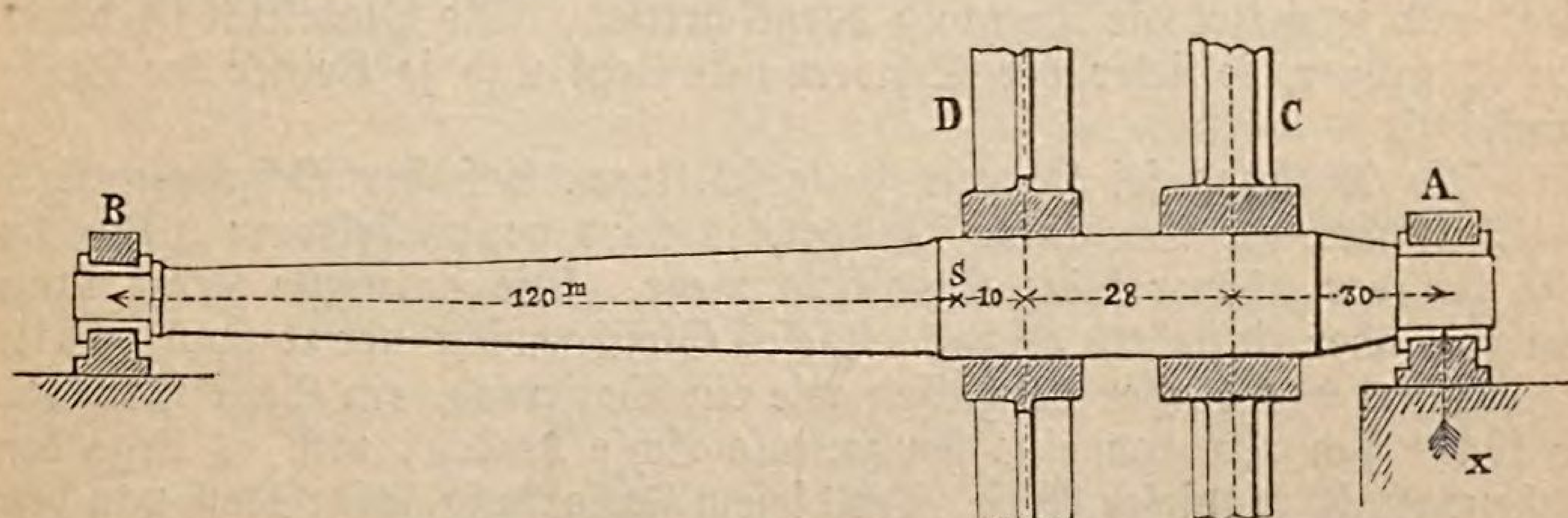
$$2\pi x \,.\, L = V,$$

woraus x berechnet werden kann, wenn L und V bekannt sind.

10. Physischer Hebel.

Beim physischen Hebel ist das Gewicht der Hebelstange in Rechnung zu bringen. Dieses Gewicht ist als eine vertikal abwärts wirkende Kraft zu betrachten, deren Angriffspunkt im Schwerpunkt der Stange liegt. Der horizontale Abstand zwischen dem Drehpunkt und Schwerpunkt ist der Hebelsarm des Gewichtes.

Beisp. Eine horizontale Achse habe ein Schwungrad C und ein



Zahnrad D zu tragen; man soll bestimmen, wie stark die Zapfen A und B dieser Achse in ihre Lager gedrückt werden, wenn

	Gewicht.	Abstand von A.	Abstand von B.
Schwungrad	3000 kg	0,30 m	1,58 m
Zahnrad	450 „	0,58 „	1,30 „
Schwerpunkt s der Achse	250 „	0,68 „	1,20 „

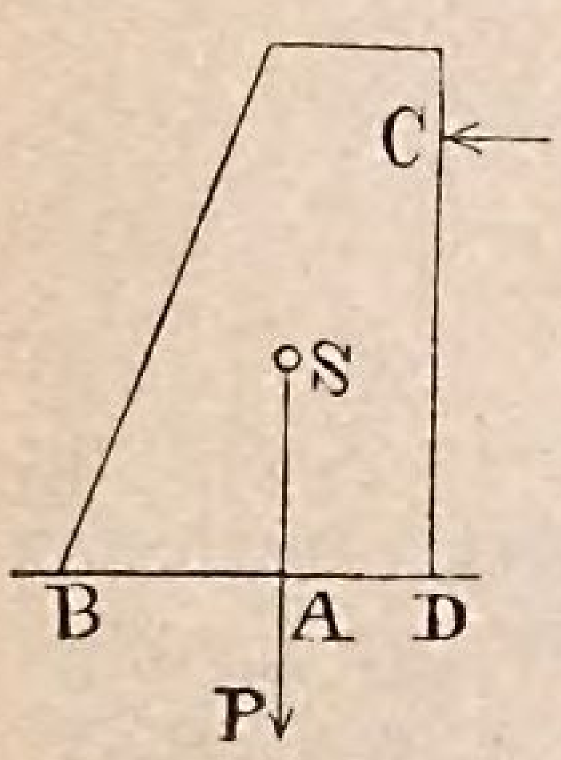
Ersetzt man den Widerstand des Lagers in A durch eine vertikal aufwärts wirkende Kraft x und nimmt an, die Welle könne sich auf- und abwärts drehen um die Stütze in B, so hat man einen Hebel, an welchem Schwungrad, Zahnrad und Welle abwärts und nur eine einzige Kraft x aufwärts wirken. Für das Gleichgewicht erhält man daher folgende Gleichung zwischen den statischen Momenten dieser Kräfte:

$$1{,}88\,x = 3000 \,.\, 1{,}58 + 450 \,.\, 1{,}30 + 250 \,.\, 1{,}20.$$
$$x = 2992 \text{ kg}.$$

Diese Kraft x ist gleich dem gesuchten Druck des Zapfens A. Um den Druck des Zapfens B zu erhalten, zieht man den von A ab von der Summe 3700 kg aller Gewichte. Dies gibt für B 708 kg.

11. Stabilität.

Ein Körper BC oder auch eine starre Konstruktion ruhe auf einer horizontalen Unterlage DB. Das Gewicht des Körpers sei = P. Eine Kraft, welche im Punkte C in horizontaler Richtung gegen den Körper drückt, suche denselben um die Kante B zu drehen, so wird der Körper Widerstand leisten. — Man ziehe vom Schwerpunkt S des Körpers eine Gerade SA vertikal abwärts, so wirkt das Gewicht P längs dieser Vertikalen. Denkt man sich den Körper als Hebel mit der Drehachse in B, so ist der Abstand BA der Hebelsarm von P. Folglich widersteht der Körper der Drehung mit dem statischen Momente P . AB. Dieses Moment heißt **Stabilität**. Hiernach wird die Stabilität groß, wenn das Gewicht P des Körpers und der Hebelsarm AB groß sind.



Wird der Körper um die Kante B, in der Richtung des Pfeiles bei C, um einen kleinen Winkel gedreht, so nimmt der Hebelsarm ab und zwar um so mehr, je höher der Schwerpunkt S liegt und je weiter die Drehung vorgeschritten. Die Stabilität ist daher um so größer, je tiefer der Schwerpunkt liegt und je kleiner der Drehwinkel ist.

Die Drehung sei so weit fortgeschritten, daß der Schwerpunkt S vertikal über der Drehkante B liegt, so wird der Hebelsarm AB = 0; also hat der Körper keine Stabilität mehr. Die geringste Kraft kann ihn vor- oder rückwärts drehen. Dieses Gleichgewicht nennt man **labil**.

Es sei der Körper beschaffen wie ein Wasserrad, ein Schleifstein 2c., er könne sich also um eine horizontale Achse drehen, und es liege der Schwerpunkt in dieser Achse. In diesem Falle kann, abgesehen von den Nebenhindernissen, die geringste Kraft den Körper drehen. Hört alsdann die Kraft auf, so verbleibt der Körper in der neuen Lage. Dieses Gleichgewicht heißt das **indifferente**.

Liegt bei diesem Körper der Schwerpunkt neben der Achse, so bewirkt er eine Drehung, bis der Schwerpunkt vertikal unter die Achse kommt. Wird er aus dieser Lage um Winkel, die kleiner als 180^0 sind, abgelenkt, so hat er die Tendenz, in die ursprüngliche Lage zurückzukehren. Dieses Gleichgewicht heißt stabil.

12. Einfache Bewegungen.

1. **Gleichförmige Bewegung.** Sie besteht darin, daß in gleichen Zeitteilen gleiche Wege durchlaufen werden. Die Geschwindigkeit einer solchen Bewegung ist der Weg, den ein Körper in der Zeiteinheit (Sekunde, Minute 2c.) zurücklegt.

a) Fortschreitende Bewegung. Es sei s der Weg, der in t Sekunden zurückgelegt wird, und v die Geschwindigkeit per Sek., so ist

$$s = vt, \quad v = \frac{s}{t}, \quad t = \frac{s}{v}.$$

Beisp. 1. Welchen Weg legt der Wagenzug einer Eisenbahn während 12 Minuten gleichförmig zurück, wenn derselbe eine Geschwindigkeit von 13 m per Sekunde besitzt?

Zurückgelegter Weg $s = 13 \,.\, 12 \,.\, 60 = 9360$ m.

Beisp. 2. Es sei die Geschwindigkeit einer Hobelmaschine = 0,12 m, die Breite eines Spans = 0,001 m, die Breite der abzuhobelnden Fläche = 0,4 m, die Länge derselben = 2,65 m und der Weg der Bank = 2,8 m. Wie lange dauert es, bis die Fläche einmal überhobelt ist?

Anzahl (nebeneinander liegender) Späne $0,4 : 0,001 = 400$,
Zurückzulegender Weg, im ganzen . . $400 \,.\, 2,8 = 1120$,
Verwendete Zeit . . $1120 : 0,12 = 9333$ Sekunden = 2,59 Stunden.

b) Drehende Bewegung um eine feste Achse. Es sei
v die Geschwindigkeit eines Punktes im Abstand r von der Achse,
w die Winkelgeschwindigkeit, d. h. die Geschwindigkeit im Abstand 1 von der Achse,
t die Anzahl Sekunden zu einem Umgang (Rotationszeit) und
n die Anzahl Umgänge per Minute, so hat man:

$$vt = 2r\pi, \quad 60v = 2r\pi n, \quad tn = 60, \quad wr = v.$$

Beisp. 1. Ein Wasserrad habe eine Umfangsgeschwindigkeit von 1,5 m und einen Halbmesser = 2,9 m; wie viele Sekunden braucht es zu einem Umgang und wie viele Umgänge macht es per Minute?

Anzahl Sekunden zu 1 Umgang $t = \frac{2r\pi}{v} = \frac{2 \,.\, 2,9 \,.\, 3,14}{1,5} = 12,14.$

Anzahl Umgänge per Minute $n = \frac{60v}{2r\pi} = \frac{60 \,.\, 1,5}{2 \,.\, 2,9 \,.\, 3,14} = 4,942.$

Beisp. 2. Ein Schwungrad mache per Minute 36 Umgänge und habe einen Durchmesser = 3,8 m. Wie groß ist seine Umfangsgeschwindigkeit?

Umfangsgeschwindigkeit $v = \frac{2r\pi n}{60} = \frac{3,8 \,.\, 3,14 \,.\, 36}{60} = 7,159$ m.

c) Mittlere Geschwindigkeit einer ungleichförmigen Bewegung. Sie ist die Geschwindigkeit, mit welcher ein Punkt sich bewegen müßte, um gleichzeitig denselben Weg zu durchlaufen, den er ungleichförmig zurücklegt. Die folgenden Daten sind solche mittlere Werte.

d) Zusammenstellung einiger mittleren Geschwindigkeiten per Sekunde.

	Meter		Meter
Fußgänger	1,3	Gas, Luft in Leitungen	2,7
Pferd im Schritt . . .	1,0	Rauch im Fabrikskamin .	2
„ im Trab	2,1	Gewöhnlicher Wind . .	3
„ im Galopp . . .	4,5	Sturmwind	15
Englisches Rennpferd . .	12,0	Heftiger Sturm . . .	30
Windhund	20,0	Freier Fall, nach 1 Sek.	9,81
Adler	30,0	Schall in der Luft (15° C.)	340
Brieftaube	36,0	„ im Wasser (8° C.)	1435
Frachtwagen	0,8	„ in Eichenholz . .	3625
Postwagen	2,7	„ im Schmiedeisen .	3500
Dampfschiff	4,5	Geschoß, Flinte . . .	400
Warenzug auf Eisenbahnen	8,0	„ kleine Kanone .	550
Personenzug „ „	12,0	„ große Kanone .	800
Schnellzug „ „	18,0	Erddrehung, am Aequator	448
Wasser der meisten Ströme	0,8	Fortschreitung der Erde	29400
„ in Fabrikskanälen .	0,4	Licht (Fizeau) .	315 000 000
„ in Leitungen . .	1,0	Elektricität . .	300 000 000

2. **Gleichförmig beschleunigte Bewegung.** Sie besteht darin, daß die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um gleich viel zunimmt. Man nennt Beschleunigung (Acceleration) die Zunahme an Geschwindigkeit per Sekunde.

a) Ohne Anfangsgeschwindigkeit. Die Gesetze dieser Bewegung sind dargestellt durch die Formeln

$$v = gt, \quad s = \frac{1}{2} gt^2, \quad s = \frac{1}{2} vt, \quad v^2 = 2gs,$$

wo s den zurückgelegten Weg, t die zu diesem Wege erforderliche Zeit in Sekunden, v die Geschwindigkeit nach dieser Zeit und g die Beschleunigung (auch Geschwindigkeit nach der ersten Sekunde) bezeichnen.

Beisp. Ein Eisenbahnzug werde von der Ruhe aus mit konstanter Beschleunigung so angelassen, daß er in 50 Sekunden 300 m fortgetrieben werde. Wie groß ist die Beschleunigung und Geschwindigkeit dieses Zuges nach 50 Sekunden?

Es ist hier $t = 50$ und $s = 300$; daher

Beschleunigung $g = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 . 300}{50 . 50} = 0{,}24$ m,

Geschwindigkeit $v = gt = 0{,}24 . 50 = 12$ m.

b) Mit Anfangsgeschwindigkeit. Es seien: v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, g die Beschleunigung, s der Weg und v die Geschwindigkeit nach t Sekunden, so ist

$$v = v_0 + gt, \quad s = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2, \quad s = \frac{v^2 - v_0^2}{2g}.$$

Beisp. Ein Eisenbahnzug habe in einem gewissen Augenblick 6 m Geschwindigkeit. Von da an nehme seine Geschwindigkeit per Sekunde um je 0,2 m zu. Welche Geschwindigkeit hat der Zug nach 25 Sekunden und wie viel Weg durchläuft er in dieser Zeit?

Es ist $v_0 = 6$ m, $g = 0{,}2$ m, $t = 25$; folglich

Geschwindigkeit nach 25 Sek. $v = 6 + 0{,}2 \,.\, 25 = 11$ m,

Weg in 25 Sek. $s = 6 \,.\, 25 + \frac{1}{2} \,.\, 0{,}2 \,.\, 25^2 = 212{,}5$ m.

3. **Gleichförmig verzögerte Bewegung.** Es seien: v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, g die Abnahme der Geschwindigkeit per Sekunde, ferner s der Weg und v die Geschwindigkeit nach t Sekunden, so ist

$$v = v_0 - gt, \quad s = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2, \quad s = \frac{v_0^2 - v^2}{2g}.$$

Nach der Zeit T sei die Bewegung erschöpft, also $v = 0$; daher $0 = v_0 - gT$, woraus folgt, wenn dieser Zeit der Weg S entspricht:

$$T = \frac{v_0}{g}, \quad S = \frac{v_0^2}{2g}.$$

13. Proportionalität zwischen Kraft und Beschleunigung.

1. **Kraft und Beschleunigung.** Schwebt ein Körper frei im Raume und wirkt eine Kraft auf ihn, so bewegt er sich in der Richtung der Kraft und ändert seine Geschwindigkeit. Dabei ist die Aenderung der Geschwindigkeit proportional der Größe der Kraft. Ist die Kraft konstant, so wird die Bewegung gleichförmig beschleunigt oder verzögert.

2. **Schwerkraft der Erde.** Die Anziehung der Erde auf einen Körper außerhalb derselben nimmt ab wie das Quadrat der Entfernung des Körpers vom Mittelpunkt der Erde zunimmt. Für sehr kleine Aenderungen dieses Abstandes kann man jedoch die Schwerkraft, also auch das Gewicht des Körpers, konstant annehmen.

a) Freier Fall. Fällt daher ein Körper im leeren Raum frei herab, so wird seine Bewegung für kleine Fallhöhen gleichförmig beschleunigt. Das Gewicht des Körpers ist hier die treibende Kraft. Wird dieses Gewicht größer, so bleibt gleichwohl die Beschleunigung dieselbe, weil das größere Gewicht auch eine entsprechend größere Masse in Bewegung zu setzen hat. Es gelten daher hier die Gleichungen S. 62.

Die Beschleunigung (Zunahme an Geschwindigkeit per Sekunde) wächst mit der geographischen Breite. Es beträgt an der Meeresfläche:

für die Breitegrade	0	45	90°
die Beschleunigung	9,78103	9,80606	9,81309 m.

Gewöhnlich nimmt man abgekürzt $g = 9{,}81$.

Beisp. Welche Geschwindigkeit erreicht ein Körper, der 60 m hoch herunterfällt, und welche Zeit braucht er dazu?

Aus der vierten und zweiten Gleichung folgt für g = 9,81 m:

$$\text{Geschwindigkeit}\quad v = \sqrt{3 \,.\, 9{,}81 \,.\, 60} = 34{,}31 \text{ m},$$

$$\text{Anzahl Sekunden}\ t = \sqrt{\frac{2 \,.\, 60}{9{,}81}} = 3{,}49.$$

b) Vertikaler Wurf. Wird ein Körper vertikal aufwärts geworfen, so wirkt die Schwerkraft entgegen. Daher wird die Bewegung im leeren Raum und für kleine Steighöhen gleichförmig verzögert. Mithin beträgt in gleichen Zeiten die Abnahme an Geschwindigkeit so viel wie beim Herunterfallen die Zunahme an Geschwindigkeit, also in der Sekunde 9,81 m; ferner braucht der Körper zum Steigen so viel Zeit wie zum Fallen, und es sind seine Geschwindigkeiten in gleichen Höhen beim Steigen und Fallen gleich groß.

Beisp. Eine Kanonenkugel werde mit einer Geschwindigkeit von 400 m vertikal aufwärts abgeschossen. Wie hoch steigt sie und wieviel Zeit braucht sie dazu, wenn auf den Luftwiderstand keine Rücksicht genommen wird?

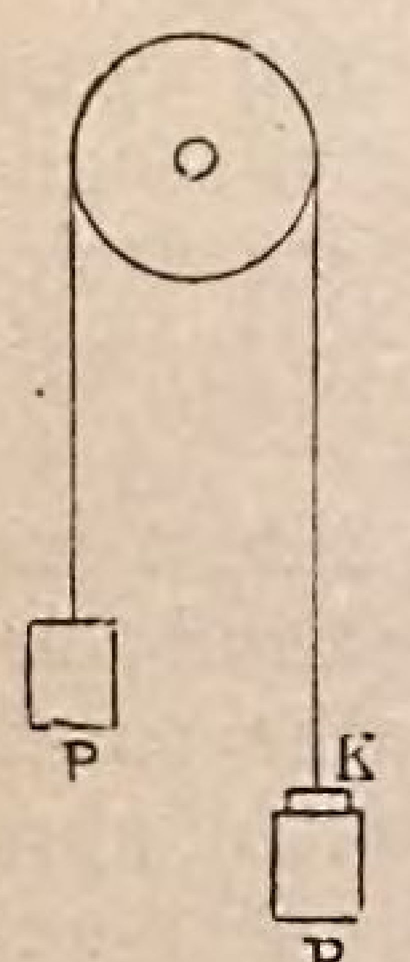
In jeder Sekunde wird die Geschwindigkeit um 9,81 m vermindert, also z. B. in 10 Sekunden um 98,1 m. Somit wird sein (S. 63)

$$\text{Anzahl Sekunden zum Steigen}\ T = \frac{v_0}{g} = \frac{400}{9{,}81} = 40{,}77.$$

$$\text{Totale Steighöhe} \ldots\ldots\ S = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{400 \,.\, 400}{2 \,.\, 9{,}81} = 8154{,}9 \text{ m}.$$

3. **Zwei Kräfte an derselben Masse.** Es sei P das Gewicht eines Körpers und g die Beschleunigung beim freien Fall, ferner K eine konstante Kraft, welche auf diesen Körper einwirkt, so daß er eine gleichförmig veränderte Bewegung annimmt mit einer Beschleunigung g', so müssen sich die Kräfte K und P verhalten wie die von ihnen an derselben Masse hervorgebrachten Beschleunigungen. Daher die Proportion

$$K : P = g' : g.$$



Beisp. Ueber eine Rolle gehe ein Faden, an dessen Enden gleiche Gewichte P hängen, so daß Gleichgewicht am Faden besteht. Man lege nun zum einen Gewichte noch ein Gewicht von der Größe K hinzu, so wird das Gleichgewicht gestört: der Faden mit dem Gewichte P + K sinkt, der andere mit dem Gewichte P steigt. Die treibende Kraft ist K, das in Bewegung gesetzte Gewicht 2P + K. Die Bewegung wird gleichförmig beschleunigt, weil die Kraft K konstant ist. Die obige Proportion gibt hier

$$K : 2P + K = g' : g, \quad g' = \frac{K}{2P + K}\, g.$$

Wenn etwa K = 0,1 von P, so wird die Beschleunigung der Bewegung

$$g' = \frac{0{,}1\,P}{2P + 0{,}1\,P}\, g = \frac{1}{21}\, g,$$

d. h. diese Bewegung ist 21mal langsamer als der freie Fall der Körper. Hierbei wurde auf die Nebenhindernisse keine Rücksicht genommen.

Beisp. 2. Eine Lokomotive habe 30000 kg Gewicht. Dieses verursache auf der Bahn einen konstanten Widerstand von 400 kg. Wenn nun eine konstante Dampfkraft von 1000 kg (vom Umfang des Kurbelkreises auf den Umfang der Triebräder reduciert) treibend auf die Lokomotive wirkt, wie groß wird die Beschleunigung der Bewegung und welchen Weg legt die Lokomotive, von der Ruhe aus, vermöge dieser Kraft in 60 Sekunden zurück?

Der Druck K auf die Lokomotive, nach Abzug des Widerstandes, ist $1000 - 400 = 600$ kg. Daher $600 : 30000 = g' : 9{,}81$ und

$$g' = \frac{600}{30000} \cdot 9{,}81 = \frac{1}{50} \cdot 9{,}81 = 0{,}1962 \text{ m}$$

d. h. die Beschleunigung, hervorgebracht durch den Dampf, ist 50mal kleiner als durch die Schwerkraft.

Nach S. 62 ist der in 60 Sekunden mit der Beschleunigung 0,1962 m durchlaufene Weg

$$s = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1962 \,.\, 60 \,.\, 60 = 353{,}16 \text{ m}$$

und die in dieser Zeit erreichte Geschwindigkeit

$$v = 0{,}1962 \,.\, 60 = 11{,}77 \text{ m.}$$

Beisp. 3. Der Ring eines Schwungrades habe 4000 kg Gewicht. Er soll durch eine konstante Kraft, welche am mittleren Umfang des Ringes tangential an denselben wirkt, so bewegt werden, daß er in 3 Minuten 10 m Geschwindigkeit annehme. Wie groß muß diese Kraft sein, wenn die Nebenhindernisse nicht in Betracht kommen?

Es sind 3 Minuten = 180 Sek. Mit Hilfe dieser Zeit und der Geschwindigkeit 10 m erhält man aus der Formel $v = g't$ (S. 62) die Beschleunigung der Bewegung

$$g' = \frac{v}{t} = \frac{10}{180} = \frac{1}{18} \text{ m.}$$

Für diesen Wert von g' wird obige Proportion $K : 4000 = \frac{1}{18} : 9{,}81$;

$$\text{daher Kraft } K = \frac{4000}{18 \,.\, 9{,}81} = 22{,}65 \text{ kg.}$$

Sollte das Anlassen des Schwungrades nur 18 Sek. dauern, so müßte diese Kraft 10mal größer sein.

14. Quantität der Bewegung.

1. Vermag eine konstante Kraft K einem Körper vom Gewichte P, vom Zustand der Ruhe aus, in t Sekunden eine Geschwindigkeit v zu erteilen, so gilt nicht nur die Proportion (S. 64) $K : P = g' : g$, sondern auch die Gleichung $v = g't$ der gleichförmig beschleunigten Bewegung, woraus durch Gleichsetzen der Werte von g' folgt

$$(1) \qquad Kt = \frac{P}{g} v.$$

Unter K kann man sich auch den mittleren Wert einer veränderlichen Kraft denken.

Das Produkt Kt heißt Quantität der Bewegung, auch Moment der Bewegung. Man findet diese Größe, wenn man das Gewicht des Körpers mit seiner Geschwindigkeit multipliziert und durch $g = 9{,}81$ dividiert.

Beisp. Soll eine Lokomotive von 30000 kg Gewicht mittelst einer konstant treibenden Kraft von 1500 kg, vom Zustand der Ruhe aus, eine Geschwindigkeit von 12 m erreichen, so ist die auf die Lokomotive verwendete Quantität der Bewegung

$$\frac{P}{g}v = \frac{30000 \cdot 12}{9{,}81} = 36697 \text{ kg}.$$

Dauert die Einwirkung der Kraft K 60 Sekunden lang, so wird nach Formel (1) die Kraft

$$K = \frac{36697}{t} = \frac{36697}{60} = 611{,}6 \text{ kg}.$$

Wäre aber die Kraft $K = 400$ kg, so müßte diese Kraft, um die Geschwindigkeit von 12 m hervorzubringen, einwirken während

$$t = \frac{36697}{K} = \frac{36697}{400} = 91{,}74 \text{ Sek.}$$

Wendet man auf diesen letztern Vorgang die Formel $s = \frac{1}{2} v t$ (S. 62) an, so erhält man als Weg, den die Lokomotive durchlaufen muß, bis sie 12 m Geschwindigkeit hat,

$$s = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 91{,}74 = 550{,}4 \text{ m}.$$

2. **Masse eines Körpers.** Das konstante Verhältnis $P : g$ zwischen dem Gewicht eines Körpers und der Beschleunigung beim freien Fall heißt Masse des Körpers. Bezeichnet man diese mit M, so ist die Quantität der Bewegung (Formel 1)

$$(2) \qquad Kt = Mv,$$

d. h. gleich Produkt aus Masse und Geschwindigkeit des Körpers.

Beisp. Es sei m die Masse eines Geschosses und v die Geschwindigkeit, mit der es abgeschossen wird; es sei ferner M die Masse des Geschützes und V die Geschwindigkeit, mit welcher dieses nach dem Schusse zurück zu gehen strebt. Zwischen dem Geschoß und dem Boden des Geschützes herrscht während der Wirkung des Pulvergases in jedem Augenblick der gleiche Druck. Es werden daher die Quantitäten der Bewegung für beide Massen gleich, so daß man hat $MV = mv$.

Wenn nun z. B. die Geschwindigkeit v des Geschosses 500 m und die Masse des Geschützes 300mal größer ist als die des Geschosses, so folgt

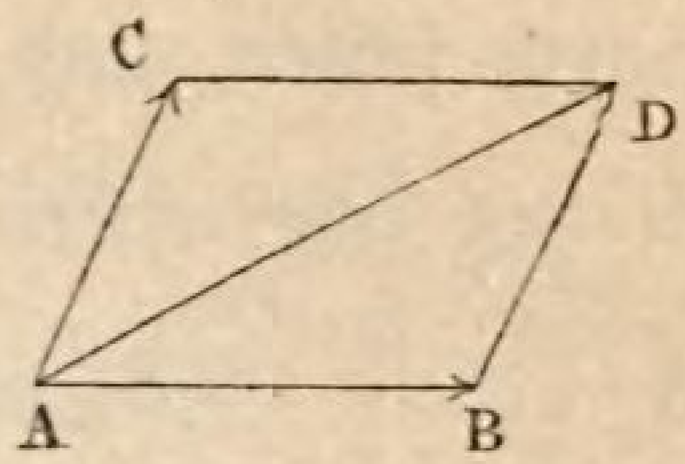
$$MV = \frac{M}{300} \cdot 500; \quad V = 1{,}67 \text{ m}.$$

Mithin geht das Geschütz mit einer Geschwindigkeit von 1,67 m zurück.

15. Zusammengesetzte Bewegungen.

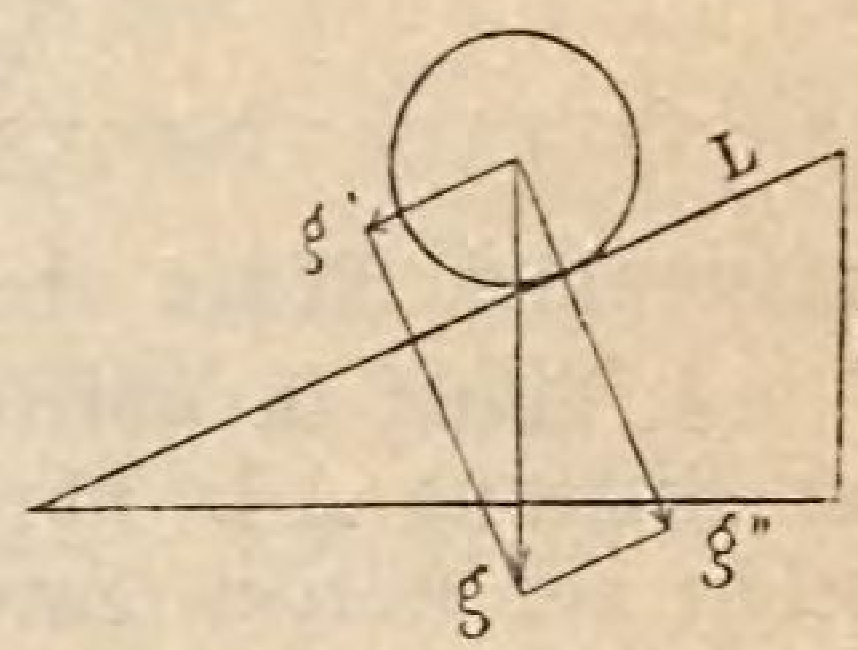
1. **Parallelogramm der Geschwindigkeiten.** Wenn sich ein Punkt A gleichförmig in der Richtung AB und zugleich in der Richtung AC

bewegen soll, und sind die bezüglichen Geschwindigkeiten AB und AC, so errichte man über diesen Linien das Parallelogramm ABDC; alsdann stellt die Diagonale AD die Richtung und Größe der Geschwindigkeit dar, mit welcher sich der Punkt wirklich bewegt. Dabei heißen AB und AC die Seitengeschwindigkeiten und AD die mittlere Geschwindigkeit. Umgekehrt kann eine Geschwindigkeit AD durch das Parallelogramm in zwei Seitengeschwindigkeiten AB und AC zerlegt werden.



Sind die Bewegungen veränderlich und bezeichnen AB und AC die gleichzeitigen Beschleunigungen, so wird die Diagonale die mittlere Beschleunigung der Bewegung für die angenommene Zeit sein.

2. **Bewegung auf der schiefen Ebene.** Ein Körper befinde sich auf einer schiefen Ebene und bewege sich auf derselben längs einer Linie von steilster Neigung. Würde der Körper frei fallen können, so wäre seine Beschleunigung g = 9,81 m. Durch die Anwesenheit der schiefen Ebene kommt diese Beschleunigung nicht zur Wirklichkeit. Man zerlege daher g in die zwei Seitenbeschleunigungen g′ und g″, wovon die erstere parallel, die letztere senkrecht zur schiefen Ebene liegt; so wird g″ durch die schiefe Ebene aufgehoben, während die Bewegung längs der schiefen Ebene, ohne Rücksicht auf Nebenhindernisse (Reibung, Luftwiderstand), erfolgt: abwärts mit der Beschleunigung + g′, aufwärts mit der Beschleunigung — g′. Abwärts ist sie daher gleichförmig beschleunigt, aufwärts gleichförmig verzögert.



Es sei L die Länge und h die vertikale Höhe der schiefen Ebene, so folgt aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke die Proportion

$$g' : g = h : L.$$

Somit ist die Beschleunigung auf der schiefen Ebene so viel mal kleiner als beim freien Fall, so oft h in L enthalten ist.

Beisp. Es sei h = 1 m, L = 10 m und Zeit t = 20 Sek., so wird

Beschleunigung auf der schiefen Ebene $g' = 9{,}81 \cdot \frac{1}{10} = 0{,}981$ m,

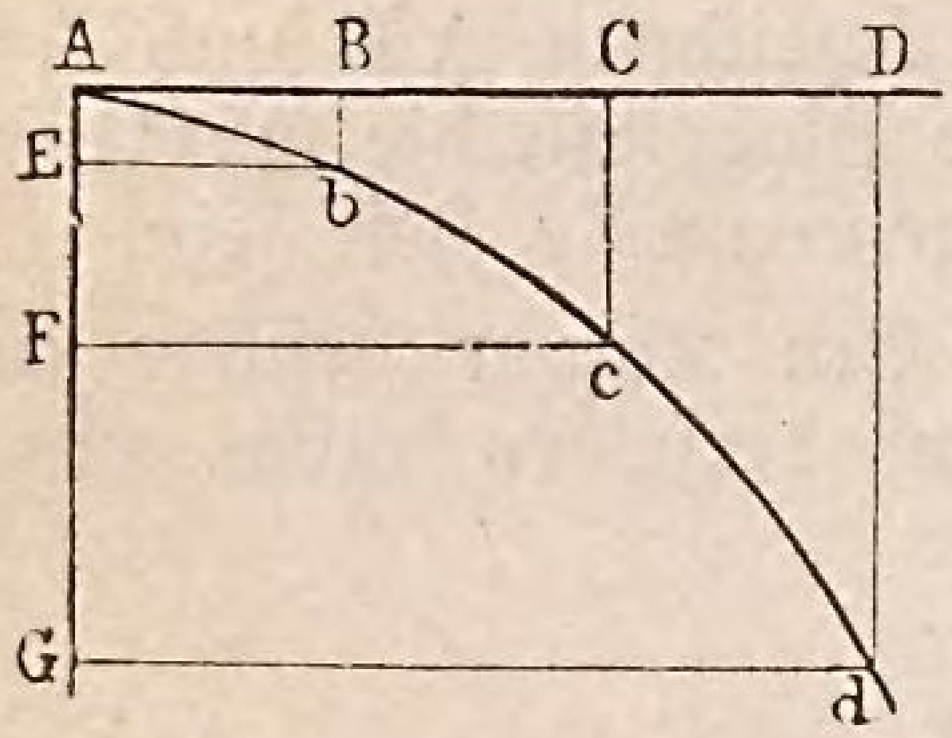
Geschwindigkeit abwärts nach 20 Sekunden $20 \cdot 0{,}981 = 19{,}62$ „

Durchlaufener Weg in dieser Zeit $\frac{1}{2} \cdot 0{,}981 \cdot 20 \cdot 20 = 196{,}2$ „

Läßt man zwei Körper vom höchsten Punkt der schiefen Ebene ausgehen, den einen längs der schiefen Ebene, den andern längs der Höhe derselben; so haben beide nach Galilei je in gleichen Tiefen gleiche Geschwindigkeiten. Dieser Satz gilt noch, wenn die Bahn des Körpers eine abwärts gerichtete krumme Linie ist.

Gehen zwei Körper von der Basis aus mit gleicher Geschwindigkeit ab; der eine längs der schiefen Ebene, der andere längs der Höhe derselben, so erreichen sie in gleichen Höhen gleiche Geschwindigkeiten. Es ist dies noch der Fall, wenn die Gerade L durch eine ansteigende Kurve ersetzt wird.

3. **Wurf in horizontaler Richtung.** Es werde ein Körper in horizontaler Richtung AD abgeworfen mit einer Geschwindigkeit AB = BC = CD . . . per Sekunde. Gleichzeitig wird er aber auch vertikal abwärts fallen, und zwar in der ersten Sekunde um $AE = \frac{1}{2} . 9{,}81$ m, in den zwei ersten Sekunden um $AF = \frac{4}{2} . 9{,}81$ m, in den drei ersten um $AG = \frac{9}{2} \cdot 9{,}81$ m 2c. Zeichnet man daher über den gleichzeitigen Wegen die Parallelogramme ABbE, ACcF, . ., so erhält man Punkte b, c, d, . ., durch welche der Körper gehen muß. Man verbinde diese Punkte durch eine stetige Kurve Ad, so ist diese die Bahn des Körpers. Diese Bahn ist eine Parabel (s. S. 41), deren Scheitel in A und deren Achse die Gerade AG ist. — Nach dieser Kurve krümmt sich der Wasserstrahl, der aus einer horizontalen Röhre oder über eine Stellfalle ins Freie fließt.

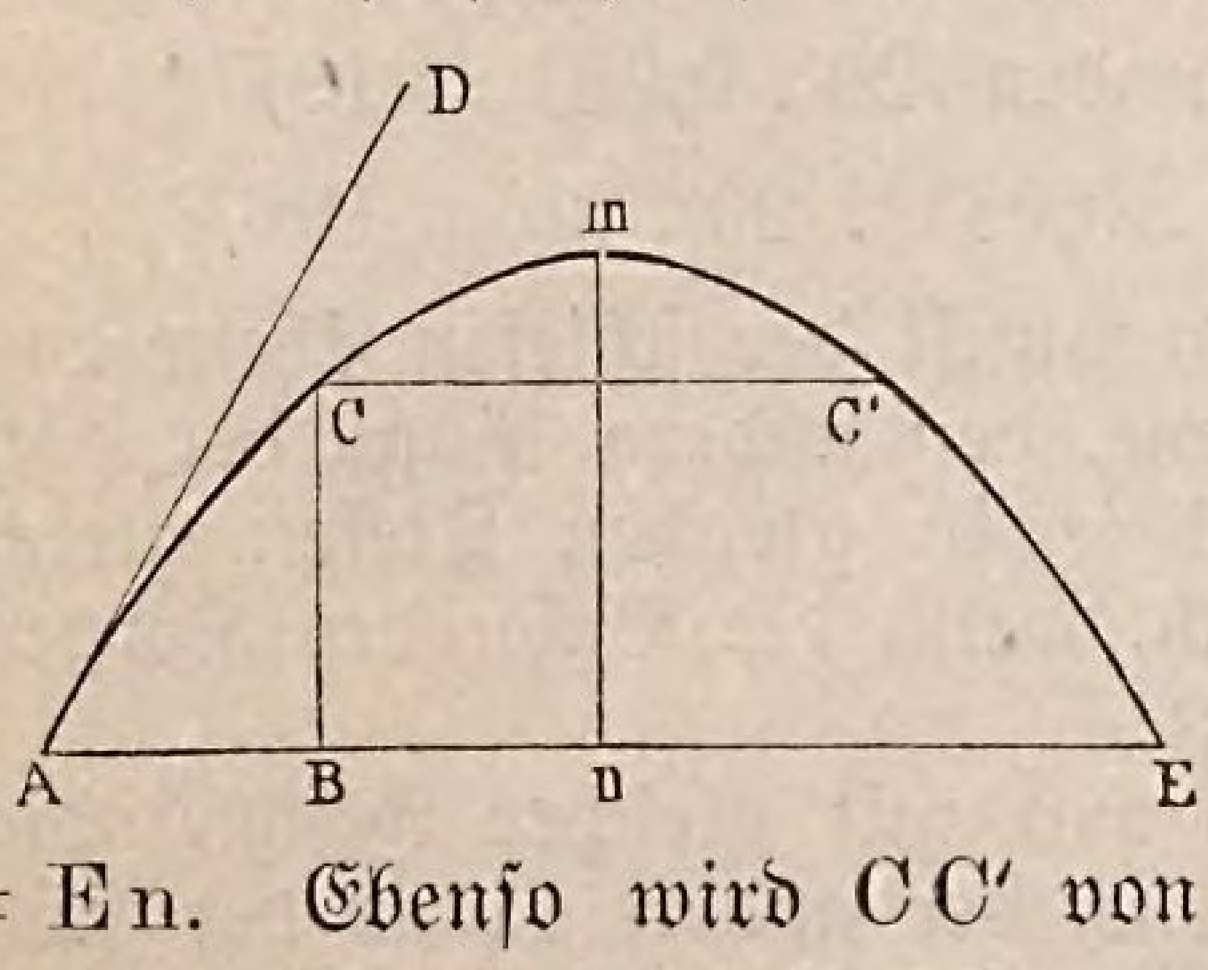


4. **Wurf in schiefer Richtung aufwärts.** Ein Körper werde in der Richtung AD schräg aufwärts abgeworfen. Die Bahn ACmE, welche der Körper durchläuft, liegt in einer Vertikalebene, die durch diese Anfangsrichtung AD geht.

Im leeren Raum muß die Bewegung des Körpers in horizontaler Richtung gleichförmig sein, weil keine Kraft vorhanden ist, die treibend oder hemmend in dieser Richtung wirkt. In vertikaler Richtung ist die Bewegung vom Anfang A bis zum höchsten Punkt m gleichförmig verzögert, weil die Schwere, welche für kleinere Steighöhen unveränderlich ist, entgegenwirkt; von da an ist die Bewegung vertikal abwärts gleichförmig beschleunigt. Da die Abnahme an Geschwindigkeit beim Steigen und die Zunahme an Geschwindigkeit beim Fallen in gleichen Zeiten gleich groß wird, so folgt:

a) daß der Körper in gleichen Höhen C, C′ zu beiden Seiten des höchsten Punktes m gleiche Geschwindigkeit hat, und

b) daß solche Punkte C, C′ von gleicher Höhe und gleicher Geschwindigkeit gleichen Abstand haben von der Vertikalen mn, welche durch den höchsten Punkt geht, daß mithin der ansteigende Teil Am der Bahn und der absteigende mE symmetrisch zu mn liegen.



Man nennt die Horizontale AE (zwischen zwei Durchschnitten der Bahn) die Wurfweite. Mithin ist An = En. Ebenso wird CC′ von mn halbiert. Es sei

a der Wurfwinkel DAE,
v die Geschwindigkeit, mit der der Körper in A abgeworfen wird,
x = AB sein Weg in horizontaler Richtung nach t Sekunden,

$y = BC$ der Weg des Körpers in vertikaler Richtung nach dieser Zeit,
T die Zeit zur Erreichung des höchsten Punktes und
$g = 9{,}81$ m die Beschleunigung beim freien Fall; so ist

Geschwindigkeit in horizontaler Richtung $= v \cos a$,
Geschwindigkeit in vertikaler Richtung $= v \sin a - g t$.

(Letztere nämlich ohne Rücksicht auf die Schwere $= v \sin a$; allein dieser Wert wird durch die Schwere um $g t$ vermindert.)

Im höchsten Punkt der Bahn ist die Geschwindigkeit in vertikaler Richtung $= 0$. Folglich wird für diesen Punkt sein

(1) $$0 = v \sin a - g T; \text{ woraus } T = \frac{v \sin a}{g}.$$

Die Wege in horizontaler und vertikaler Richtung sind

(2) $$x = v t \cos a; \quad y = v t \sin a - \frac{1}{2} g t^2.$$

Setzt man hier T für t, so wird x zum Abstand An und y zur **Steighöhe** mn. Dies gibt

$$An = \frac{v^2 \sin a \cos a}{g}; \quad mn = \frac{v^2 \sin^2 a}{2g}.$$

Mithin wird die ganze Wurfweite $AE = 2 An$ sein:

$$\text{Wurfweite } AE = \frac{2 v^2 \sin a \cos a}{g} = 2 v T \cos a.$$

Bei derselben Anfangsgeschwindigkeit v wird die Wurfweite ein Maximum, wenn der Wurfwinkel $a = 45^0$ ist. Für Winkel, die um ebensoviel über als unter 45^0 sind, wird die Wurfweite bei derselben Geschwindigkeit v gleich groß.

Eliminiert man aus den Gleichungen (2) die Zeit t, so erhält man als Gleichung der Bahn

(3) $$y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{g}{2 v^2 \cos \alpha} x^2.$$

Die Bahn ist eine Parabel, der höchste Punkt m ihr Scheitel.

Die Bahn eines in der Luft abgeworfenen Körpers weicht mehr und mehr von dieser parabolischen Form ab, je länger die Bewegung dauert. Es wird daher sowohl die Steighöhe als auch die Wurfweite kleiner ausfallen als im leeren Raum.

Beisp. Ein Geschoß werde mit einer Geschwindigkeit $v = 400$ m unter einem Wurfwinkel $a = 35^0$ abgeschossen. Wie groß ist die Zeit zum Durchlaufen der ganzen Bahn? Wie groß die Steighöhe und wie groß die Wurfweite?

Nach der Tabelle ist . $\sin 35^0 = 0{,}5736$ und $\cos 35^0 = 0{,}8192$.
Folglich die Zeit zum Steigen . . $T = \frac{400 \,.\, 0{,}5736}{9{,}81} = 23{,}39$ Sek.
Die Zeit zum Steigen und Fallen . . . $2 \,.\, 23{,}39 = 46{,}78$ Sek.
Die Steighöhe ist . . . . . . $mn = \frac{400^2 \,.\, 0{,}5736^2}{2 \,.\, 9{,}81} = 2683$ m.
Die Wurfweite . . $AE = 2 \,.\, 400 \,.\, 23{,}39 \,.\, 0{,}8192 = 15329$ m.

5. **Pendelbewegung.** Pendel heißt jeder Körper, der sich um eine nicht durch seinen Schwerpunkt gehende Achse infolge seiner Schwere in einer Ebene hin- und herdreht. Von diesem sogenannten physischen Pendel ist das mathematische zu unterscheiden, bei welchem der schwere Punkt durch eine gewichtlose Stange verbunden gedacht wird.

Die Länge des physischen Pendels kann sehr annähernd durch folgendes Hilfspendel gefunden werden: Man hänge eine kleine Bleikugel an einem dünnen Faden so auf, daß dieses Pendel gleiche Schwingungszeit hat mit dem fraglichen physischen Pendel. Alsdann ist der Abstand der Achse des Hilfspendels von der Mitte der Bleikugel die Länge des physischen Pendels.

Die Schwingungszeit, d. h. die Zeit zu einer einfachen Schwingung, ausgedrückt in Sekunden, sei t und die Pendellänge L, so erhält man für eine Ablenkung von der vertikalen Richtung um α Grade:

$$t = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \sin^6\frac{\alpha}{2} + ..\right].$$

Für $\alpha = 5$ Grade wird

$$t = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot 1{,}000476$$

und für einen verschwindend kleinen Schwingungswinkel

$$t = \pi \sqrt{\frac{L}{g}},$$

wo $\pi = 3{,}14159$ und $g = 9{,}8088$ m. Hierfür wird in Metern

$$t = 1{,}0031 \sqrt{L}; \quad L = 0{,}9938\, t^2.$$

Beisp. Wie lang muß ein Pendel sein, das in einer Minute 40 einfache Schwingungen macht?

Es ist die Schwingungszeit . . $t = 60 : 40 = 1{,}5$ Sek.
Länge des Pendels . . $L = 0{,}9938 \,.\, (1{,}5)^2 = 2{,}236$ m.

Für $t = 1$ erhält man für mittlere Breitegrade als Länge des Sekundenpendels $= 0{,}9938$ m.

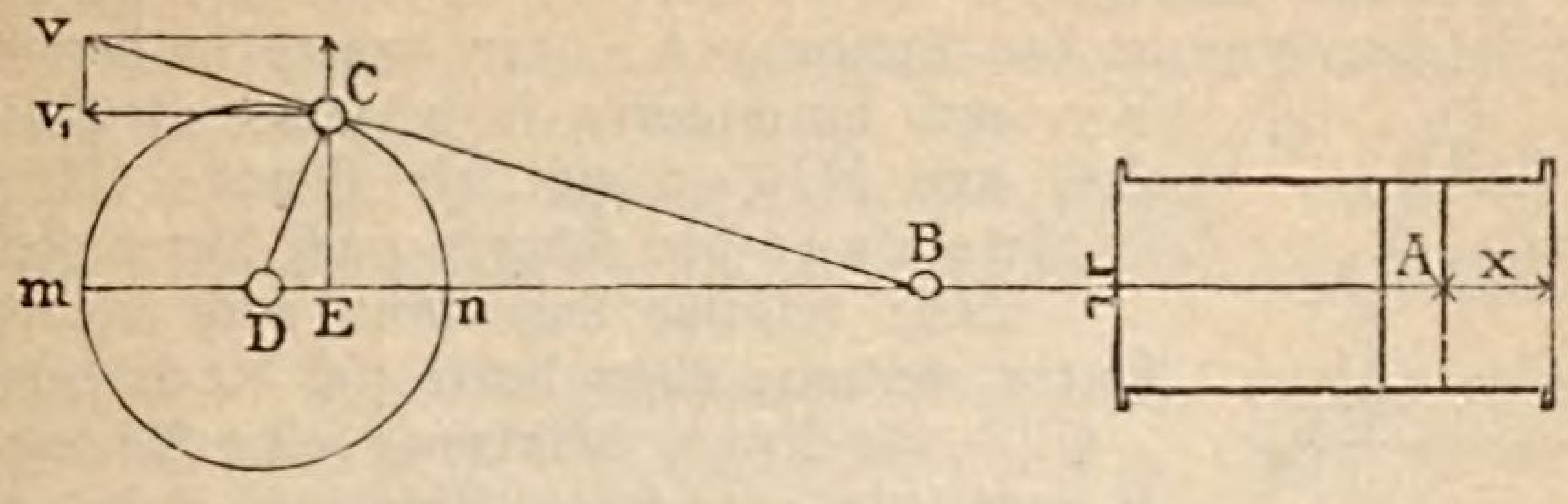
6. **Kurbelbewegung.** Durch sie wird eine geradlinig hin- und hergehende Bewegung in eine drehende verwandelt oder umgekehrt. Folgende Zeichnung deutet eine solche Uebertragung bei einer Dampfmaschine an. Es ist A der Dampfkolben, AB die Kolbenstange, BC die Schubstange, CD die Kurbel und D die Kurbelwelle. Während der Kolben einen Hin- und Hergang macht, legt der Kurbelzapfen einen Kreis zurück, dessen Durchmesser mn der Hub ist. Mithin beträgt die Kurbellänge die Hälfte des Hubes.

Die Kurbel bilde den Winkel a mit der Achsenrichtung AD und drehe sich gleichförmig mit einer Geschwindigkeit $Cv = v$, so hat die Seitengeschwindigkeit $Cv_1 = v_1$, parallel zur Achsenrichtung, den Wert

$$v_1 = v \sin a.$$

Für $a = 0$ und $= 180^0$ wird $v_1 = 0$; daher nennt man die ent-

sprechenden Lagen n und m des Kurbelzapfens tote Punkte. Für $a = 90^0$ wird $v_1 = v$ ein Maximum.



Der mittlere Wert von v_1 bedeutet die Geschwindigkeit, mit welcher die Projektion E des Kurbelzapfens den Durchmesser mn gleichförmig in derselben Zeit durchläuft, mit welcher der Halbkreis $r \pi$ vom Kurbelzapfen durchlaufen wird. Dieser mittlere Wert V ist daher

$$V = \frac{2}{\pi} v.$$

Mit Rücksicht auf die Bewegung des Kolbens unterscheidet man:

a) Schubstange unendlich lang. In diesem Fall stimmt die Bewegung des Kolbens überein mit derjenigen der Projektion des Kurbelzapfens auf der Achsenrichtung mn. Es hat daher der Kolben, in gleichen Abständen von seiner mittleren Lage, gleiche Geschwindigkeit, sowohl beim Vor- als Rückwärtsgehen.

b) Schubstange von gewöhnlicher Länge. Bewegt sich der Kurbelzapfen vom toten Punkt n aus nach C (s. ob. Fig.), so durchläuft der Kolben einen größern Weg, wenn die Kurbel durch den ersten und vierten Quadranten geht, als wenn sie den zweiten und dritten durchläuft. Es sei S die Länge der Schubstange und x der Weg des Kolbens, von dem Ende des Hubes an gerechnet, welches die größere Entfernung von der Kurbelwelle hat; so ist

$$x + AB + BD = AB + BC + CD.$$

Die Projektion E teilt die Linie DB in die zwei Stücke $L \cos a$ und $\sqrt{S^2 - L^2 \sin^2 a}$, abgeleitet aus dem Dreieck BCE. Daher wird

$$x = L - L \cos a + S - \sqrt{S^2 - L^2 \sin^2 a}.$$

Beisp. Es sei die Schubstange 4mal länger als die Kurbel, und der Winkel $a = 90^0$, so erhält man als Weg des Kolbens für die erste Viertelsdrehung, da $\cos 90 = 0$ und $\sin 90 = 1$:

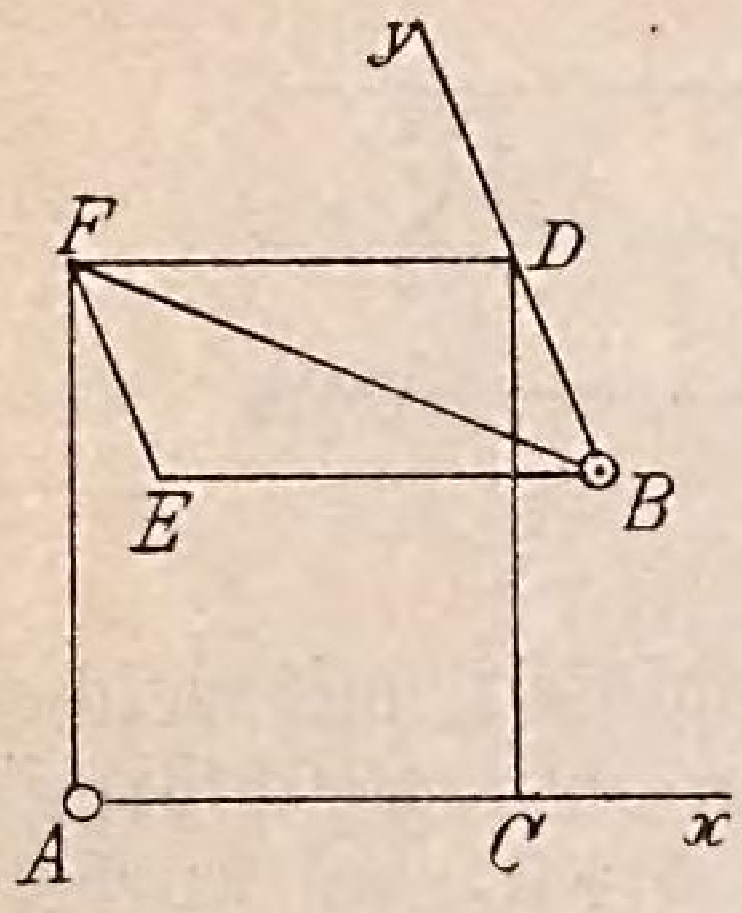
$$x = L + 4\,L - \sqrt{16\,L^2 - L^2} = 1{,}128\ L.$$

Der Kolben legt somit bei der ersten und letzten Viertelsdrehung einen Weg = 1,128 L und während der zweiten und dritten Viertelsdrehung einen solchen = 0,872 L oder auf der einen Seite 0,564, auf der andern 0,436 des ganzen Hubes zurück.

Teilt man den Kurbelkreis nCm in eine Anzahl kleiner gleicher Teile und berechnet die entsprechenden Zunahmen von x, so zeigt es sich, daß diese Zunahmen von n aus bis zu jener Stelle wachsen, wo

die Kurbel senkrecht auf der Schubstange steht. Daher ist auch für diese Lage die Geschwindigkeit des Kolbens ein Maximum.

7. **Relative Bewegung.** Zwei Körper, A und B, bewegen sich gleichzeitig, der eine in der Richtung Ax, der andere in der Richtung By, und durchlaufen in derselben Zeit die Wege AC und BD; so gibt die Gerade CD die relative Lage der Körper nach dieser Zeit an.



Diese relative Lage kann auch wie folgt erhalten werden: Man denke sich einen der Körper, z. B. A, in Ruhe, übertrage seine Bewegung auf B nach entgegengesetzter Richtung, mache also BE gleich und parallel mit AC; so durchläuft B in dieser Zeit die Diagonale BF des Parallelogramms BDFE. Dadurch wird die Gerade AF, welche gleich und parallel mit CD ist, die relative Lage des Körpers angeben.

Sind die Bewegungen gleichförmig und AC und BD die absoluten Geschwindigkeiten, so wird BF zur relativen Geschwindigkeit.

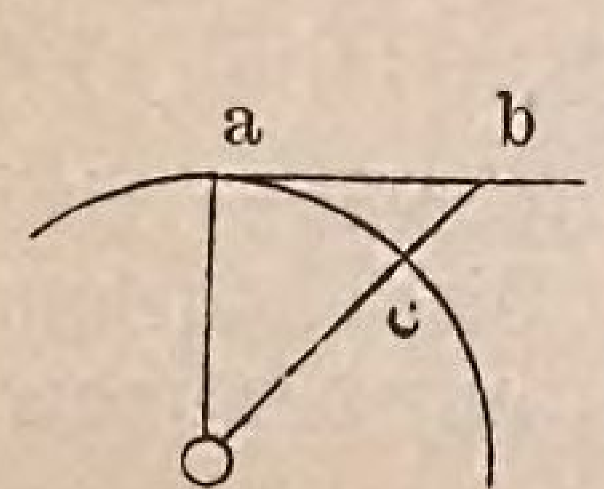
Sind By und Ax parallel, so wird die relative Geschwindigkeit BF gleich der Summe oder Differenz der Seitengeschwindigkeiten, je nachdem die Körper aus einander oder gegen einander sich bewegen.

16. Centrifugalkraft.

Bewegt sich ein materieller Punkt in einem Kreisbogen, so hat er in jedem Augenblick das Bestreben, in der Richtung einer Tangente ab an diesen Bogen geradlinig fortzuschreiten. Könnte er den Weg ab längs der Tangente einschlagen, so würde er sich dabei um den Abstand bc vom Mittelpunkt des Bogens entfernen. Die Kraft, welche ihn vom Bogen nach der Tangente abzulenken sucht, heißt Centrifugalkraft oder auch Fliehkraft. Ihr gleich und entgegengesetzt ist die Centripetalkraft, welche ihn zwingt, im Kreisbogen sich zu bewegen. Es sei

v die Geschwindigkeit der Bewegung,
r der Halbmesser des Bahnelements und
f die Beschleunigung, welche die Centrifugalkraft dem Körper beizubringen vermag; so findet man den Wert f durch die Formel

$$f = \frac{v^2}{r}.$$



Die Centrifugalkraft ist aber dieser Beschleunigung proportional: daher wächst die Centrifugalkraft mit dem Quadrat der Geschwindigkeit und nimmt ab, wie der Halbmesser der Krümmung zunimmt.

Beisp. 1. Der Ring eines Schwungrades habe 2 m Halbmesser und bewege sich mit 12 m Geschwindigkeit; wie groß ist die Centrifugalkraft der einzelnen Teile des Schwungradringes?

Die Beschleunigung, welche die Centrifugalkraft hervorbringt, wird

$$f = \frac{12 \cdot 12}{2} = 72 \text{ m}.$$

Die Beschleunigung beim freien Fall ist 9,81 m; mithin wird die Beschleunigung der Centrifugalkraft 72 : 9,81 = 7,33mal größer als die der Schwere. Es ist also auch die Centrifugalkraft, welche an irgend einem Teile des Ringes wirkt, 7,33mal größer als das Gewicht dieses Teiles.

Beisp. 2. In dem cylindrischen Gefäß einer Centrifugaltrockenmaschine befinden sich nasse Tücher oder Garne. Dieses Gefäß drehe sich um eine vertikale Achse 800mal per Minute. Dadurch wird jeder Wassertropfen, der am nassen Stoff vermittelst der Adhäsion anhaftet, von der Centrifugalkraft ergriffen und durch die Oeffnungen des Gefäßmantels hinausgetrieben. Wie groß ist diese Centrifugalkraft für einen Wassertropfen, der um 0,24 m von der Achse absteht?

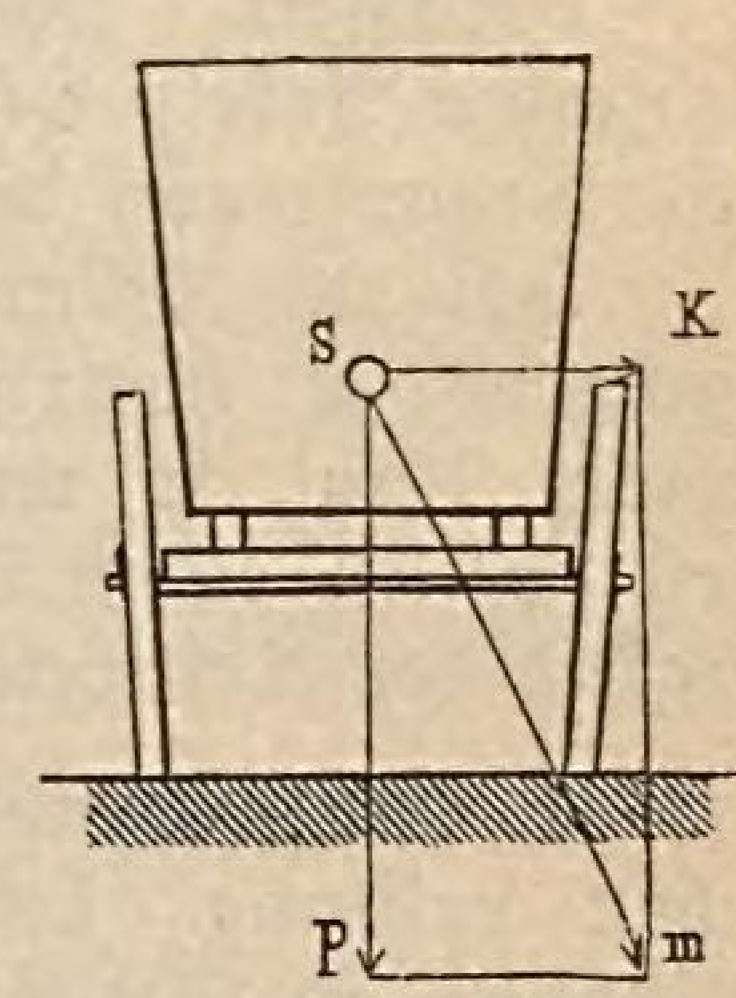
Umdrehungsgeschwindigkeit des Tropfens $\frac{2 \cdot 0{,}24 \cdot 3{,}14 \cdot 800}{60} = 20{,}1$ m.

Beschleunigung durch die Centrifugalkraft . $\frac{20{,}1 \cdot 20{,}1}{0{,}24} = 1683$ m.

Nun verhält sich die Centrifugalkraft zum Gewicht des Wassertropfens wie 1683 zu 9,81. Mithin ist die Centrifugalkraft 1683 : 9,81 = 172mal größer als das Gewicht des Tropfens.

Beisp. 3. Ein Wagen bewege sich in einer Krümmung von 3,6 m Halbmesser mit 4 m Geschwindigkeit. Der Wagen wird durch die Centrifugalkraft nach der äußeren Seite der Bahn getrieben; daher ist die Beschleunigung dieser Kraft

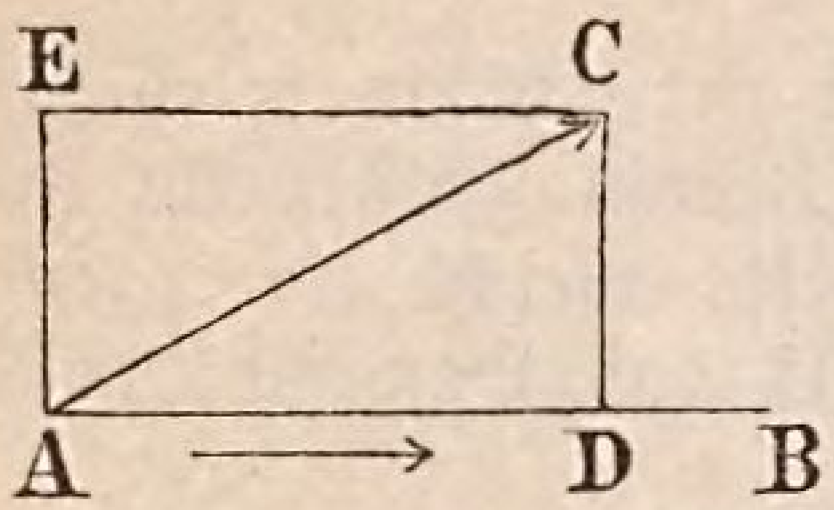
$$f = \frac{4 \cdot 4}{3{,}6} = 4{,}44 \text{ m}.$$



Der Schwerpunkt des Wagens sei in s. An diesem Punkt wirkt das Gewicht des Wagens vertikal abwärts und die Centrifugalkraft K horizontal auswärts. Man mache sK = 4,44 m und sP = 9,81 m, errichte über diesen Linien ein Rechteck und ziehe die Diagonale sm, so stellt diese Diagonale die Beschleunigung einer Kraft dar, welche als Mittelkraft des Gewichtes und der Centrifugalkraft anzusehen ist. Durchschneidet sm den Boden innerhalb der Räder, so bleibt der Wagen aufrecht; geht sm durch ein Radgeleise hindurch, so ist der Wagen auf dem Punkt umzuwerfen; geht sm außerhalb des Radgeleises in den Boden, so muß der Wagen umwerfen.

17. Mechanische Arbeit.

1. **Begriff von mechanischer Arbeit.** Es werde ein Widerstand längs eines Weges überwunden, so daß die Richtung des Widerstandes und des Weges zusammenfallen; so heißt das Produkt aus Widerstand und Weg mechanische Arbeit.



Statt des Widerstandes kann man auch die Kraft in Rechnung bringen, welche ihn überwindet. Alsdann muß man sich die Richtung der Kraft übereinstimmend mit der Richtung des Weges denken. Es sei z. B. AB der Weg, welchen der Angriffspunkt A durchlaufen soll, und AC die wirkende Kraft. Man zerlege AC in die rechtwinkligen Seitenkräfte AD und AE, so arbeitet die Seitenkraft AE nicht, weil sie in ihrer eigenen Richtung keinen Weg durchläuft. Es ist also nur AD thätig. Die Arbeit ist daher = Weg AB mal Seitenkraft AD.

Aus obigem geht auch hervor, daß Kraft und Arbeit verschiedene Begriffe sind. Kraft ist nur ein Faktor der Arbeit; der andere Faktor ist immer ein Weg, der von der Kraft durchlaufen wird.

2. **Arbeitseinheit.** Beinahe allgemein gebraucht man das Kilogramm als Krafteinheit und den Meter als Wegeinheit. Die Arbeit, welche eine Kraft von 1 kg längs eines Weges von 1 m verrichtet, ist somit die Arbeitseinheit und wird Kilogramm-Meter oder Meter-Kilogramm (mkg) genannt. Die Arbeit von 1 Pfund längs eines Weges von 1 Fuß heißt Pfund-Fuß oder Fuß-Pfund.

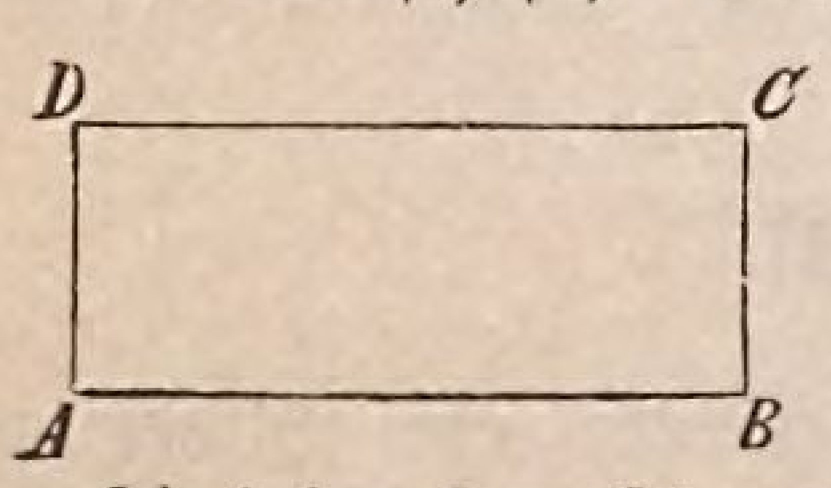
So heißt z. B. eine Arbeit von 20 mkg eine solche, welche ein Gewicht von 20 kg 1 m oder von 10 kg 2 m oder von 5 kg 4 m rc. hoch zu heben im stande ist. Dabei bleibt die Arbeit dieselbe, ob sie in kürzerer oder längerer Zeit verrichtet wird.

3. **Effekt.** Man heißt häufig die in 1 Sekunde stetig hervorgebrachte Arbeit Effekt. Bei gleichförmiger Bewegung ist der Effekt das Produkt aus der Kraft in die Geschwindigkeit.

Hat ein Zahnrad z. B. einen Effekt von 100 mkg auf ein anderes Zahnrad zu übertragen und ist die Geschwindigkeit der Teilkreise der Räder 1 m, so werden die Zähne des ersten Rades gegen die Zähne des zweiten einen Druck = 100 kg ausüben. Wäre aber die Geschwindigkeit der Teilkreise 2 m, so würde jener Druck nur 50 kg sein.

4. **Maschinenpferd.** Diese Einheit wird, im Gegensatz zur tierischen Leistung, konstant angenommen, so in England zu 550 Fuß-Pfunden, in Deutschland, Frankreich rc. zu 75 mkg, welcher Annahme sich auch dieses Buch anschließt. Statt Maschinenpferd sagt man abgekürzt auch nur Pferd.

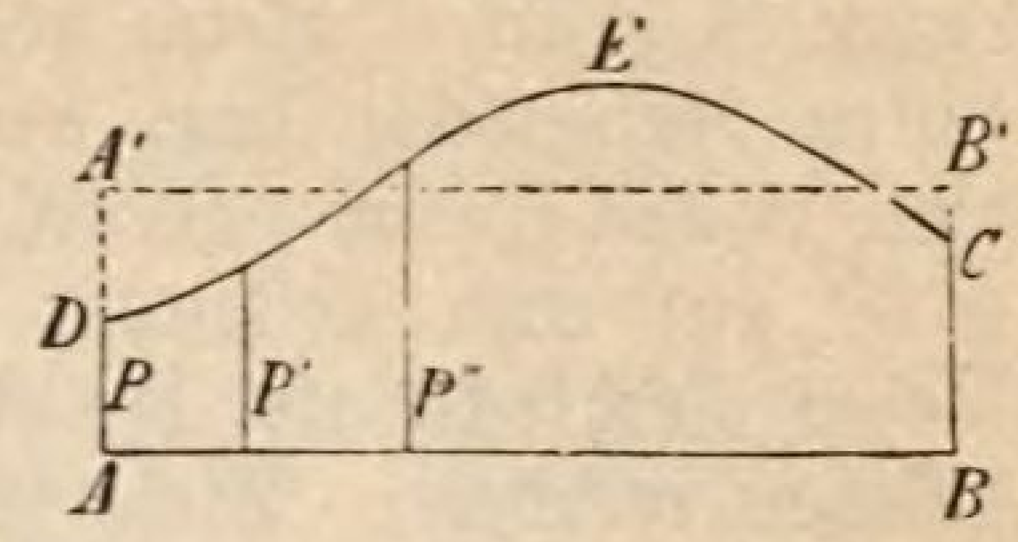
5. **Graphische Darstellung der Arbeit.** Es sei



a) die Kraft konstant. Man trage den zurückgelegten Weg als geradlinige Abscisse AB und die Kraft als Ordinate AD, senkrecht zu AB, auf, so ist die Fläche AB . AD des Rechtecks ABCD das Maß der Arbeit.

b) die Kraft veränderlich. Die Werte P, P′, P″, ... der veränderlichen Kraft trage man als Ordinaten in den entsprechenden Punkten des Weges AB auf, verbinde die Endpunkte der Ordinaten

durch eine krumme Linie DEC, so stellt die Fläche der Figur ABCD die Arbeit dieser Kraft vor. Wenn die konstante Kraft AA′ längs des Weges AB die gleiche Arbeit verrichtet, wie die veränderlichen durch diesen Weg, so heißt diese konstante Kraft die mittlere Intensität jener veränderlichen Kraft. In diesem Fall muß sein:



Rechteck ABB′A′ = Fläche ABCED; folglich

$$\text{mittlere Intensität } AA' = \frac{\text{Fläche } ABCED}{AB}.$$

Beisp. 1. Ein Dampfhammer von 2000 kg Gewicht mache per Minute 80 Schläge bei einer Hubhöhe von 0,4 m. Wie groß ist der auf das Heben des Hammers verwendete Effekt?

Arbeit bei einmaligem Heben $2000 \,.\, 0{,}4 = 800$ mkg.

Arbeit per Sekunde $\frac{800 \,.\, 80}{60} = 1067$ mkg $= 14{,}2$ Pferde.

Beisp. 2. Eine einfach wirkende Pumpe mache in 1 Minute 40 Hübe, und liefere per Hub 24 Liter Wasser auf die Höhe von 20 m; wie groß ist der Effekt der Pumpe ohne Rücksicht auf die Nebenhindernisse?

Die Pumpe liefert per Sekunde $\frac{24 \,.\, 40}{60} = 16$ kg.

Folglich ihr Effekt (per Sekunde) $16 \,.\, 20 = 320$ mkg.

Anzahl Pferde . . . . $320 : 75 = 4{,}26$.

Beisp. 3. Ein Wagen bedürfe auf horizontaler Straße eine mittlere Zugkraft = 300 kg, er werde mit einer Geschwindigkeit von 0,9 m fortgezogen; wie groß ist der Effekt der Zugtiere?

Effekt $= 300 \,.\, 0{,}9 = 270$ mkg $= 3{,}6$ Pferde.

Beisp. 4. Ein Arbeiter schneide Holz mit einer Handsäge. Der mittlere Druck, den er beim Hin- und Herfahren auf die Säge in der Richtung der Bewegung auszuüben hat, sei 10 kg. Er mache 70 Schnitte in der Minute bei einem Weg des Blattes von je 0,33 m. Welches ist der Effekt dieser Arbeit?

Geschwindigkeit des Sägeblattes $\frac{2 \,.\, 0{,}33 \,.\, 70}{60} = 0{,}77$ m.

Daher Arbeit per Sekunde . . $10 \,.\, 0{,}77 = 7{,}7$ mkg.

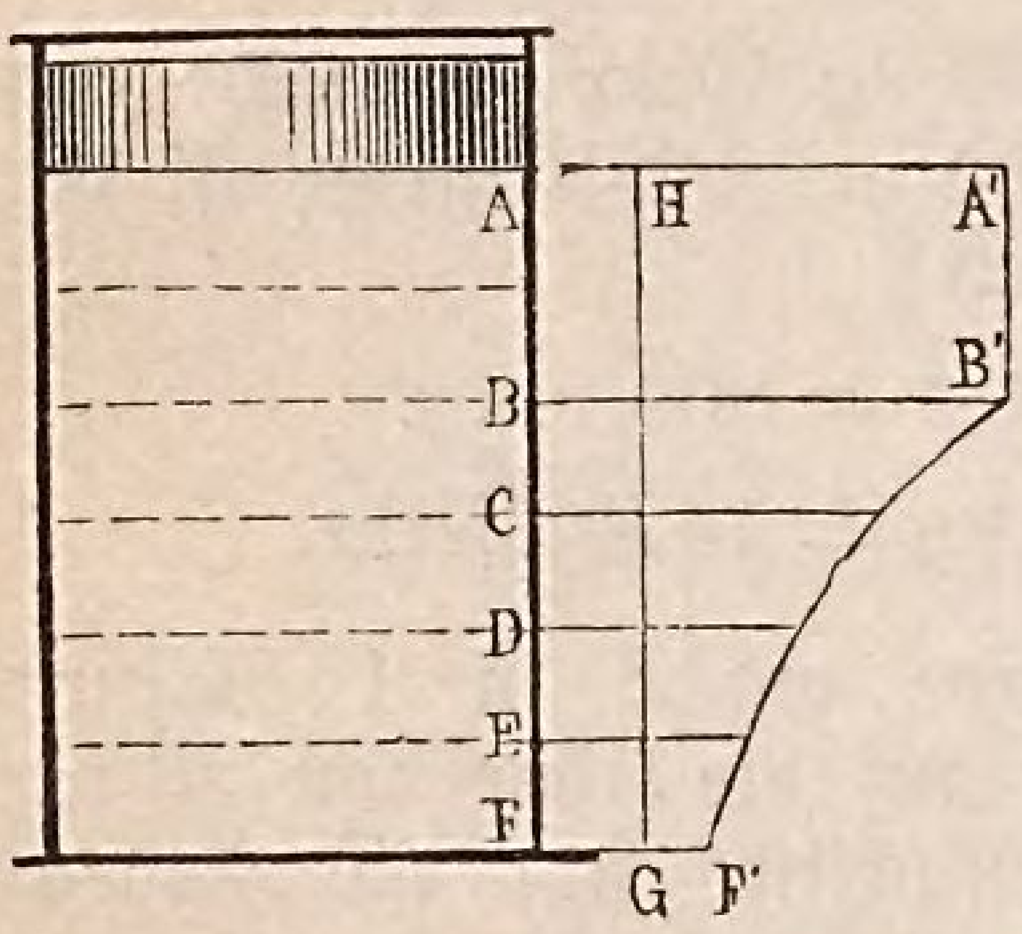
Beisp. 5. Arbeit einer Dampfmaschine mit Expansion. Der Durchmesser des Dampfcylinders sei 0,36 m, der Hub 0,9 m. Nachdem der Kolben 1/3 des Weges zurückgelegt hat, werde der Dampf abgesperrt, so daß er durch Expansion wirkt. Die Spannung des Dampfes vor der Absperrung sei 5 Atmosphären, der Gegendruck auf den Kolben 1,2 Atm. Welche Arbeit verrichtet der Dampf während eines Hubes?

Es ist der Querschnitt des Dampfcylinders . . . . = 1018 qcm.
Der Druck des Dampfes per 1 qcm Fläche und 1 Atm. = 1,033 kg.
Mithin der Druck des Dampfes auf 1018 qcm Fläche
bei 5 Atmosphären . . . . . . $1{,}033 \,.\, 1018 \,.\, 5 = 5258$ „
Und der Gegendruck auf den Kolben $1{,}033 \,.\, 1018 \,.\, 1{,}2 = 1262$ „

Um die Arbeit des Dampfes zu finden, teile man den Cylinderraum AF in 6 gleich hohe cylindrische Schichten. Längs der beiden ersten Raumteile von der Höhe AB = 0,3 m wirkt der Dampf mit dem vollen Druck von 5258 kg. Trägt man diesen Druck als Ordinate AA' auf und vollendet das Rechteck AA'B'B, so kann die Fläche dieses Rechtecks als die Arbeit des Dampfes vor der Absperrung angesehen werden. Diese Arbeit ist daher 0,3 . 5258 = 1577 mkg.

Bewegt sich der Kolben von B nach C, so geht der Dampf aus dem Raum 2 in den Raum 3 über. Da der Druck des Dampfes sehr nahe im gleichen Verhältnis abnimmt wie seine Ausdehnung wächst, so wird der Dampfdruck in C sehr nahe $^2/_3$ des vollen Druckes betragen. Auf gleiche Weise findet man den Druck in D, E und F. Daher in

	C	D	E	F
Druck	3505;	2629;	2103;	1752 kg.



Werden diese Kräfte in ihren respektiven Punkten als Ordinaten aufgezeichnet, so erhält man eine Figur BB'F'F, welche auf der einen Seite durch die Kurve B'F' begrenzt ist und deren Flächeninhalt die Arbeit ausdrückt, welche der Dampf längs des Weges BF leistet. Diese Fläche kann aber berechnet werden, indem man die sie bildenden 4 Teile als Trapeze ansieht. Unter Anwendung der Simpson'schen Regel (Seite 25) erhält man als Arbeit, da BC = CD = . . = 0,15 m:

$$\frac{0,15}{3}\,[5258 + 1752 + 4\,(3505 + 2103) + 2\,.\,2629] = 1735 \text{ mkg.}$$

Daher die Gesamtarbeit während eines Hubes ohne Rücksicht auf den Gegendruck

$$1577 + 1735 = 3312 \text{ mkg.}$$

Man ziehe die Gerade GH parallel zu AF im Abstande AH = 1262 kg, so stellt die Rechtecksfläche AHGF die Arbeit des Gegendruckes während eines Hubes dar. Diese Arbeit ist daher

$$0,9\,.\,1262 = 1136 \text{ mkg.}$$

Folglich die Arbeit des Dampfes, ohne Rücksicht auf die Reibung des Dampfkolbens, der Kolbenstange in der Stopfbüchse ꝛc.

$$3312 - 1136 = 2176 \text{ mkg.}$$

Macht die Maschine 55 Hin- und Hergänge per Minute, so ist

$$\text{Arbeit per Sek. } \frac{2176\,.\,2\,.\,55}{60} = 3989 \text{ mkg} = 53,19 \text{ Pferde.}$$

6. **Absoluter und nützlicher Effekt der Motoren.** Die gewöhnlichen Motoren sind das Wasser, die Wärme (Dampf, erhitzte Gase), der Wind, die Tiere und Menschen. Diese Motoren wirken auf gewisse Maschinen und Maschinenteile (Receptoren), wie Wasserräder, Turbinen, Dampfmaschinen ꝛc., welche ebenfalls Motoren genannt werden.

Die leblosen Motoren können per Sekunde eine ganz bestimmte

Arbeitsgröße entwickeln, welche man den absoluten Effekt nennt. Derjenige Teil dieser Arbeit, welcher unter den obwaltenden Umständen auf den Receptor übergeht, heißt nützlicher Effekt, und das Verhältnis zwischen dem nützlichen und absoluten Effekt Wirkungsgrad des Motors.

7. **Leistung lebender Motoren.**	Druck.	Geschwindigk.	Effekt.	Std. im Tag.
Arbeiter, Gewichte hebend von Hand	20 kg	0,20 m	4,0 mkg	6
Arbeiter, Erde aufwerfend . . .	4	0,50	2,0	9
Arbeiter an der Kurbel	10	0,75	7,5	8
Mann an der Feuerspritze, in Pausen	12	1,30	15,6	—
Pferd am Wagen	53	1,00	53	8
Ochse „ „	58	0,70	40,6	8
Esel am Göpel	14	0,80	11,2	8

8. **Kraftbedarf verschiedener Maschinen.**	Pferde.
Mahlgang mit Steinen von 1,4 m Durchmesser	4,0
Sägmühle mit 1 Sägblatt, 88 Schnitte und 0,0488 qm Schnittfläche in Eichenholz per Minute	3,3
Sägmühle mit 4 Sägblättern, 90 Schnitte und zusammen 0,161 qm Schnittfläche in Eichenholz per Minute . . .	4,5
Cirkularsäge, 0,70 m Durchmesser, 266 Umgänge und 0,18 qm Schnittfläche in Eichenholz per Minute	3,6
Cirkularsäge, 0,70 m Durchmesser, 244 Umgänge und 0,75 qm Schnittfläche in Tannenholz per Minute	7,4
Fourniersäge, 1,20 m Hub, 180 Schnitte und 0,167 qm Schnittfläche (beide Flächen zählend) per Minute	0,7
Bandsäge, Schnitthöhe 24 cm, Schnittfläche in der Stunde 7,7 qm in Eichenholz	1,0
Holzhobelmaschine, 600 Umgänge per Minute	1,5
Holzfalzmaschine, 600 Umgänge per Minute	1,0
Schleifsteine, 2 m Durchmesser, 80 Umgänge per Minute .	2,5—3,5
Fabrik zum Rauhen der Tücher, 50 Maschinen, zusammen .	20
Wollenspinnerei mit 2720 Spindeln	18
Baumwollspinnerei, 26000 Spindeln Selbstspinner, Garn Nr. 30—50	250
Baumwollenweberei, 60 Webstühle für Cretonne, 1,20 m breit	8,0
Seidenbandweberei, 80 Stühle	10
Stampfwerk für Papierzeug mit 16 Stampfern	2,7
Holländer für Papierzeug mit 220 Umgängen per Minute .	3—4
Maschine für Papier ohne Ende, 22 m Papier per Minute .	6,0
Vertikaler Oelmühlstein, 3000 kg Gewicht, 6 Umgänge der vertikalen Achse	2,7
Cylindergebläsmaschine, 1,3 m Durchm., 0,58 m Kolbengeschw. und 0,316 kbm Luft per Sek. (Quecksilberstand 0,04 m) .	9,0
Stirnhammer, 2800 kg Gewicht, 75 Schläge per Minute .	30
Aufwerfhammer, 700 kg Gewicht, 95 Schläge per Minute .	11
Hammer für Maschinenteile, 40 kg Gewicht, 324 Schläge per Minute	5,9

	Pferde.
Walzwerk, 6 Paar Walzen für Grobeisen mit 60 und 8 Paar Walzen für Kleineisen mit 140 Umgängen per Minute .	50—60
Walzwerk für dünnes Eisenblech, 2 Walzenpaare mit 50 Umgängen per Minute, zusammen	25—30
Blechschere, Blechdicke 2,5 cm, Schnittfläche in der Stunde 2,9 qm	7,2
Leitspindeldrehbank, Gewicht der Späne in der Stunde 2,22 kg	0,34
Schraubenschneidemaschine für Schrauben von $^1/_4$—1 $^1/_4$″ engl.	1,34
Kombinierter Lauf- und Drehkran mit Seiltrieb	5,65

18. Lebendige Arbeit.

1. **Begriff von lebendiger Arbeit.** Ein Körper falle durch eine Höhe h frei herab und erlange dadurch eine Geschwindigkeit v, so ist, wenn g die Geschwindigkeit nach der ersten Sekunde bezeichnet (S. 63), $v^2 = 2gh$.

Das Gewicht P des Körpers ist die Kraft, welche auf ihn während der ganzen Dauer der Bewegung einwirkt; folglich wird die am Körper längs des Weges h verrichtete Arbeit sein

$$Ph = \frac{Pv^2}{2g}.$$

Dieser Wert zeigt an, welche Arbeitsgröße auf den Körper einwirken mußte, um ihm von der Ruhe aus eine Geschwindigkeit v beizubringen. Die Arbeitsgröße ist somit auf die Beschleunigung der Masse, auf Ueberwindung der Trägheit und nicht auf Ueberwindung eines äußern Widerstandes verwendet worden; sie ist in der Masse angesammelt, so daß der Körper zur Ueberwindung eines Widerstandes genau eben so viel Arbeit abgeben kann, bis seine Geschwindigkeit erschöpft ist. Diese Arbeitsgröße heißt *lebendige* Arbeit des Körpers.

Wäre der Uebergang des Körpers aus der Ruhe zur Geschwindigkeit v durch eine andere konstante oder auch veränderliche Kraft, schnell oder langsam, bewirkt worden, so hätte der Körper die nämliche Arbeitsgröße in sich aufgenommen.

2. **Aenderung der lebendigen Arbeit.** Hat der Körper bereits eine Geschwindigkeit v und wird dieselbe bis auf den Betrag V erhöht, so entspricht dieser Steigerung der Geschwindigkeit eine Zunahme an lebendiger Arbeit gleich

$$\frac{P}{2g}(V^2 - v^2).$$

Geht die größere Geschwindigkeit V in die kleinere v über, so bezeichnet dieser Ausdruck die Abnahme an lebendiger Arbeit.

Beisp. 1. Welche Arbeit muß das Pulvergas in einem Geschütze entwickeln, um einem Geschoß von 3 kg Gewicht eine Geschwindigkeit von 500 m per Sekunde zu geben?

Es ist . . . . . . $P = 3$ kg; $v = 500$ m; $g = 9{,}81$ m.

Arbeit des Pulvergases . . . . . $\frac{3 \cdot 500 \cdot 500}{2 \cdot 9{,}81} = 38266$ mkg.

Weg des Geschosses in der Röhre, angenommen = 0,9 m.
Mittlerer Druck des Pulvergases . 38266 : 0,9 = 42518 kg.
Nun sei der Querschnitt des Geschosses . . . = 40 qcm,
so wird der Gasdruck per 1 qcm . 42518 : 40 = 1063 kg.
Nun ist der Druck einer Atmosphäre per 1 qcm = 1,033 „
Mithin der Gasdruck . . . . . . 1063 : 1,033 = 1030 Atm.

Beisp. 2. Welche Arbeit muß der Dampf einer Lokomotive entwickeln, um dieselbe aus der Ruhe in eine Geschwindigkeit von 10 m per Sekunde zu versetzen; wenn angenommen wird, daß nur die Masse der Lokomotive zu beschleunigen, keineswegs aber andere Widerstände zu überwinden seien?

Es sei das Gewicht der Lokomotive 25 Tonnen = 25000 kg.

Folglich die lebendige Arbeit . . $\frac{25000 \,.\, 10 \,.\, 10}{2 \,.\, 9{,}81} = 127421$ mkg.

Beisp. 3. Wenn diese Lokomotive einen Weg von 200 m durchlaufen mußte, bis sie die Geschwindigkeit von 10 m erlangen konnte und wenn die Reibung $^1/_{100}$ vom Gewicht der Lokomotive beträgt; wieviel Arbeit mußte längs dieses Weges auf die Reibung und die Beschleunigung der Masse verwendet werden?

Konstanter Reibungswiderstand . . 25000 : 100 = 250 kg.
Arbeit, welche dieser Widerstand auf dem Wege von
200 m verbraucht . . . . 250 . 200 = 50000 mkg.
Arbeit zur Beschleunigung der Masse (Beispiel 2) = 127421 „
Gesamtarbeit . . . . 127421 + 50000 = 177421 „

Mithin wird beim Ingangbringen der Lokomotive etwa $2^1/_2$mal mehr auf Beschleunigung der Masse als auf die Reibung verwendet.

Ist die zu dieser Bewegung nötige Zeit = 40 Sekunden, und arbeitet die Maschine konstant, so wird

Arbeit per Sek. 177421 : 40 = 4435 mkg = 59,1 Pferde.

Soll von dem Augenblick an, da die Geschwindigkeit der Lokomotive 10 m beträgt, diese Geschwindigkeit konstant bleiben, so ist nur die Reibung zu überwinden. Hierfür ist

Effekt = 250 . 10 = 2500 mkg = 33,3 Pferde.

Beisp. 4. Wie weit könnte diese Lokomotive, vermöge der aufgehäuften lebendigen Arbeit sich fortbewegen, bis ihre Bewegung durch die Reibung erschöpft wäre?

Die lebendige Arbeit der Lokomotive ist = 127421 mkg,
der konstante Widerstand . . . . . = 250 kg.
Daher der gesuchte Weg 127421 : 250 = 509,7 m.

Beisp. 5. Wie groß ist die Arbeit, welche zum Betrieb einer Feuerspritze nötig ist, die per Sekunde 10 Liter Wasser mit einer Geschwindigkeit von 25 m fortschleudert?

Gewicht von 10 Liter Wasser . . . . = 10 kg.

Daher Arbeit per Sekunde . . $\frac{10 \,.\, 25 \,.\, 25}{2 \,.\, 9{,}81} = 318{,}5$ mkg.

Die Arbeit, welche auf die verschiedenen Widerstände beim Durchgang des Wassers durch die Pumpen und Röhren verwendet werden muß, ist hier nicht inbegriffen.

Beisp. 6. Wie groß ist die Arbeit, welche in einem fließenden Wasser liegt, wenn die Wassermenge per Sekunde 1 kbm und die Geschwindigkeit derselben = 2 m beträgt?

Es ist das Gewicht von 1 kbm Wasser . . = 1000 kg.

Folgl. Arbeit per Sek. $\frac{1000 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 9{,}81} = 203{,}9$ mkg = 2,72 Pferde.

Beisp. 7. Welche lebendige Arbeit ist in dem gußeisernen Ringe eines Schwungrades enthalten, welches 40 Umgänge per Minute macht, 5,6 m Durchmesser und 0,03 qm Ringquerschnitt hat?

Gewicht von 1 kbm Gußeisen, angenommen = 7200 kg.

Gewicht des Ringes 0,03 . 5,6 . 3,14 . 7200 = 3798 „

Geschwindigkeit desselben . . . $\frac{5{,}6 \cdot 3{,}14 \cdot 40}{60} = 11{,}72$ m.

Lebendige Arbeit des Ringes $\frac{3798 \cdot 11{,}72 \cdot 11{,}72}{2 \cdot 9{,}81} = 26590$ mkg.

Somit Arbeit, auf 1 Sekunde reduciert . = 354,5 Pferde.

Beisp. 8. Eine horizontal liegende Dampfmaschine habe einen Hub = 1,1 m und mache 40 Umgänge per Minute. Das Gewicht der hin- und hergehenden Massen (Kolben, Kolben- und Schubstange 2c.) sei = 260 kg. Diese Massen werden bei jedem einfachen Hub beschleunigt und verzögert. Es muß also in der Minute 80mal lebendige Arbeit diesen Massen zugeführt und entzogen werden. Wie groß ist diese Arbeit?

Da der Durchmesser des Kurbelkreises = 1,1 m, so ist der Weg des Kurbelzapfens bei einem Umgange = 1,1 . 3,14 = 3,45 m und bei 40 Umgängen, also in der Minute = 3,45 . 40 = 138 m, was auf die Sekunde 2,3 m ausmacht. Die größte Geschwindigkeit der hin- und hergehenden Massen tritt ungefähr in der Mitte des Hubes ein, wo sie gleich ist der Geschwindigkeit 2,3 m des Kurbelzapfens. Folglich ist die lebendige Arbeit der hin- und hergehenden Teile

$$\frac{260 \cdot 2{,}3 \cdot 2{,}3}{2 \cdot 9{,}81} = 70{,}1 \text{ mkg.}$$

Diese Dampfmaschine habe eine Leistung von 2800 mkg per Hub; folglich macht obige lebendige Arbeit annähernd $^1/_{40}$ von der Leistung per Hub aus. Diese lebendige Arbeit ist nicht verloren, sondern springt bei jedem Hub in das Schwungrad über und wieder zurück, wodurch die Bewegung des Schwungrades etwas ungleichförmig wird.

3. **Andere Bezeichnung der lebendigen Arbeit.** Ersetzt man das Verhältnis P : g durch die Masse M des Körpers (S. 66), so erhält man als lebendige Arbeit

$$\frac{1}{2} M v^2,$$

d. h. das halbe Produkt aus der Masse und dem Quadrat der Geschwindigkeit des Körpers.

19. Trägheitsmoment eines Körpers.

1. **Begriff vom Trägheitsmoment.** Ein Körper drehe sich um eine feste Achse. Nun seien m, m_1 die Massen zweier Teile des Körpers, v, v_1 ihre Geschwindigkeiten und r, r_1 ihre Abstände von der Achse. Man nehme an, es sei auf beide Teile gleich viel lebendige Arbeit übertragen worden, es sei also $mv^2 = m_1 v_1^2$; so werden diese Teile auch einen gleichen Einfluß auf die Erhaltung der Bewegung ausüben. Setzt man in diese Gleichung den Wert von v_1 aus der Proportion $v : v_1 = r : r_1$, so folgt als Bedingung eines gleichen Einflusses auf die Drehung

$$(1) \qquad mr^2 = m_1 r_1^2.$$

Das Produkt aus der Masse eines Teilchens und dem Quadrat seines Abstandes von der Drehachse heißt Trägheitsmoment des Teilchens.

Sind m_2, m_3, . . weitere Massenteile, r_2, r_3 . . ihre Abstände von der Achse, so ist das Trägheitsmoment T des ganzen Körpers die Summe aus den Trägheitsmomenten der einzelnen Teile, d. h. es ist

$$(2) \qquad T = mr^2 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots$$

Die Bedingung der Gleichung (1) gilt noch, wenn man statt m, m_1 Raum-, Flächen- oder Linienteile in Rechnung bringt, welche den Maßen proportional sind.

2. **Trägheitsmoment eines Rechteckes.** Die Seiten des Rechteckes seien b, h; die Achse gehe durch eine der Seiten b, so ist das Trägheitsmoment der Figur

$$(3) \qquad T = \frac{1}{3} b h^3.$$

Geht die Achse mitten durch das Rechteck, parallel zur Seite b, so wird das Trägheitsmoment

$$(4) \qquad T = \frac{1}{12} b h^3.$$

3. **Trägheitsmoment einer prismatischen Stange.** Diese Stange drehe sich um eine Achse, welche durch das eine Ende derselben geht und senkrecht auf der Längenrichtung steht. Es sei a die Länge der Stange und M ihre Masse, so ist das Trägheitsmoment T der ganzen Stange

$$T = \frac{1}{3} a^2 M.$$

Wäre alle Masse im andern Endpunkt der Stange vereinigt, so wäre das Trägheitsmoment $= a^2 M$, also 3mal größer. Denkt man sich den Arm des Schwungrades als eine solche Stange, so folgt, daß dem Arme bei Ingangsetzung der Bewegung nur $^1/_3$ derjenigen Arbeit mitzuteilen ist, als wenn seine Masse im Ringe des Schwungrades angebracht wäre.

4. **Mittelpunkt der Trägheit.** Denkt man sich die ganze Masse dieser Stange in einem Punkte konzentriert und zwar in einer solchen Ent-

fernung b von der Achse, daß ihr Trägheitsmoment gleich groß bleibt, so wird $M b^2 = \frac{1}{3} a^2 M$; daher

$$b = a \sqrt{0,333} = 0,577\ a.$$

Dieser Punkt mit dem Abstande b von der Achse heißt Mittelpunkt der Trägheit der Stange. Man könnte ihn auch Mittelpunkt der lebendigen Arbeit nennen, weil der Stange gerade so viel lebendige Arbeit beizubringen ist, um ihre Drehung zu bewirken, wie wenn alle Masse der Stange in diesem Punkte vereinigt wäre.

Schlägt die Stange, etwa als Hammerstiel gedacht, mit dem Mittelpunkt der Trägheit auf ein Hindernis, so wird kein Druck auf die Achse ausgeübt. Findet der Schlag neben diesem Punkte statt, so entsteht ein Druck auf die Achse.

Dient die Stange als Hammerstiel und befindet sich am freien Ende desselben der Hammer mit der Masse M', so ist das Trägheitsmoment der beiden Teile $= 0,33\, a^2 M + a^2 M'$. Der Mittelpunkt der Trägheit des ganzen Hammers habe den Abstand b von der Achse, so wird in diesem Punkte die Masse $M + M'$ konzentriert sein mit einem Trägheitsmomente $= (M + M') b^2$. Durch Gleichsetzung dieser Werte folgt

$$b^2 = \frac{\frac{1}{3} M + M'}{M + M'} a^2.$$

Nun sei die Masse des Hammers 5mal größer als die des Stieles, so wird

$$b^2 = \frac{\frac{1}{3} M + 5 M}{M + 5 M} a^2;\quad b = 0,94\ a.$$

Hiernach kommt der Mittelpunkt der Trägheit ganz in die Nähe des Hammers, so daß beim Aufschlagen des Hammers nur ein schwacher Druck auf die Achse entsteht.

5. **Trägheitsmoment eines Cylinders**, der sich um seine geometrische Achse dreht. Es sei M die Masse des Cylinders und r sein Halbmesser, so ist dessen Trägheitsmoment

$$T = \frac{1}{2} M r^2.$$

Wäre die Masse M am Umfang des Cylinders konzentriert, so wäre das Trägheitsmoment derselben $= M r^2$, also 2mal größer. Daraus folgt, daß ein solcher Cylinder (Schleifstein, Mühlstein rc.) nur die Hälfte Arbeit braucht, um ihn zu drehen, als um ihm eine fortschreitende Bewegung zu geben mit einer Geschwindigkeit gleich der Umfangsgeschwindigkeit des Cylinders.

6. **Verlegung der Drehachse.** Es seien: M die Masse eines Körpers, T das Trägheitsmoment für eine Achse, welche durch seinen Schwerpunkt geht, T' das Trägheitsmoment für eine neue Drehachse, welche zur erstern parallel liegt, und a der Abstand beider Achsen, so ist

$$T' = T + a^2 M.$$

7. **Trägheitsmittelpunkt, Schwerpunkt und Schwingungsmittelpunkt eines physischen Pendels.** Die Abstände dieser drei Punkte von der Achse, in der angegebenen Reihenfolge, seien b, a und L, so ist

$$b^2 = a L,$$

woraus b sich ergibt, da a nach S. 57 und L nach S. 70 bestimmt werden können.

20. Vom Stoße der Körper.

Treffen zwei Körper zusammen, so sind folgende Erscheinungen wahrnehmbar: Es entsteht ein Druck an den sich berührenden Oberflächen, welcher senkrecht auf der Stoßfläche steht; es treten Aenderungen in der Geschwindigkeit ein und es erfolgen in den Fällen, wo die Körper frei sind, Aenderungen in der Richtung der Bewegung. Nur in dem Falle, wo die Schwerpunkte zweier homogener Körper sich vor dem Stoß in einer geraden Linie bewegen, welche senkrecht auf der Stoßfläche steht und durch den Schwerpunkt dieser Stoßfläche geht, tritt keine Aenderung in der Richtung ein. In diesem Falle bewegen sich die Körper nach dem Stoße in der nämlichen Geraden wie vor dem Stoße. Dieser Stoß heißt central oder centrisch. Jeder andere Stoß heißt excentrisch.

Der centrale Stoß bringt nur Aenderungen in der fortschreitenden Bewegung, der excentrische dagegen außer dieser auch noch drehende Bewegungen hervor.

Die Stoßwirkung dauert um so länger, je größer die sich stoßenden Massen sind und je weicher ihr Material ist. Bei hartem oder schwer zusammendrückbarem Material ist der Stoß schnell beendet.

A. Centraler Stoß zweier unelastischer Körper.

1. **Stoßgesetze.** Es seien M, m die Massen dieser Körper und V, v ihre Geschwindigkeiten vor dem Stoß. Bewegen sich die Körper nach der gleichen Richtung und stößt die Masse M auf m, so wird die Geschwindigkeit von M kleiner und die von m größer, bis beide Körper die gleiche Geschwindigkeit u angenommen haben. Da die zusammengedrückten Teile der Stoßflächen, wegen der unelastischen Beschaffenheit, ihre Form nicht wiederherstellen, so bewegen sich beide Körper mit der gemeinsamen Geschwindigkeit u fort. Daher verliert der hintere Körper die Geschwindigkeit $V - u$, also das Moment $M (V - u)$; der vordere gewinnt die Geschwindigkeit $u - v$, also das Moment $m (u - v)$. Bei dieser Uebertragung an Bewegungsmoment entsteht kein Verlust. Mithin ist

$$M (V - u) = m (u - v).$$

Hieraus erhält man als Geschwindigkeit nach dem Stoß

$$u = \frac{MV + mv}{M + m}. \tag{1}$$

Bewegen sich die Körper gegen einander, so ändert v sein Vorzeichen, daher die Geschwindigkeit u nach dem Stoße

$$(2) \qquad u = \frac{MV - mv}{M + m}.$$

Ist die Masse m vor dem Stoße in Ruhe, also $v = 0$, so wird

$$(3) \qquad u = \frac{M}{M + m} V.$$

Beisp. 1. Es stoßen sich zwei Körper, deren Gewichte 10 und 5 kg sind, mit den Geschwindigkeiten 4 m und 3 m. Welches ist ihre gemeinsame Geschwindigkeit nach dem Stoße?

Da die Massen den Gewichten proportional sind, so erhält man

bei gleicher Richtung vor dem Stoß . . $u = \frac{10 \cdot 4 + 5 \cdot 3}{10 + 5} = 3\frac{2}{3}$ m,

bei entgegeng. Richtung vor dem Stoß $u = \frac{10 \cdot 4 - 5 \cdot 3}{10 + 5} = 1\frac{2}{3}$ m.

Beisp. 2. Hämmert ein Schuster Leder auf einem Steine, den er auf seinen Beinen hat, und ist die Masse m des Steines 15mal größer als die Masse M des Hammers, so wird die Geschwindigkeit, mit der sich der Stein nach dem Stoße abwärts zu bewegen strebt, nach (3) sein

$$u = \frac{M}{M + 15M} V = \frac{1}{16} V.$$

Diese Geschwindigkeit ist somit nur $^1/_{16}$ von der Geschwindigkeit, mit welcher der Hammer das Leder trifft.

2. **Arbeitsverlust beim Stoß unelastischer Körper.** Die in den beiden Massen angesammelte Arbeitsgröße ist:

$$\text{vor dem Stoße} = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} mv^2,$$

$$\text{nach dem Stoße} = \frac{1}{2} (M + m) u^2.$$

Zieht man den letztern Wert vom erstern ab und vertauscht noch u mit seinem Werte in (1) und (2), so erhält man als

$$(4) \qquad \text{Arbeitsverlust} = \frac{1}{2} \frac{Mm}{M + m} (V \mp v)^2.$$

Das obere Zeichen in der Klammer gilt für die gleiche, das untere für die entgegengesetzte Richtung der Bewegung.

Somit ist der Arbeitsverlust proportional dem Quadrat der relativen Geschwindigkeit beider Körper, d. h. dem Wege, um welchen sie sich in der Sekunde nähern.

Beisp. Ein Rammklotz falle auf einen Pfahl. Würde nun beim Aufschlagen keine Arbeit verloren gehen, so müßte alle im Rammklotz aufgehäufte Arbeit auf das Vordringen des Pfahles verwendet werden. Nehmen wir an, die beiden sich stoßenden Körper seien unelastisch, so entsteht ein solcher Verlust. Wie groß ist derselbe?

Die Geschwindigkeit des Pfahles vor dem Stoße ist $v = 0$. Also wird hier sein:

Arbeit, welche im Rammklotz angesammelt ist . . $= \frac{1}{2} M V^2$,

Arbeitsverlust beim Stoß (nach Formel 4) . . . $= \frac{1}{2} \frac{Mm}{M+m} V^2$,

Verhältnis zwischen diesem Verlust und der Arbeit $= \frac{m}{M+m}$.

Dieses Verhältnis wird um so größer, d. h. um so ungünstiger, je kleiner die Masse des Rammklotzes im Vergleich zur Masse des Pfahles ist.

Es sei das Gewicht des Rammklotzes = 1400 kg, das des Pfahles = 700 kg, so ist vorstehendes Verhältnis, da die Massen den Gewichten proportional sind:

$$\frac{700}{1400+700} = \frac{1}{3},$$

d. h. es geht hier $^1/_3$ der im Rammklotz enthaltenen Arbeit durch den Schlag verloren. Also können höchstens $^2/_3$ dieser Arbeit auf die Ueberwindung des Erdwiderstandes verwendet werden.

Dieser Erdwiderstand sei = R, das Vordringen des Pfahles beim letzten Schlag = h und die Fallhöhe des Rammklotzes = H, so ist

Arbeit, welche im Rammklotz enthalten ist . . $= 1400\,H$,

Arbeit, welche davon auf den Pfahl übergeht . $= \frac{2}{3} \cdot 1400\,H$,

Arbeit zur Ueberwindung des Widerstandes . . $= R h$.

Ohne Rücksicht auf Nebenhindernisse findet deshalb folgende Gleichung zwischen den Arbeiten statt:

$$R h = \frac{2}{3} \cdot 1400\,H.$$

Wenn die Fallhöhe H = 3 m und das Einsinken des Pfahles h = 0,02 m, so ist der Erdwiderstand, den man auch das Tragvermögen nennt:

$$R = \frac{2}{3} \cdot 1400 \cdot \frac{3}{0{,}02} = 140000 \text{ kg}.$$

Wenn der Pfahl 0,27 m Durchmesser, also 572 qcm Querschnitt hat, so wird das Tragvermögen des Pfahles per 1 qcm seines Querschnittes sein

$$140\,000 : 572 = 245 \text{ kg}.$$

Der Sicherheit wegen soll die Belastung eines Pfahles höchstens $^1/_8$ von seinem so berechneten Tragvermögen sein.

B. Centraler Stoß vollkommen elastischer Körper.

1. **Stoßgesetze.** Es seien M, m die Massen zweier Körper, V, v ihre Geschwindigkeiten vor dem Stoße und C, c ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoße. Nehmen wir zunächst an, die Körper bewegen sich nach der gleichen Seite.

Der Stoß erfolgt in zwei Perioden. In der ersten werden die Körper an den Stoßflächen zusammengedrückt und in der zweiten stellen sie vermöge der Kraft der Elasticität ihre ursprüngliche Form wieder her. In dem Augenblick, wo die eine Periode in die andere übergeht, ist der höchste Grad der Zusammenpressung eingetreten. Wären nun

die Körper unelastisch, so gingen sie mit einer gemeinschaftlichen Geschwindigkeit u weiter. Dabei würde die Masse M die Geschwindigkeit V — u verlieren und die Masse m die Geschwindigkeit u — v gewinnen. Allein nun folgt die zweite Periode, während welcher M nochmals die Geschwindigkeit V — u verliert und m nochmals die Geschwindigkeit u — v gewinnt. Zieht man den Gesamtverlust 2 (V — u) ab von V und addiert man den Gesamtgewinn 2 (u — v) zu v, so erhält man die Geschwindigkeit nach dem Stoß wie folgt:

$$(5) \qquad C = 2u - V; \quad c = 2u - v.$$

Zieht man diese Gleichungen von einander ab, so erhält man

$$C - c = -(V - v),$$

d. h. die Unterschiede der Geschwindigkeiten vor dem Stoß und nach dem Stoß sind gleich, jedoch entgegengesetzt gerichtet.

Führt man den Wert von u aus (1) in (5), so kommt

$$(6) \qquad C = \frac{2mv + V(M - m)}{M + m}; \quad c = \frac{2MV - v(M - m)}{M + m}.$$

Bewegen sich die Körper gegen einander, so setze man hierin — v statt + v.

2. **Specielle Fälle.** Zwei gleiche Massen bewegen sich nach derselben Richtung. In diesem Falle geben die Formeln (6) C = v und c = V, d. h. gleiche Massen verwechseln während des Stoßes ihre Geschwindigkeiten.

Zwei gleiche Massen bewegen sich gegen einander. Es wird C = — v und c = V, d. h. die Körper vertauschen während des Stoßes ihre Geschwindigkeiten und bewegen sich damit nach entgegengesetzten Richtungen.

Eine Masse stoße auf eine gleich große ruhende Masse. Es wird C = 0 und c = V, d. h. der stoßende Körper kommt zur Ruhe und der gestoßene nimmt die Geschwindigkeit des stoßenden an.

Stößt eine kleine Masse M eine ruhende große Masse m, so bleibt die ruhende Masse sehr nahe in Ruhe, während die stoßende sehr nahe mit der gleichen Geschwindigkeit zurückprallt.

3. **Arbeitsverlust.** Sind die Körper vollkommen elastisch, so geht während des Stoßes keine Arbeit verloren. Die Körper nehmen nämlich an den Berührungsstellen während des Zusammenpressens Arbeit auf, geben aber vermöge ihrer Elasticität diese Arbeit während der Wiederherstellung ihrer Form vollständig wieder ab. Dies setzt jedoch voraus: a) daß die kleinsten Teile des Körpers nicht in Erschütterungen versetzt werden und b) daß der Stoß nicht so intensiv sei, daß bei der Zusammenpressung die Grenze der Elasticität überschritten werde. Treten beim Stoße Erschütterungen, Vibrationen der Teile ein, so entsprechen diesen molekularen Vorgängen lebendige Arbeiten, welche für die fortschreitende Bewegung der Körper verloren sind. Werden die Körper an den Oberflächen beschädigt oder zerstört, so wird hierzu Arbeit verwendet, welche ebenfalls für die Fortschreitung verloren geht.

C. Stoß unvollkommen elastischer Körper.

1. **Stoß senkrecht gegen eine feste Fläche.** Es falle eine Kugel von der Höhe H frei herab auf eine waagrechte Unterlage. Wären nun die stoßenden Körper vollkommen elastisch, so müßte die Kugel nach dem Stoß wieder längs der ganzen Höhe H emporsteigen. Wegen der Unvollkommenheit der Elasticität steige der Körper aber nur auf die Höhe h, so ist die Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel aufschlägt $= \sqrt{2gH}$, dagegen diejenige, mit der sie vom Boden abspringt $= \sqrt{2gh}$.

Es sei nun e eine Zahl, mit der man $\sqrt{2gH}$ multiplizieren muß, um $\sqrt{2gh}$ zu finden, so wird

$$e = \sqrt{\frac{h}{H}}$$

ein Koefficient sein, welcher das Maß der Elasticität der Stoffe charakterisiert.

2. **Centraler Stoß teilweise elastischer Körper.** Es gelte die bisherige Bezeichnung, so findet folgendes statt: die Masse M verliert an Geschwindigkeit in der ersten Periode $V - u$, in der zweiten $e (V - u)$, also zusammen $(1 + e) (V - u)$; m gewinnt an Geschwindigkeit in der ersten Periode $u - v$, in der zweiten $e (u - v)$, daher zusammen $(1 + e) (u - v)$. Daher die Geschwindigkeit nach dem Stoße

$$C = V - (1 + e) (V - u); \quad c = v + (1 + e) (u - v).$$

21. Von der Reibung.

A. Gleitende Reibung.

Sie entsteht durch Schleifen zweier Oberflächen auf einander. Dabei treten zwei Kräfte auf: der Druck, welchen die Körper gegen einander ausüben (Normaldruck), und der Reibungswiderstand. Dieser letztere liegt in der Reibfläche, entgegengesetzt der Richtung der Bewegung; der erstere senkrecht zu den Flächenelementen, welche sich reiben.

1. **Gesetze.** Die Gesetze dieser Reibung sind:

a) Die Reibung ist desto geringer, je härter und glätter die reibenden Flächen sind.

Durch Bestreichen der reibenden Flächen mit Fett, Oel, Graphit, Wasser 2c. wird die Reibung vermindert. Ohne eine solche Zwischenschicht wird die Reibung eine *unmittelbare*, mit einer solchen eine *mittelbare* genannt.

b) Die unmittelbare Reibung ist unabhängig von der Geschwindigkeit der reibenden Körper, d. h. gleitet der eine Körper schnell oder langsam über den andern weg, so bleibt die Reibung dieselbe. Dies gilt indessen nur so lange, als sich der Zustand der Oberflächen, z. B. durch Erhitzen, nicht ändert.

c) Die unmittelbare Reibung ist unabhängig von der Größe der Berührungsfläche, dagegen die Abnützung um so schneller, je kleiner

unter sonst gleichen Umständen diese Berührungsfläche ist. Derjenige Teil des Normaldruckes, der auf eine Flächeneinheit, z. B. 1 qcm, ausgeübt wird, heißt **specifischer Druck**. Verteilt sich nun z. B. der Normaldruck gleichförmig über eine Berührungsfläche von 50 qcm, so ist der specifische Druck 1/50 vom gesamten Druck. Wäre diese Berührungsfläche nur 10 qcm, so würde der specifische Druck 5mal größer sein. In beiden Fällen ist die Reibung dieselbe.

d) Die mittelbare Reibung ist abhängig von der Geschwindigkeit, der Reibfläche und dem specifischen Druck. Denn die Natur, der Zustand und die Stoffmenge der Zwischenschicht üben ihren Einfluß aus. Nimmt die Geschwindigkeit zu, so erwärmen sich die Fette und werden flüssiger; daher nimmt die Reibung ab; wächst der specifische Druck, so wird die Zwischenschicht weggetrieben und die mittelbare Reibung nähert sich der unmittelbaren; je kleiner dagegen dieser Druck, um so feiner und flüssiger müssen die Fette sein.

e) Die Reibung ist proportional dem Normaldruck. Das Verhältnis der Reibung R zum Normaldruck N heißt **Reibungskoefficient**. Bezeichnet man diesen mit f, so ist

$$f = \frac{R}{N}; \quad R = Nf.$$

Man findet somit den Reibungskoefficienten, wenn man die Reibung durch den Normaldruck dividiert; man findet die Reibung, wenn man den Normaldruck mit dem Reibungskoefficienten multipliziert.

Beisp. Drücken zwei reibende Körper mit 100 kg gegen einander und beträgt die Reibung 25 kg, so ist der Reibungskoefficient

$$f = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}.$$

Wäre dagegen bei gleichem Drucke der Reibungskoefficient 0,2, so würde die Reibung sein: R = 100 . 0,2 = 20 kg.

2. Werte von Reibungskoefficienten, nach Morin.

Reibende Körper.	Lage der Fasern.	Zustand der Oberfläche.	Reibungskoefficient.
Eiche auf Eiche	parallel	trocken	0,48
	senkrecht	„	0,34
	„	mit Wasser benetzt	0,25
Esche, Tanne, Buche auf Eiche	parallel	ohne Schmiere .	0,36–0,40
Lederne Riemen auf eichener Trommel	„	„ „ .	0,27
Gegerbtes Leder auf Gußeisen oder Bronze . .	platt oder auf der Kante	ohne Schmiere .	0,56
		mit Wasser . .	0,36
		fett u. mit Wasser	0,23
		mit Oel geschmiert	0,15
Hanf in Fasern oder als Seil auf Eichenholz	parallel	ohne Schmiere .	0,52
	senkrecht	naß	0,33

Reibende Körper.	Lage der Fasern.	Zustand der Oberfläche.	Reibungs-koefficient.
Schmiedeisen auf Eiche	parallel	naß	0,26
	„	ohne Schmiere	0,62
	„	mit trockner Seife	0,21
Gußeisen auf Eiche	„	ohne Schmiere	0,49
	„	mit Wasser	0,22
	„	mit trockner Seife	0,19
Schmiedeis. Rad auf Eisenb.	„	sehr trocken	0,30
Gußeisen auf Gußeisen	.....	etwas fettig	0,15
		benetzt	0,31
Schmiedeisen auf Gußeisen und Bronze	.....	wenig fettig	0,18
Gußeisen auf Bronze	.....	„ „	0,15
Bronze auf Bronze	.....	trocken	0,20
Gußeisen, Schmiedeisen, Bronze, Stahl, Hartholz, eines auf dem andern oder sich selbst	.....	ein wenig fettes Anfühlen	0,15
		auf gewöhnliche Art geschmiert	0,07—0,08
Weicher Kalk auf sich selbst	.....	ohne Schmiere	0,64
Muschelkalk auf Rogenstein	.....	„ „	0,67
Ziegelstein auf Rogenstein	.....	„ „	0,65

Man nimmt gewöhnlich die Reibungskoefficienten wie folgt an:

a) für unmittelbare Reibung von . 0,32 bis 0,66;
b) für mittelbare Reibung und zwar

bei sehr guter Schmierung und großer Geschw. . . 0,03
bei sehr guter Schmierung und mäßiger Geschw. . . 0,04
bei guter Schmierung und langsamer Bew. . . . 0,05
bei gewöhnlicher Schmierung und langsamer Bew. . 0,06.

Durch die Schmierung werden daher die Koefficienten auf $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{10}$ jener ohne Schmierung heruntergebracht.

3. **Arbeit der Reibung.** Die Arbeit A, welche die Reibung per Sek. absorbiert, wird gefunden, wenn man die Reibung mit der Geschwindigkeit v der reibenden Fläche multipliziert. Daher ist

$$A = Nfv.$$

Beisp. Der Schlitten einer Eisenhobelmaschine habe 700 kg und der zu bearbeitende Körper 300 kg, also beide 1000 kg Gewicht. Dieser Schlitten bewege sich mit 0,1 m Geschwindigkeit. Wie groß ist die Reibung und wie viel Arbeit absorbiert sie per Sekunde?

Es sei der Reibungskoefficient . . . . $f = 0,07$,
so ist die Reibung . . . $R = 1000 . 0,07 = 70$ kg
und die absorbierte Arbeit . . $A = 70 . 0,1 = 7$ mkg.

4. **Arbeit der Zapfenreibung.** Die Reibung ist eine gleitende und wird deshalb wie oben angegeben berechnet.

a) Liegender cylindr. Zapfen. Er wird senkrecht zur Achsenrichtung ins Lager gedrückt. Um den Effektverlust zu berechnen, multipliziere man die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens mit der Reibung.

b) Stehender cylindr. Zapfen. Er wird in der Richtung der Achse ins Lager gedrückt. Der Effekt, welchen die Reibung an der kreisförmigen Grundfläche absorbiert, beträgt $^2/_3$ von dem eines liegenden Zapfens bei gleichem Druck und gleichem Durchmesser. Wird der Zapfen auch seitwärts an die cylindrische Wand des Lagers gedrückt, so entsteht Reibung, die wie für eine liegende Welle berechnet wird.

c) Stehender Zapfen mit ringförmiger Reibfläche. Man zerlege die Ringfläche durch Radien in kleine Flächenteile und bestimme ihre Schwerpunkte. Alsdann multipliziere man die Reibung mit der Geschwindigkeit dieser Schwerpunkte, um den Effekt der Reibung zu erhalten.

d) Stehender konischer Spitzzapfen. Der Konus hat eine Mantelfläche und eine Grundfläche. Nun verhalten sich Reibung und Effekt auf der Mantelfläche zu Reibung und Effekt, welche auf der Grundfläche unter gleichen Umständen verursacht würden, wie Mantelfläche zur Grundfläche.

e) Kugelzapfen. Es sei r der Halbmesser der Kugel, ferner die Hälfte der Kugelfläche die Reibfläche, so ist unter sonst gleichen Umständen die Reibung das 2fache von der auf der Kreisfläche $r^2\pi$ und die absorbierte Arbeit das $\frac{3}{4}\pi$fache von derjenigen der Fläche $r^2\pi$.

Beisp. 1. Wie groß ist der durch die Zapfenreibung verlorene Effekt eines Schwungrades, das samt Achse 2000 kg wiegt und 56 Umgänge per Minute macht, wenn die Zapfen 0,12 m dick sind und der Reibungskoefficient = 0,05 angenommen werden kann?

Es ist die Reibung der beiden Zapfen $2000 \,.\, 0{,}05 = 100$ kg.
Umfangsgeschwindigkeit der Zapfen $0{,}12 \,.\, 3{,}14 \,.\, \frac{56}{60} = 0{,}352$ m.
Verlorener Effekt . . . $100 \,.\, 0{,}352 = 35{,}2$ mkg $= 0{,}47$ Pfd.

Beisp. 2. Eine horizontal liegende schmiedeiserne Welle habe 0,1 m Durchmesser, 500 m Länge und mache 46 Umdrehungen per Minute. Ein Wasserrad teile dieser Welle 20 Pferde mit. Wie viel Arbeit kann diese Welle an ihrem andern Ende noch abgeben, wenn kein anderes Gewicht als das der Welle Reibung verursacht?

Es ist das Gewicht der Welle (Seite 48) $61{,}2 \,.\, 500 = 30600$ kg.
Reibungskoefficient, angenommen . . . . . . $= 0{,}05$.
Reibung, verursacht durch die Welle $30600 \,.\, 0{,}05 = 1530$ kg.
Umfangsgeschwindigkeit der Welle . $0{,}1 \,.\, 3{,}14 \,.\, \frac{46}{60} = 0{,}241$ m.
Arbeit, durch die Reibung absorbiert per Sekunde
$1530 \,.\, 0{,}241 = 368{,}7$ mkg $= 4{,}92$ Pfd.
Arbeit, welche die Welle noch abgeben kann $20 - 4{,}92 = 15{,}08$ „

Es läßt sich eine Länge der Welle denken, bei welcher die ganze auf die Welle übertragene Arbeit durch die Reibung absorbiert wird. Diese Länge ist im vorliegenden Falle, wenn die Welle überall gleiche Dicke beibehält, $500 \cdot 20 : 4{,}92 = 2033$ m.

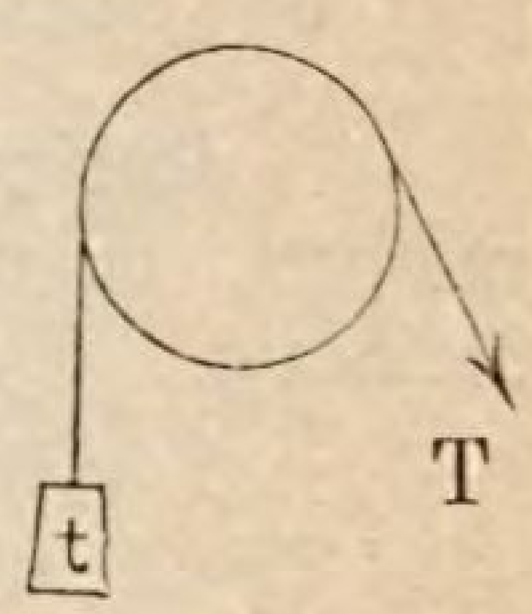
Wegen der nötigen Kupplungen, welche das Gewicht der Welle vermehren, würde diese Länge entsprechend kleiner ausfallen.

5. **Seil- und Kettenreibung.** Um einen Cylinder, der sich nicht drehen kann, sei ein Seil oder eine Kette gelegt, so entsteht beim Verschieben des Seiles oder der Kette Reibung. Nun seien

t, T die Spannungen der Seil- oder Kettenstücke,
b der vom Seil oder der Kette umspannte Bogen, beschrieben mit dem Halbmesser 1,
f der Koefficient der Seil- oder Kettenreibung,
n die Anzahl Kettenglieder, welche den Cylinder berühren und
e = 2,718 .. die Basis der natürlichen Logarithmen, so wird, wenn das Seil oder die Kette von t nach T gleiten soll,

für Seiltreibung: für Kettentreibung:

(1) $T = te^{bf}$, (2) $T = t\left(1 + f\frac{b}{n}\right)^n$.



Beispiel. Ein Seil umschlinge den halben Cylinder, so ist $b = 3{,}14$; wenn ferner $f = 1/3$, so wird $bf = 1{,}047$ und

$$T = t \cdot 2{,}718^{1{,}047} = 2{,}85\, t.$$

Wenn daher die Kraft T 2,85mal größer ist als der Widerstand t, so kann dieser überwunden werden.

Auf diese Weise ergibt sich folgende Zusammenstellung für Seile für $f = 1/3$:

Umwickelung =	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4 des Umfangs.
Werte von T =	1,69t	2,85t	8,12t	69,9t	4348t u. s. w.

Soll die entgegengesetzte Bewegung erfolgen, so wird t zur Kraft und T zum Widerstand, es sind also t und T zu vertauschen.

6. **Zahnreibung.** Es sei h der Teil der Zahnhöhe, längs welchem die Zähne beim Auf- und Ablaufen sich reiben, und 2s der Weg, welchen gleichzeitig der Druck P, mit welchem die Zähne gegen einander pressen, durchläuft; ferner f der Koefficient der Zahnreibung, so ist die beim Auf- und Ablaufen eines Zahnpaares absorbierte Arbeit $= Pf \cdot 2h$ und die gleichzeitig von einem Rad auf das andere übertragene Arbeit $= P \cdot 2s$; daher das Verhältnis beider

$$f \cdot \frac{h}{s}.$$

Der Arbeitsverlust ist daher bei gegebener Zahnhöhe um so größer, je kleiner der Weg 2s ist, längs welchem die Zähne mit einander im Eingriff bleiben. Für innere Verzahnung ist der Arbeitsverlust geringer als für äußere und bei Winkelrädern geringer als bei Stirnrädern von gleichen Dimensionen.

Drückt man h durch die Radien R und r der Räder aus, so erhält man annähernd für obiges Verhältnis

bei äußerer Verzahnung: $\frac{1}{2} sf\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)$, bei innerer Verzahnung: $\frac{1}{2} sf\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)$,

worin als durchschnittlicher Wert von s die Teilung genommen werden kann.

Beisp. Es sei f = 0,12 und s = 5 cm, so wird bei äußerer Verzahnung das Verhältnis zwischen dem Arbeitsverlust und der übertragenen Arbeit:

wenn r = R = 20 cm . . $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 0{,}12\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{20}\right)=0{,}03.$

„ r = R = 60 cm . . $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 0{,}12\left(\frac{1}{60}+\frac{1}{60}\right)=0{,}01.$

„ r = 20, „ R = 60 . . . . $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 0{,}12\left(\frac{1}{60}+\frac{1}{20}\right)=0{,}02.$

Es gehen also in diesen Fällen durch die Zahnreibung je 3, 1 und 2 Prozent der übertragenen Arbeit verloren.

7. **Kolbenreibung.** Der Kolben einer Dampfmaschine, eines Gasmotors, einer Pumpe 2c. veranlaßt bei der Hin- und Herbewegung Reibung. Es seien

d, b Durchmesser und Liderungsbreite des Kolbens,
p′ Druck der Liderung gegen die Cylinderwand per Flächeneinheit,
p Druck der Flüssigkeit auf die Kolbenfläche per Flächeneinheit,
f der Koefficient der Reibung, so ist $d\pi b$ die Reibfläche und $0{,}25\, d^2\pi$ die Kolbenfläche; folglich

Kolbenreibung = $f\,.\,d\pi b p'$; Druck auf den Kolben = $\frac{d^2\pi}{4}\,p$.

Dividiert man beide Gleichungen durch einander, so entsteht folgendes Verhältnis

$$\frac{\text{Reibung des Kolbens}}{\text{Druck auf den Kolben}} = 4f\cdot\frac{b}{d}\cdot\frac{p'}{p}.$$

Beisp. Bei einer Pumpe mit Leder- oder Hanfdichtung sei

$$f = 0{,}12;\quad \frac{b}{d}=\frac{1}{4}\ \text{und}\ \frac{p'}{p}=1{,}05;$$

so wird vorstehendes Verhältnis

$$4\,.\,0{,}12\,.\,\frac{1}{4}\,.\,1{,}05 = 0{,}126;$$

daher nimmt die Arbeit der Pumpe wegen der Kolbenreibung zu im Verhältnis von 1 zu 1 + 0,126 oder von 100 zu 126.

8. **Reibung der Kolbenstange in der Stopfbüchse.** Es gelte die Bezeichnung für die Kolbenreibung. Außerdem seien b′ die Liderungsbreite der Stopfbüchse und d′ der Durchmesser der Kolbenstange, so erhält man in ähnlicher Weise wie für den Kolben das Verhältnis

$$\frac{\text{Reibung in der Stopfbüchse}}{\text{Druck auf den Kolben}} = 4f\cdot\frac{b'}{d}\cdot\frac{d'}{d}\cdot\frac{p_1}{p}.$$

Nimmt man $\frac{b'}{b} = \frac{2}{3}$ und $\frac{d'}{d} = \frac{1}{6}$ an, so wird die Reibung der Kolbenstange $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$ von der Kolbenreibung.

B. Wälzungswiderstand.

1. **Gesetz.** Die wälzende oder rollende Reibung entsteht, wenn ein cylindrischer Körper auf einer Fläche fortrollt. Diese Reibung ist proportional dem Druck, den der Cylinder oder das Rad gegen die Unterlage ausübt, und verkehrt proportional dem Halbmesser R des Rades.

Es sei K die horizontale Kraft, welche den Cylinder auf einer horizontalen Ebene fortzuschaffen vermag, und f der Reibungskoefficient, so wird annähernd

$$K = f\,\frac{P}{R}.$$

Diese Kraft K kann man sich am Umfang des Cylinders, in der Richtung der Bewegung, wirkend denken. Sie legt daher einen Weg zurück, gleich dem Weg der Cylinderachse. Nach Redtenbacher nimmt dieser Widerstand ab, wenn die Radbreite groß und die Bahn hart ist, und verschwindet ganz bei vollkommen elastischer Bahn.

2. **Reibungskoefficient.** Wenn R in Centimetern ausgedrückt wird, so ist der Reibungskoefficient f für

Walze von Guajac auf Eichenholz,	nach Coulomb		= 0,048
Walze von Ulmen auf Eichenholz,	„	„	= 0,081
Walze von Kalkstein auf Kalkstein,	„	„	= 0,154
Gußeiserne Räder auf gußeis. Schienen,	„	„	= 0,055
Schmiedeiserne Räder auf Eisenbahnschienen,	nach Wood		= 0,050.

Beisp. Bei einem Eisenbahnwagen sei der Durchmesser der Räder = 90 cm, der Durchmesser der Achsenhälse = 7,5 cm und das Gewicht des Wagens (für Personen oder Güter) = P. Davon soll der Teil 0,88 P auf den Achsen liegen und Achsenreibung hervorbringen. Wie verhält sich bei diesem Wagen der Wälzungswiderstand zur Achsenreibung?

Wälzungswiderstand, nach obiger Formel . $0{,}05 \cdot \frac{P}{45} = 0{,}0011\ P.$
Koefficient der Achsenreibung, angenommen . . . $= 0{,}04.$
Achsenreibung, am Umfang der Achse . $0{,}88\ P \cdot 0{,}04 = 0{,}0352\ P.$
Dieselbe Achsenreibung, vom Umfang der Achse auf den
Umfang des Rades reduciert . . $0{,}0352\ P \cdot \frac{7{,}5}{90} = 0{,}0029\ P.$
Summe beider Widerstände . . $0{,}0011\ P + 0{,}0029\ P = 0{,}0040\ P.$

Hiernach ist die Achsenreibung 2,6mal größer als der Wälzungswiderstand und der gesamte Widerstand $= \frac{1}{250}$ vom Gewicht des Wagens.

C. Widerstand der Fuhrwerke auf Straßen.

Dieser Widerstand, aus dem Wälzungswiderstande und der Achsenreibung hervorgehend, beträgt vom Gewicht des Fuhrwerkes:

Beschaffenheit der Bahn.	Artillerie-wagen.	Frachtwagen.	Eilwagen.	
a) Schotterstraßen.				
1. Ein wenig feucht mit einigen freiliegenden Schotterstücken	$^1/_{38,7}$	$^1/_{41}$	Schritt	$^1/_{33,7}$
			Trab	$^1/_{26,8}$
			scharfer Trab .	$^1/_{24,3}$
2. Sehr hart, mit grobem Schotter und naß . . .	$^1/_{46,8}$	$^1/_{48,8}$	Schritt	$^1/_{40,8}$
			Trab	$^1/_{26,8}$
			scharfer Trab .	$^1/_{22,6}$
3. Hart mit Geleisen und Kot	$^1/_{24,6}$	$^1/_{25,8}$	Schritt	$^1/_{21}$
			Trab	$^1/_{18,5}$
			scharfer Trab .	$^1/_{17,2}$
4. Sehr verfahren, mit dickem Kote	$^1/_{20,8}$	$^1/_{21,8}$	Schritt	$^1/_{18}$
			Trab	$^1/_{16}$
			scharfer Trab .	$^1/_{15}$
5. Sehr aufgerissen, mit Geleisen von 0,06—0,08 m Tiefe und dickem Kote	$^1/_{16}$	$^1/_{16,7}$	Schritt	$^1/_{13,7}$
			Trab	$^1/_{12,4}$
			scharfer Trab .	$^1/_{11,8}$
6. Sehr schlecht, tiefe Geleise von 0,10–0,12 m, dicker Kot, der Grund hart und rauh	$^1/_{14,3}$	$^1/_{14,8}$	Schritt	$^1/_{12,2}$
			Trab	$^1/_{10,5}$
b) Pflasterstraßen.				
1. Sehr gutes Metzer Pflaster	$^1/_{70}$	$^1/_{75,5}$	Schritt	$^1/_{62}$
			Trab	$^1/_{42}$
			scharfer Trab .	$^1/_{36,2}$
2. Pariser Pflaster aus Sandstein v. Fontainebleau, trock.	$^1/_{64,6}$	$^1/_{69,5}$	Schritt	$^1/_{57}$
			Trab	$^1/_{38}$
			scharfer Trab .	$^1/_{32,7}$
c) Brückenbahn von Holz	$^1/_{46,8}$	$^1/_{42,8}$	Schritt u. Trab	$^1/_{40,8}$

22. Steifigkeit der Seile, Riemen und Ketten.

Die Steifigkeit der Seile, Riemen und Ketten ist der Widerstand, den sie beim Krümmen und Geradstrecken leisten, wenn sie über eine Rolle laufen. Es sei S die Steifigkeit, Q die Spannung des Seiles oder Riemens und D der Durchmesser der Rolle, so erhält man für kg und cm:

1. Bei Hanfseilen, nach Eytelwein, annähernd

$$S = kQ\,\frac{\delta^2}{D},$$

wo δ die Dicke des Seiles und k einen Koefficienten bezeichnet, der für neue Seile $= 0,26$ anzunehmen ist, für gebrauchte jedoch auf 0,18 heruntersinkt.

Beisp. Es sei eine Last von 500 kg an einem Seil von 3 cm Dicke zu heben; wie groß ist die Steifigkeit, wenn der Durchmesser der Rolle 40 cm beträgt?

$$S = 0{,}18 \cdot 500 \cdot \frac{3 \cdot 3}{40} = 20 \text{ kg}.$$

Somit ist am Seil mit einer Kraft = 500 + 20 = 520 kg zu ziehen. Die Kraft verhält sich daher zur Last wie 1,04 zu 1.

2. Bei Drahtseilen nach Weißbach (abgeleitet nach einem Seil, bestehend aus 16 Drähten von $1^1/_2$ Linien Dicke)

$$S = 0{,}49 + 0{,}476 \frac{Q}{D}.$$

3. Bei Lederriemen mit der Breite b und Dicke h

$$S = \frac{1}{6} E \cdot b\, h \cdot \frac{h^2}{D^2},$$

wo E den Modul der Elasticität des Leders bezeichnet, der für neue Riemen zu 600, für stark gebrauchte zu 1200 kg per 1 qcm anzunehmen ist.

Beisp. 1. Wenn E = 1000 kg, b = 10 cm, h = 0,5 cm, D = 20 cm, so wird

$$S = \frac{1}{6} \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 0{,}5 \cdot \frac{0{,}25}{400} = 0{,}521 \text{ kg}.$$

Wird dieser Riemen per 1 qcm Querschnitt mit 10 kg gespannt, so beträgt die übertragene Kraft 10 . 0,5 . 15 = 75 kg. Daher wird das Verhältnis zwischen der Steifigkeit und der übertragenen Kraft 0,521 : 75 = 0,007.

Beisp. 2. Ein Doppelriemen ersetze einen einfachen in der Weise, daß der Querschnitt der gleiche bleibt, so wird die Breite b auf die Hälfte sinken und die Dicke h auf das Doppelte steigen. Dadurch nimmt die Steifigkeit zu wie das Verhältnis $\frac{h^2}{D^2}$, also wie 1 : 2 . 2 oder 1 : 4, da der Durchmesser D derselbe bleibt. Der Doppelriemen hat also unter sonst gleichen Umständen 4mal mehr Steifigkeit als der einfache.

4. Bei Ketten zum Biegen

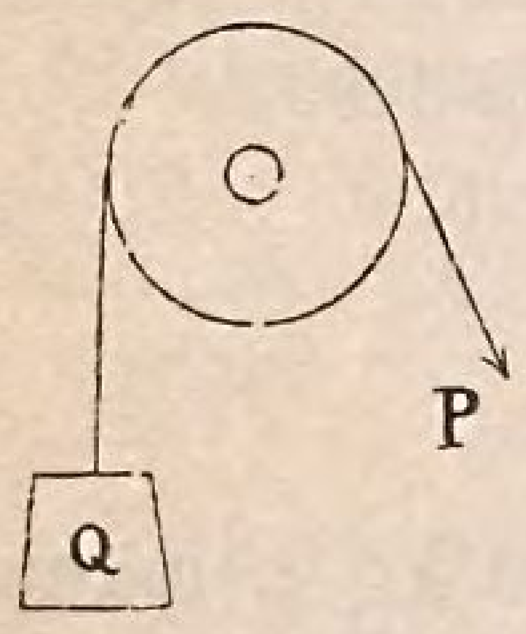
$$S = Q f \frac{\delta}{D},$$

wo δ den Durchmesser der Bolzen und f den Koefficienten der Bolzenreibung bezeichnet. Zum Geradstrecken ist ebensoviel Kraft nötig wie zum Biegen.

Gleichgewicht an mechanischen Vorrichtungen.

23. Gleichgewicht an Rollen.

1. **Einfache Rolle.** Es sei P die Kraft, welche die Last Q und die Nebenhindernisse überwinden soll, so ist für eine Rolle mit Hanfseil



$$P = Q + kQ\frac{\delta^2}{D} + Nf\frac{d}{D}.$$

Hierin drückt das zweite Glied rechts die Steifigkeit des Seiles und das dritte die Achsenreibung aus. Es bezeichnet nämlich N den Druck auf die Achse, Nf die Reibung (S. 88) am Umfang der Zapfen, die noch auf den Umfang der Rolle zu reducieren ist.

Beisp. Es sei $k = 0{,}18$; $\delta = 2{,}5$ cm; $D = 22$ cm; $d = 3{,}5$ cm; $f = 0{,}08$ und $N = 1{,}2\,Q$, so wird

$$P = (1 + 0{,}051 + 0{,}015)\,Q = 1{,}066\,Q,$$

d. h. es ist außer Q noch zu überwinden ein Widerstand 0,066 Q und zwar 5,1 Procente von Q, herrührend vom Seilwiderstand und 1,5 Prozente von Q für die Achsenreibung. Es verhält sich daher die Kraft zur Last wie 1,066 : 1.

Der Faktor 1,066 schwankt bei verschiedenen Rollen zwischen 1,04 und 1,09. Man nennt ihn Widerstandskoefficient. Er sei für die Folge mit c bezeichnet. Daher wird allgemein

$$P = cQ.$$

2. **Gleichgewicht am Rad an der Welle.** Es seien Q die Last am Seil, P die Kraft am Umfang des Rades, r der Halbmesser der Seilwelle, R der des Rades, so besteht das Gleichgewicht ohne Rücksicht auf Nebenhindernisse, wenn die statischen Momente PR und Qr einander gleich sind. Daraus folgt:

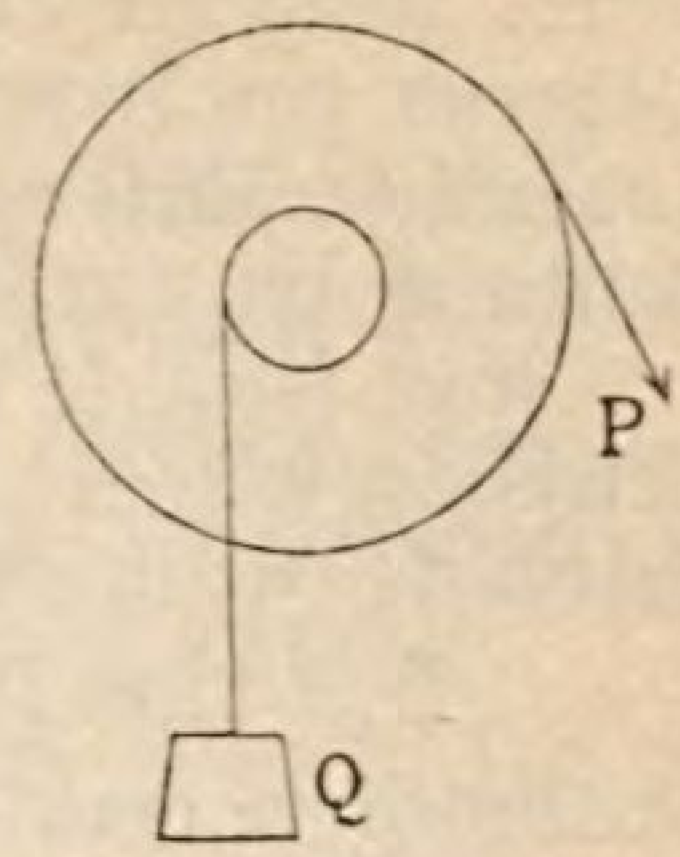
$$P : Q = r : R,$$

d. h. es verhält sich die Kraft zur Last, wie der Radius der Welle zu dem des Rades.

Mit Rücksicht auf die Nebenhindernisse ist cQ statt Q in Rechnung zu bringen. Daher wird

$$\frac{P}{Q} = c\,\frac{r}{R}.$$

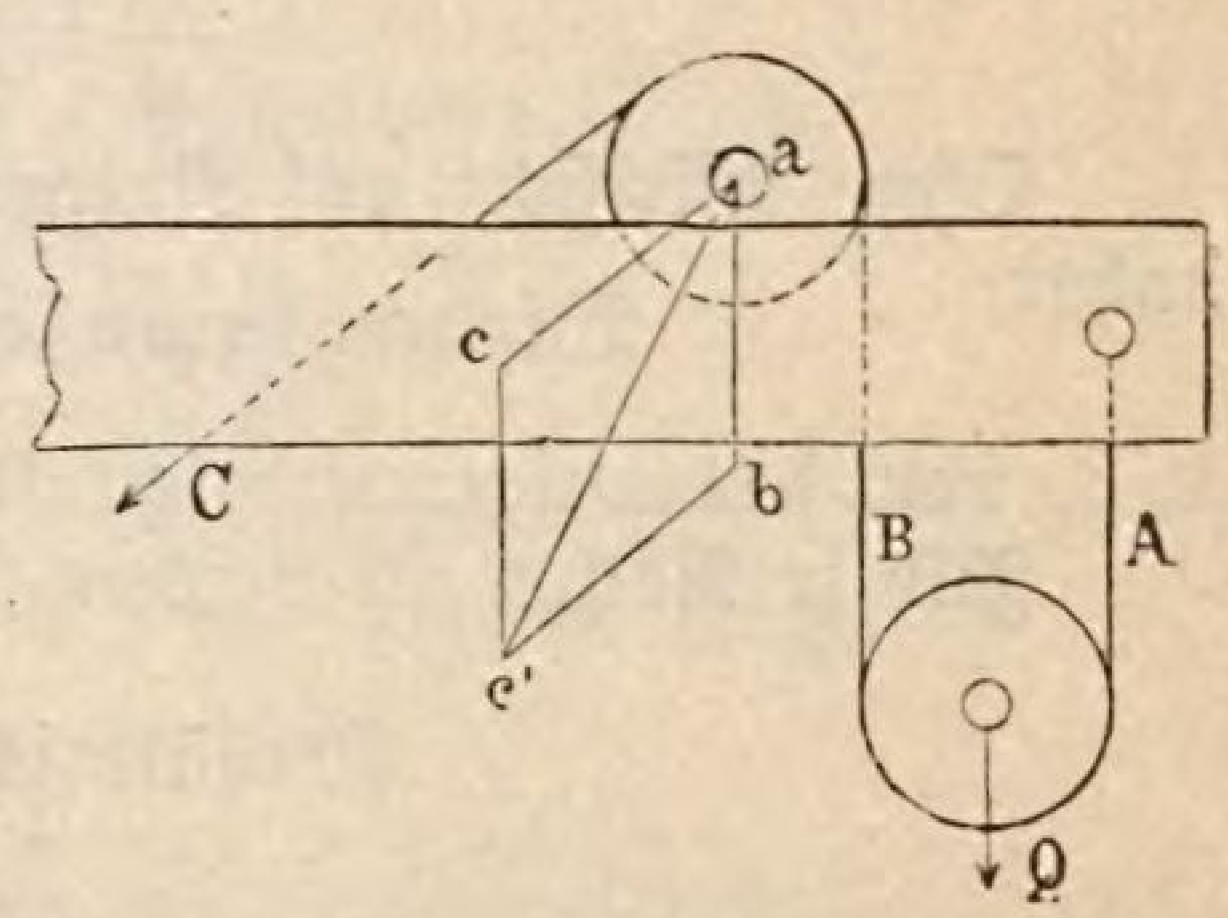
Es gibt verschiedene Formen des Rades. So kann dasselbe durch einen Arm oder durch mehrere Sprossen, in der Richtung der Radien des Rades, ersetzt sein. Im ersten Fall heißt die Einrichtung Kurbelwelle, im zweiten Haspel. Wird das Rad durch eine große cylindrische Trommel, konzentrisch zur Seilwelle, ersetzt und läuft ein Mann in der Trommel, entgegengesetzt zur Richtung der Drehung, so entsteht das Tretrad.



3. **Verbindung einer festen und losen Rolle.** In der nachfolgenden Figur stellt die obere Rolle eine feste, die untere eine lose Rolle dar. Es seien

Q die Last an der losen oder beweglichen Rolle und
A, B, C die Spannungen der auf einander folgenden Seilstücke.

a) Heben der Last. Wegen der Achsenreibung und der Steifigkeit des Seiles muß die Spannung B größer als A und die Spannung C größer als B sein. Die Achsenreibung hängt ab vom Druck auf die Achse. Dieser ist bei der unteren Rolle die Last Q, bei der oberen die Diagonale ac′ eines Parallelogrammes, dessen eine Seite ab gleich und parallel B, dessen andere gleich und parallel C ist. Nun sei



$$C = 1{,}07\,B; \quad B = 1{,}08\,A.$$

Man setze diesen Wert von B in die Gleichung $A + B = Q$, so erhält man folgende Werte

$$A = 0{,}48\,Q; \quad B = 0{,}52\,Q; \quad C = 0{,}56\,Q.$$

Während die Spannungen A, B, C im Zustand der Ruhe gleich groß sind, nämlich gleich der halben Last Q, so nimmt beim Heben die Spannung A von 0,50 Q auf 0,48 Q ab, die Spannung B steigt von 0,50 Q auf 0,52 Q und die Spannung C von 0,50 Q auf 0,56 Q.

b) Senken der Last. Die Aufwicklungen der Seilstücke erfolgen nunmehr auf der entgegengesetzten Seite; daher muß A größer als B und B größer als C sein. Es sei wieder

$$A = 1{,}08\,B; \quad B = 1{,}07\,C.$$

Setzt man $A = 1{,}08\,B$ in die Gleichung $A + B = Q$, so wird

$$A = 0{,}52\,Q; \quad B = 0{,}48\,Q; \quad C = 0{,}45\,Q.$$

Beim Uebergang vom Heben zum Senken ändert sich also die Spannung C im Verhältnis von 56 : 45.

4. **Gewöhnlicher Flaschenzug.** Beide Flaschen haben gleich viel Rollen. Die Rollen einer Flasche liegen gewöhnlich neben einander und sind gleich groß. Im Zustand der Ruhe verteilt sich die Last gleichförmig über alle tragenden Seilstücke. Also ist die Spannung eines

Seiles gleich der Last, dividiert durch die Anzahl der tragenden Seilstücke. Während der Drehung ist je ein folgendes Seilstück wegen der Nebenhindernisse stärker gespannt als das unmittelbar vorangegangene, durchschnittlich im Verhältnis von 108 : 100.

Nun seien Q die zu hebende Last, P die Kraft am freihängenden Seilstücke und A, B, C, D die Spannungen der auf einander folgenden Seilstücke, so ist für das Heben der Last bei vier Rollen

$$P = 1{,}08\,D; \quad D = 1{,}08\,C; \quad C = 1{,}08\,B; \quad B = 1{,}08\,A.$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit einander, so folgt

$$P = 1{,}08^4 . A = 1{,}36\,A,$$

d. h. das letzte Seilstück ist im Verhältnis von 136 : 100 stärker gespannt als das erste.

Allein vier Seilstücke tragen die Last; daher ist

$$Q = A + B + C + D,$$

$$Q = (1 + 1{,}08 + 1{,}08^2 + 1{,}08^3)\,A = 4{,}506\,A.$$

Folglich das Verhältnis zwischen Kraft und Last

$$\frac{P}{Q} = \frac{1{,}360}{4{,}506} = 0{,}302.$$

Ohne Rücksicht auf Nebenhindernisse ist dieses Verhältnis = 0,25; daher

$$\text{Wirkungsgrad des Apparates } \frac{0{,}250}{0{,}302} = 0{,}83,$$

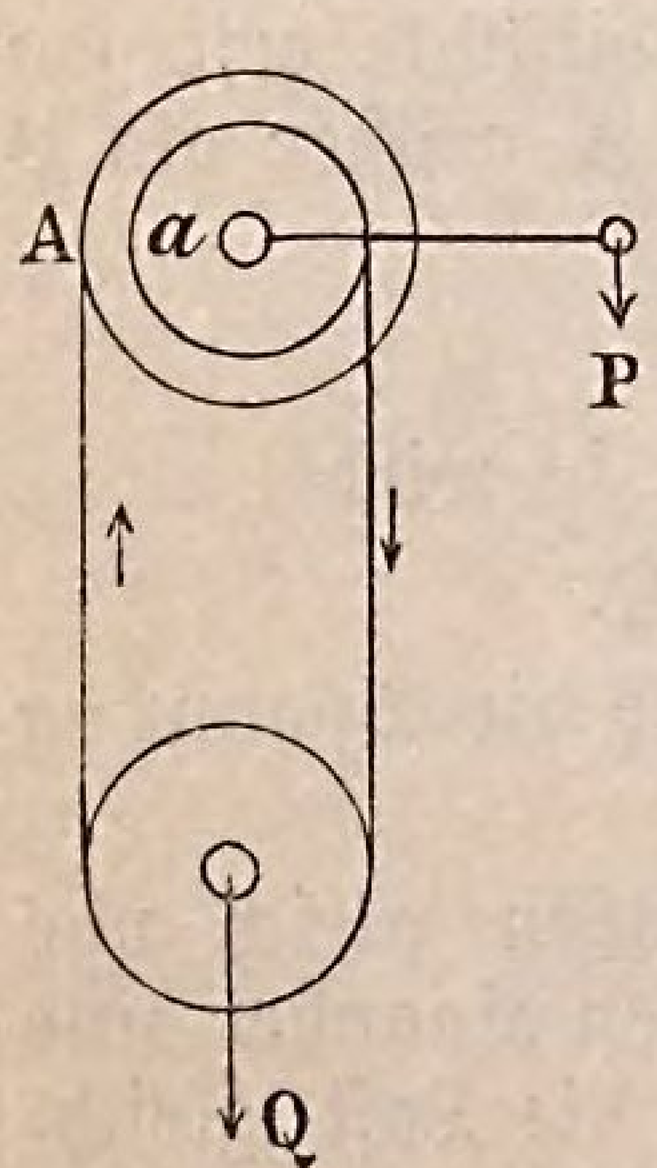
d. h. von der aufgewendeten Kraft sind nur 83 Prozente nützlich.

Für n Rollen in beiden Flaschen wird

$$\text{Verhältnis } \frac{P}{Q} = \frac{c^n\,(c-1)}{c^n - 1},$$

$$\text{Wirkungsgrad} = \frac{1}{n} \cdot \frac{c^n - 1}{c^n\,(c-1)}.$$

Anzahl Rollen .	n =	6	8	10	12
Verhältnis . .	$\frac{P}{Q}$ =	0,216	0,174	0,149	0,133
Wirkungsgrad . .	=	0,773	0,718	0,671	0,628.



5. **Differentialhaspel.** Eine waagrechte Welle bestehe aus zwei hintereinander liegenden cylindrischen Teilen mit den Radien a und A. Ein Seil sei an der dickern Welle befestigt, gehe abwärts nach einer Seilrolle und über diese weg nach der dünnern Welle und umschlinge diese mit mehreren Windungen.

Es seien Q die Last an der Seilwelle, b und B die von ihr bewirkten Spannungen der Seilstücke, entsprechend den Radien a und A, und P die Kraft an einer Kurbel von der Länge L.

Ohne Rücksicht auf Nebenhindernisse ist $b = B = \frac{1}{2}Q$; daher Gleichgewicht, wenn $PL + \frac{1}{2}Qa = \frac{1}{2}QA$, woraus folgt

(1) $$\frac{P}{Q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{A - a}{L}.$$

Das Verhältnis von Kraft zu Last ist mithin das Produkt aus zwei Verhältnissen: das erste $\frac{1}{2}$ entspricht der Seilrolle, das zweite der Welle. Bei diesem letztern kann der Zähler $A - a$ beliebig verkleinert werden, indem man die Radien mehr und mehr gleich macht. Daher kann die Kraft auf einen beliebig kleinen Teil der Last gebracht werden.

Mit Rücksicht auf Nebenhindernisse erhält man beim Heben der Last $B = c \cdot b$, und da $b + B = Q$, so folgt

$$b = \frac{Q}{1 + c}; \qquad B = \frac{cQ}{1 + c}.$$

Die Kräfte P und b, auf den Umfang der größern Walze reduziert, sind $P \frac{L}{A}$ und $b \frac{c}{A}$. Diese zusammen haben den Widerstand $c'B$ zu überwinden, wo c' für c genommen ist. Daher durch Gleichsetzen, indem man die Werte von b und B einführt,

(2) $$\frac{P}{Q} = \frac{cc'A - a}{(1 + c)L}.$$

Beim Senken der Last findet sich in ähnlicher Weise

(3) $$\frac{P}{Q} = \frac{A - cc'a}{(1 + c)L}.$$

Für $c = c' = 1$ gehen (2) und (3) in (1) über.

Hört der Druck P auf und soll die Last schweben, also nicht sinken, so muß $P = 0$, also auch $A - cc'a = 0$ sein, woraus folgt

(4) $$\frac{A}{a} = cc'.$$

Wenn z. B. $c = c' = 1{,}06$, so ergibt sich als Verhältnis der beiden Radien $cc' = 1{,}06 \cdot 1{,}06 = 1{,}12$, d. h. die Radien A und a müssen sich verhalten wie 112 : 100.

6. **Differentialflaschenzug.** Anordnung ähnlich wie beim Differentialhaspel: Eine untere Rolle mit der Last Q, getragen von einer Kette, deren Glieder oben in die Zähne von Rollen mit den Radien A und a einhängen; am Umfang der größern Rolle die Kraft P wirksam. Daher gelten die Gleichungen für den Differentialhaspel, wenn in ihnen L durch A ersetzt wird. Für Ketten sind c und c' klein. Man kann nehmen $c = c' = 1{,}05$. Dafür wird $A : a = 11 : 10$.

24. Gleichgewicht am Seil ohne Ende.

1. **Verhältnis der Tourenzahlen.** Bei Uebertragung der Bewegung von einer Welle auf eine andere mittelst Seilen oder Riemen sind die Umfangsgeschwindigkeiten der Rollen, auf welchen die Seile oder Riemen laufen, gleich groß, während sich die gleichzeitigen Tourenzahlen beider Rollen umgekehrt verhalten wie ihre Halbmesser.

2. **Widerstand der getriebenen Rolle.** Es sei
A die Anzahl der zu übertragenden Pferde,
P die daraus hervorgehende Kraft, welche am Umfang der getriebenen Rolle Widerstand leistet, in Kilogrammen und
v die Geschwindigkeit des Seiles in Metern,
so wird die Arbeit, welche per Sekunde zu übertragen ist, sein

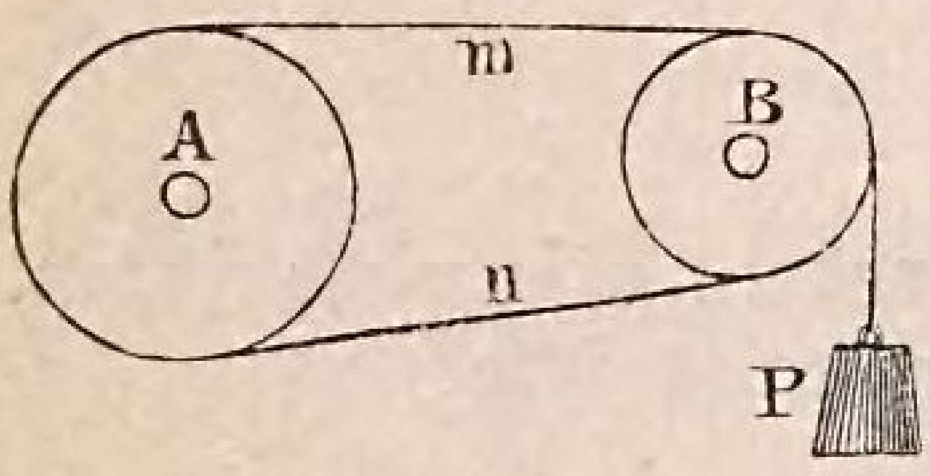
$$(1) \qquad Pv = 75\,A.$$

Es wird hiernach P klein, wenn v groß ausfällt.

3. **Reibung der Seile und Riemen auf den Rollen.** Nach Morin ist der Reibungskoefficient (S. 88):

für Hanfseile auf hölzernen Rädern	= 0,52,
„ neue Riemen auf hölzernen Rädern	= 0,56,
„ gewöhnlich fette Riemen auf hölzernen Trommeln	= 0,47,
„ feuchte Riemen auf abgedrehten gußeisernen Rollen	= 0,38,
„ gewöhnlich fette Riemen „ „ „	= 0,28,
„ eingefettete Riemen „ „ „	= 0,12.

Je größer dieser Reibungskoefficient ist, um so weniger werden die Riemen und Seile, bei sonst gleichen Umständen, auf der Rolle ausgleiten und um so schwächer dürfen sie gespannt sein.



4. **Spannung der Seile und Riemen.** Im Zustand der Ruhe sind beide Seil- oder Riemenstücke gleich stark gespannt. Sobald die Triebrolle A ihre Bewegung beginnt, muß das Stück m die Rolle B, an deren Umfang die Kraft P zu überwinden ist, mitnehmen. Es seien:

T, t die Spannungen des treibenden und getriebenen Seiles oder Riemens,
b der Bogen, den das Seil oder der Riemen auf der kleinern Rolle umfaßt, beschrieben mit dem Halbmesser = 1 und
f der oben angegebene Reibungskoefficient,

so sind die statischen Momente von T und von P + t an gleichen Rollenhalbmessern gleich; daher

$$(2) \qquad T = t + P.$$

Setzt man den hieraus sich ergebenden Wert von t in die Gleichung (1) auf S. 91, so folgt

$$(3) \qquad T = \frac{(2{,}718)^{bf}}{(2{,}718)^{bf} - 1}\,P.$$

Seil oder Riemen umfasse die Rollen zur Hälfte, so ist b = 3,14, und da für gewöhnlich fette Riemen f = 0,28, so wird T = 1,71 P. Hiernach beträgt die geringste Seil- oder Riemenspannung T für gewöhnliche Einfettung im Zustand der Bewegung:

auf hölzernen Rollen T = 1,29 P; t = 0,29 P,
auf eisernen Rollen T = 1,71 P; t = 0,71 P.

Gewöhnlich nimmt man für eiserne Rollen an

$$T = 2\,P; \quad t = P.$$

5. **Kraftverlust durch die Achsenreibung.** Es seien R, R′ die Halbmesser der Rollen, r, r′ die Halbmesser der Wellenhälse, welche Reibung in den Lagern veranlassen, f der Reibungskoefficient und N der Druck auf die eine Achse, so ist die Reibung, welche dieser Druck verursacht, $= Nf$. Nimmt man die Reibung beider Achsen gleich groß an und reduziert sie auf den Umfang beider Rollen, so beträgt die gesamte Achsenreibung

$$Nf\left(\frac{r}{R} + \frac{r'}{R'}\right). \tag{4}$$

Der größte Wert von N ist bei der getriebenen Rolle $= T + t + P = 4\,P$, der kleinste $= T + t - P = 2P$, der mittlere also $= 3P$.

Beisp. Es sei $f = 0{,}05$, $r = 3$ cm, $R = 42$ cm, $r' = 2$ cm, $R' = 18$ cm, so ist die von der Riemenspannung 3 P absorbierte Kraft

$$3P \,.\, 0{,}05\left(\frac{3}{42} + \frac{2}{18}\right) = 0{,}028\ P,$$

d. h. die Riemenspannung beider Rollen veranlaßt einen Verlust von 2,8 Prozent der übertragenen Kraft.

25. Gleichgewicht an Zahnrädern.

1. **Von den Zahnrädern im allgemeinen.** Die Zahnräder haben den Zweck, die drehende Bewegung einer Welle auf eine andere Welle zu übertragen.

Es stelle Fig. 1 zwei Cylinder dar, deren Achsen parallel sind und deren Mantelflächen sich berühren. Dreht sich der eine Cylinder, so wird der andere, bei hinreichender Reibung der Oberflächen, ebenfalls mitgenommen, so daß die Umfänge gleiche Geschwindigkeiten haben.

Fig. 1.

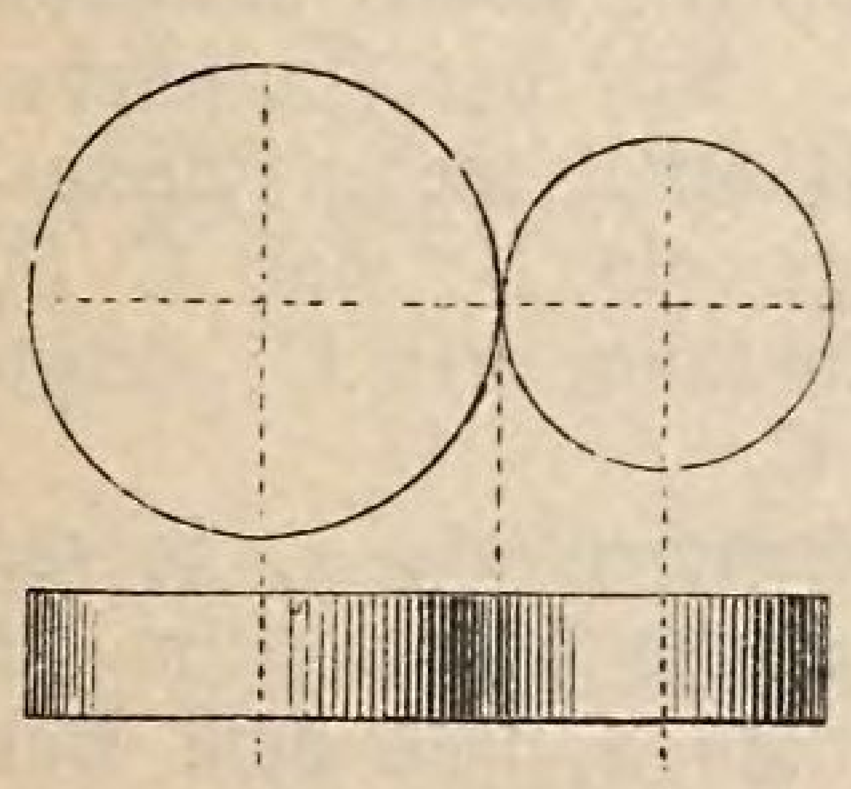


Fig. 2.

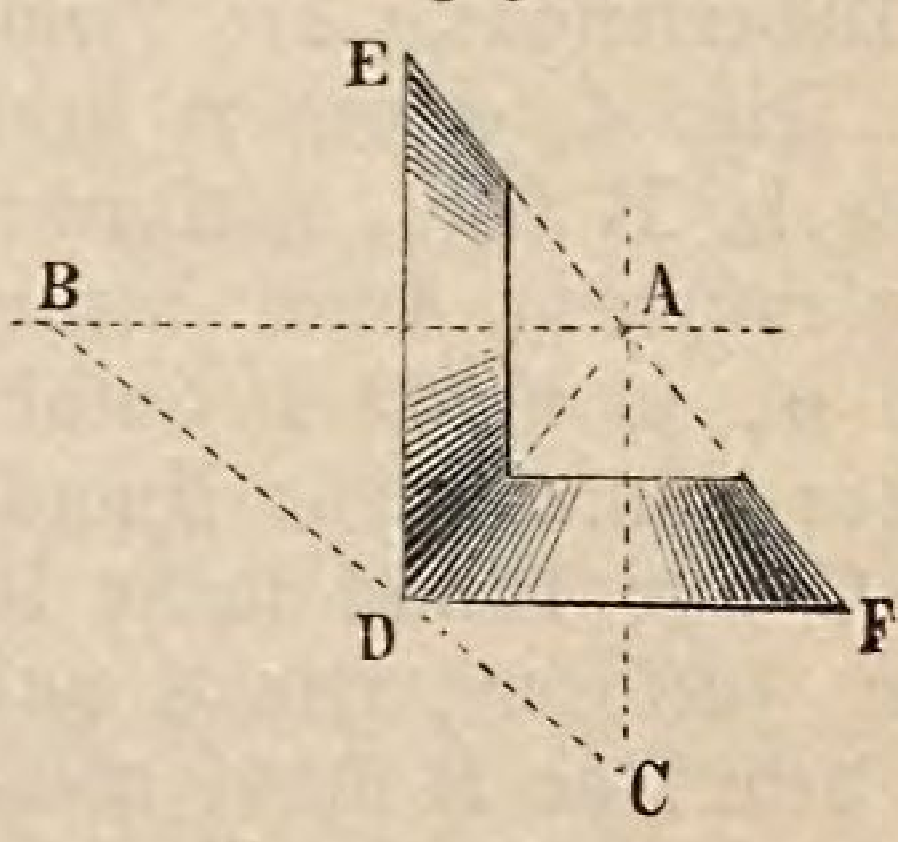


Fig. 2 stellt zwei Kegel dar, die sich längs einer Mantellinie AD berühren und deren Spitzen in den gleichen Punkt A fallen. Dreht sich der eine Kegel, so wird sich der andere mitbewegen. Dabei haben die Umfänge DE und DF der beiden Grundflächen gleiche Umgangsgeschwindigkeiten.

Verwandeln sich nun Cylinder und Kegel in gezahnte Räder, so werden die Zähne der cylindrischen Räder (Stirnräder) parallel zu

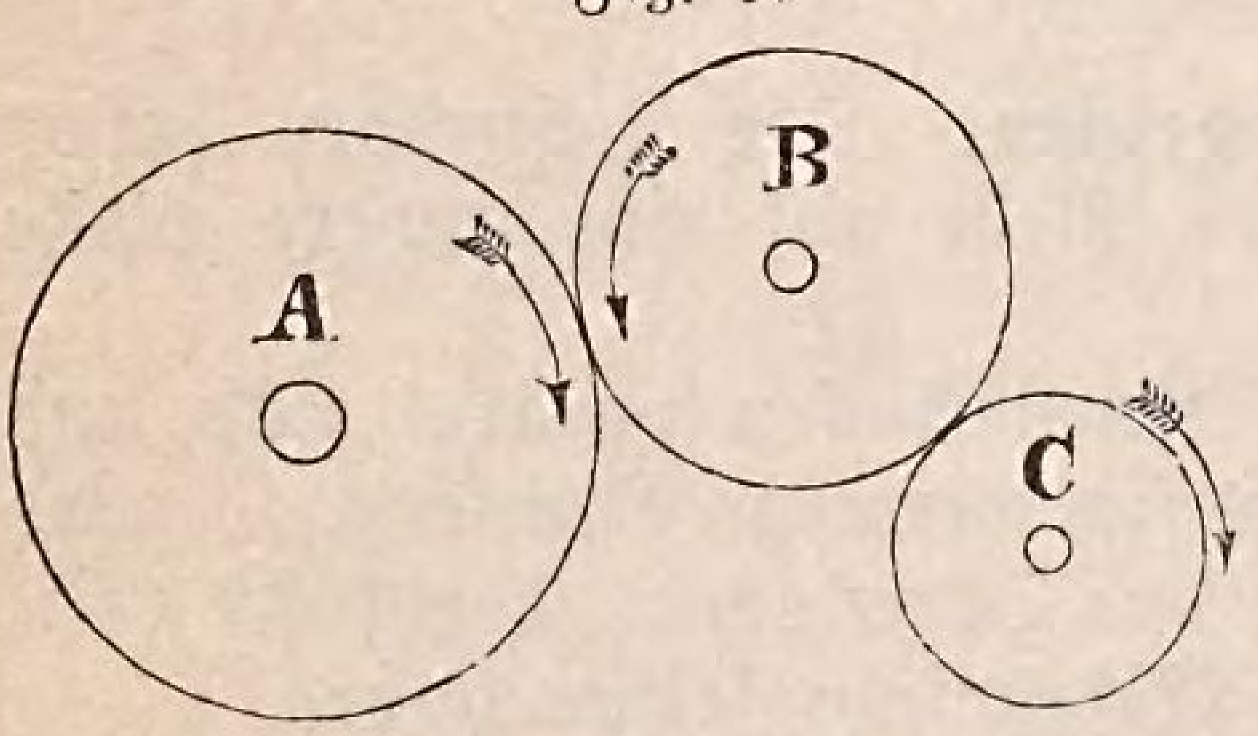
den Achsen und die Zähne der konischen Räder (Winkelräder) nach dem Durchschnittspunkte A der Achsen laufen.

Die zwei Kreise der Stirnräder, welche sich berühren und während der Drehung gleiche Geschwindigkeiten haben, heißen Teilkreise. Bei den Winkelrädern werden die Umfänge der Kegelgrundflächen DE und DF als Teilkreise betrachtet. Der Halbmesser eines Zahnrades ist immer derjenige des Teilkreises. Teilt man den Teilkreis in so viele gleiche Teile, als das Rad Zähne erhalten soll, so wird jeder dieser Teile Schrift oder Teilung genannt.

2. **Uebertragung der Bewegung durch Zahnräder.** Zwei in einander greifende Räder erhalten gleiche Teilung. Daher verhalten sich die Anzahl Zähne beider Räder wie ihre Durchmesser. Wenn diese Durchmesser sich verhalten wie 5 : 7, so kann die Zahl der Zähne beider Räder nur ein Vielfaches der Zahlen 5 und 7 sein, also z. B. 10 und 14; 15 und 21; 20 und 28 u. s. w.

Greifen zwei Räder in einander, so macht dasjenige mit dem kleinern Durchmesser in derselben Zeit eine größere Anzahl Umgänge als das andere, und zwar verhalten sich deren Tourenzahlen umgekehrt wie ihre Durchmesser. Hat z. B. das eine Rad 64 Zähne, das andere 16, so macht dieses gleichzeitig 4mal mehr Umgänge als jenes.

Fig. 3.



Die Größe eines Zwischenrades B, Fig. 3, hat auf die Uebersetzung der Räder A und C keinen Einfluß, weil die Umfänge der beiden äußern Räder A und C sich gerade so schnell drehen, wie der Umfang des Zwischenrades. Ein solches Zwischenrad dient aber dazu, die Bewegung von A aus auf eine andere Achse so zu übertragen, daß beide Räder A und C sich nach gleicher Richtung umdrehen.

Die Uebertragung der Bewegung mittelst zweier Räderpaare a, B und b, C, Fig. 4, erfordert drei Achsen. Auf der Zwischenachse sitzen zwei Räder b, B fest. Hat nun z. B. B 4mal mehr Zähne als a, so macht a gleichzeitig 4mal mehr Umgänge als B; hat C 5mal mehr Zähne als b, so macht b 5mal mehr Umgänge als C; folglich macht a 4 . 5 oder 20mal mehr Umgänge als C.

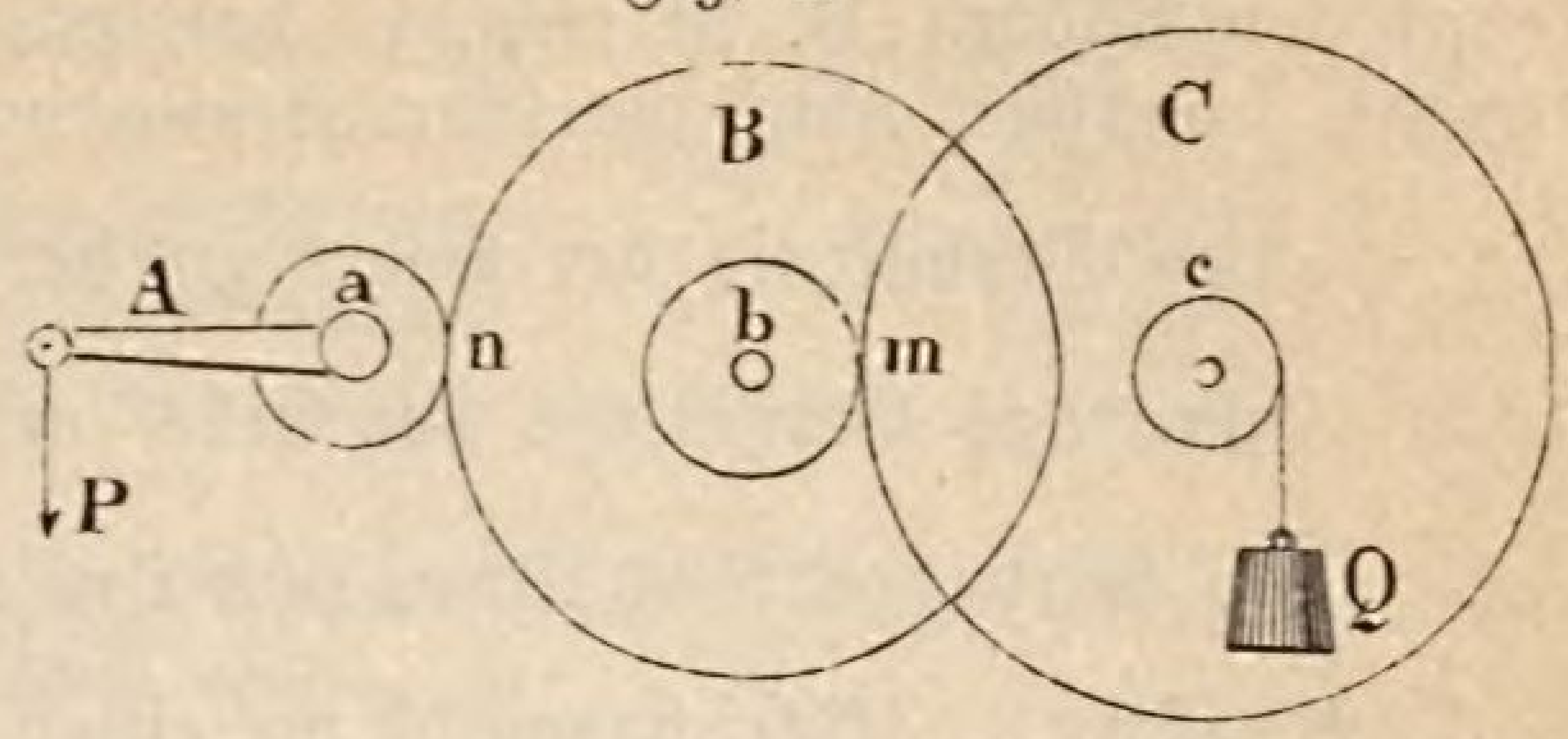
Soll C nur 12mal mehr Umgänge machen als a, so zerlege man 12 in zwei Faktoren, wie 3 und 4; $2^1/_4$ und $5^1/_3$ u. s. w. Gibt man nun z. B. dem Rad B 3mal mehr Zähne als a, und dem Rad C 4mal mehr als b, so wird der Zweck erreicht.

Der Antrieb kann vom Rad a ausgehen; dann findet eine Uebertragung ins Langsame statt; oder von C aus, dann tritt eine Uebertragung ins Schnelle ein.

3. **Gleichgewicht ohne Nebenhindernisse.** Jedes Räderwerk kann zerlegt werden in so viele Teile, als Achsen vorkommen; alsdann stellt jeder Teil ein Rad an der Welle vor, wobei indessen die Welle durch ein Getriebe, eine Kurbel 2c. ersetzt sein kann.

Bei dem Räderwerke, Fig. 4, seien a, b die Radien der Getriebe, B, C diejenigen der Räder, c der Halbmesser der Welle und A die Kurbellänge; ferner Q die Last an der Seilwelle, m, n die Pressungen der Zähne in den auf einander folgenden Zahneingriffen, in der Richtung der Drehung, und P der Druck auf die Kurbel, so ist

Fig. 4.



$$m = Q \cdot \frac{c}{C}; \qquad n = m \cdot \frac{b}{B}; \qquad P = n \cdot \frac{a}{A}.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen folgt:

$$\frac{P}{Q} = \frac{a}{A} \cdot \frac{b}{B} \cdot \frac{c}{C}.$$

Die Brüche rechts sind Verhältnisse zwischen den getriebenen und treibenden Armen derselben Achse. Man nennt diese Verhältnisse auch Uebersetzungen. Somit ist das Verhältnis von Kraft zu Last gleich dem Produkt aus den Uebersetzungen der drei Achsen, oder auch: es verhält sich die Kraft P zur Last Q wie das Produkt der Radien der Getriebe und der Welle zum Produkt der Radien der Räder und der Kurbellänge.

Statt der Radien der gezahnten Räder kann man auch die Anzahl ihrer Zähne in Rechnung bringen.

Die Umfangsgeschwindigkeiten von Kurbel und Welle verhalten sich umgekehrt wie P : Q, weil die Arbeiten von P und Q gleich sind.

Beisp. 1. An einem Kran soll eine Last von 4000 kg gehoben werden. Welche Kräfte müssen in den Zahneingriffen m, n und am Ende der Kurbel wirken, wenn die Hebelsarme nach obiger Figur sind:

$$a = 6 \text{ cm}, \qquad b = 7 \text{ cm}, \qquad c = 11 \text{ cm},$$
$$A = 36 \text{ „} \qquad B = 42 \text{ „} \qquad C = 44 \text{ „}$$

Es ist die Kraft im Eingriff . . $m = 4000 \cdot \frac{11}{44} = 1000$ kg.

„ „ „ „ „ „ . . $n = 1000 \cdot \frac{7}{42} = 166{,}7$ „

„ „ „ „ an der Kurbel . $P = 166{,}7 \cdot \frac{6}{36} = 27{,}8$ „

Ferner ist das Verhältnis der Kraft zur Last

$$\frac{P}{Q} = \frac{11}{44} \cdot \frac{7}{42} \cdot \frac{6}{36} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{144}.$$

Mithin ist die Kraft 144mal kleiner als die Last. Die Arbeiten der Kraft und Last sind gleich. Folglich muß die Kraft an der Kurbel einen 144mal größern Weg als die Last durchlaufen, also auch 144mal mehr Geschwindigkeit als die Last haben.

Beisp. 2. Wie verhält sich bei einer Bauwinde die Kraft an der Kurbel zur Last am Seil?

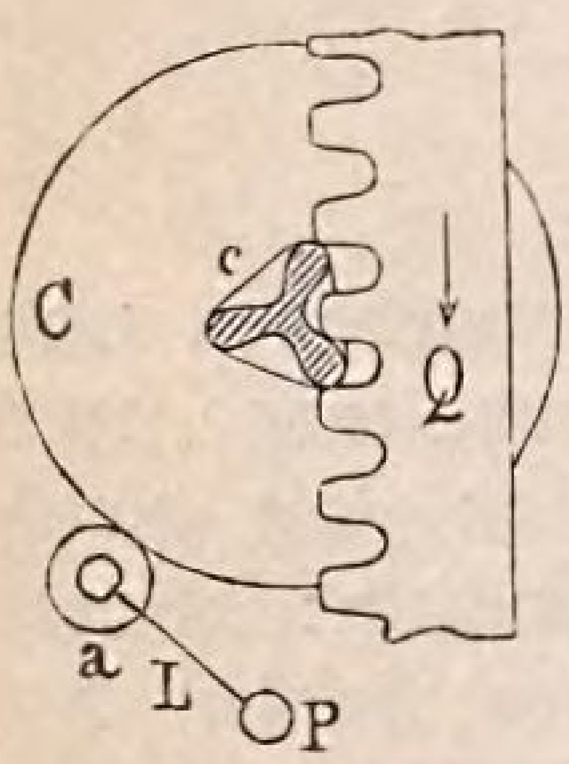
Eine Bauwinde hat zwei Achsen: eine Kurbelachse und eine Seilwellenachse. Denkt man sich in der vorstehenden Figur die Zwischenachse (mit den Rädern B, b) weg, so daß das Rädchen a in das Rad C eingreift, so erhält man die Einrichtung der Bauwinde. Es sei

das Verhältnis der Hebel an der Kurbelachse . $\frac{a}{A} = \frac{1}{5}$

und das Verhältnis der Hebel an der Wellenachse $\frac{c}{C} = \frac{1}{6}$,

so wird das Verhältnis von Kraft zu Last $= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$.

Beisp. 3. Gleichgewicht an einer Wagenwinde. Die Wagenwinde hat zwei Achsen; die Kurbelachse und die Radachse. Sie stimmt also mit der Bauwinde überein, nur daß die Last auf der Zahnstange liegt statt an einem Seile hängt. Es seien die Verhältnisse der Hebel:



an der Kurbelachse $\frac{a}{L} = \frac{1}{15}$, an der Radachse $\frac{c}{C} = \frac{1}{6}$,

so wird Verhältnis von Kraft und Last $= \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{90}$,

d. h. mit der Kraft 1 kann eine Last 90 gehoben werden. Dabei bewegt sich die Last 90mal langsamer als die Kraft. Daher sagt man auch: Was man an Kraft gewinnt, verliert man an Geschwindigkeit.

4. **Gleichgewicht mit Rücksicht auf Nebenhindernisse.** Beim Räderwerk, das in Fig. S. 103 dargestellt ist, wird der Druck m wegen der Steifigkeit des Seiles und der Achsenreibung größer sein als ohne diese Hindernisse, etwa im Verhältnis von 1 : 1,08; ebenso n wegen der Achsen- und Zahnreibung im Verhältnis cirka von 1 : 1,04 und P im Verhältnis von 1 : 1,04.

Bezeichnet man diese Widerstandskoefficienten 1,08, 1,04 . . allgemein mit k, k′, k″ . ., so wird

$$m = Q \cdot \frac{c}{C} k, \quad n = m \cdot \frac{b}{B} k', \quad P = n \cdot \frac{a}{A} k''.$$

Multipliziert man diese Gleichungen, so wird

$$\frac{P}{Q} = \frac{a}{A} \cdot \frac{b}{B} \cdot \frac{c}{C} k k' k''.$$

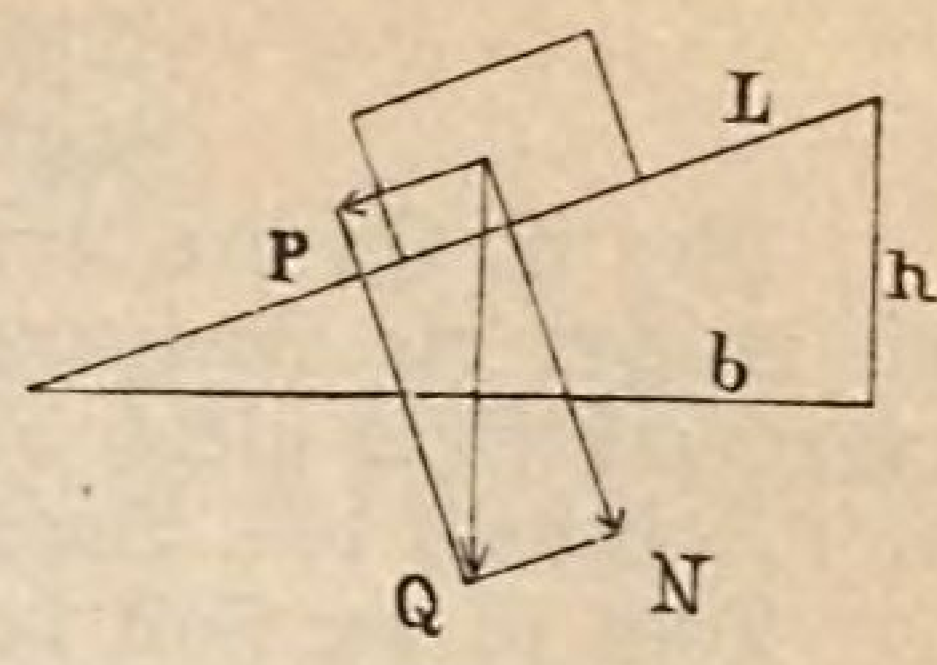
Es steigt daher die Kraft P wegen aller Widerstände im Verhältnis von 1 : k k′ k″.

Beisp. Für den Kran auf S. 103 und vorstehende Werte von k, k′, k″ nimmt P zu im Verhältnis von 1 : 1,08 . 1,04 . 1,04 oder wie 1 : 1,17. Es ist daher das wirkliche Verhältnis zwischen Kraft und Last

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{144} \cdot 1{,}17 = \frac{1}{123}.$$

26. Gleichgewicht auf der schiefen Ebene.

1. **Kräfte auf der schiefen Ebene.** Es seien (S. 105)
L die Länge der schiefen Ebene,



b ihre Basis (horizontal gedacht),
h ihre Höhe (vertikal gerichtet),
Q das Gewicht eines Körpers auf ihr und
f der Reibungskoefficient.

Man zerlege Q durch das Parallelogramm in die Seitenkräfte P parallel, und N normal zur schiefen Ebene, so verhält sich ohne Rücksicht auf Reibung:

1. die Kraft P, welche das Herabgleiten bewirkt, zur Last, wie die Höhe der schiefen Ebene zur Basis und

2. der Normaldruck N des Körpers, welcher Reibung hervorbringt, zur Last, wie die Basis zur Länge. Es ist daher

$$P = Q \frac{h}{L}, \quad N = Q \frac{b}{L}.$$

Die Reibung des Körpers auf dieser schiefen Ebene ist gleich dem Normaldruck N, multipliziert mit dem Reibungskoefficienten. Folglich

$$\text{Reibung} = N f.$$

Während der Bewegung aufwärts ist diese Reibung und die Kraft P zu überwinden, während der Bewegung abwärts der Unterschied beider; folglich ist

$$\text{Zugkraft aufwärts} = N f + P,$$
$$\text{Zugkraft abwärts} = N f - P.$$

Beisp. Welche Kraft kann eine Last von 600 kg auf einer schiefen Ebene auf- und abwärts bewegen, wenn dieselbe auf 12 m Länge um 1 m steigt und der Reibungskoefficient $^1/_8$ beträgt? Es ist

Basis der schiefen Ebene . . . $\sqrt{(12^2 - 1^2)} =$ 11,96 m.

Reibung für beide Bewegungen $600 \cdot \frac{11,96}{12} \cdot \frac{1}{8} =$ 74,7 kg.

Kraft P, parallel zur schiefen Ebene $600 \cdot \frac{1}{12} =$ 50,0 „

Zugkraft aufwärts . . . . . $74,7 + 50 = 124,7$ „

Zugkraft abwärts . . . . . . $74,7 - 50 = 24,7$ „

Wenn dagegen der Reibungskoefficient $= \frac{1}{15}$, so wird sein

Reibung für beide Bewegungen $600 \cdot \frac{11,96}{12} \cdot \frac{1}{15} = 39,8$ kg.

Kraft P, parallel zur schiefen Ebene $600 \cdot \frac{1}{12} = 50,0$ „

Folglich muß die Zugkraft bei der Bewegung abwärts mit 50 — 39,8 = 10,2 kg der Bewegung entgegenwirken, wenn keine Beschleunigung eintreten darf.

2. **Bahnen mit schwacher Steigung.** Für die gewöhnlichen Straßen, insbesondere für Eisenbahnen ist die Steigung gering, so daß (wie auch aus dem letzten Beispiel erhellt) die Basis mit der Länge verwechselt werden kann.

Das Verhältnis zwischen Höhe und Basis heißt das Steigungsverhältnis. Bezeichnet man dasselbe mit e, so ist unter obiger Voraussetzung, wenn in den vorhandenen Ausdrücken für N und P ihre Werte eingesetzt werden:

Zugkraft aufwärts $= Qf + Qe$,
Zugkraft abwärts $= Qf - Qe$.

Hier ist Qf die Kraft, mit welcher die Reibung, und Qe die Kraft, mit welcher die Steigung überwunden wird. Wenn somit das Steigungsverhältnis gleich dem Reibungsverhältnis wird, so ist die Zugkraft aufwärts das Doppelte der Reibung und diejenige abwärts $= 0$.

Dies ist der Fall bei Eisenbahnen, welche 1 auf 200 steigen, wenn der Reibungskoefficient konstant $= 1/200$ angenommen wird. Für eine solche Steigung oder auch jede geringere ist die Arbeit für eine Hin- und Herfahrt die gleiche wie auf einer horizontalen Bahn, mit dem Unterschiede, daß sich bei der horizontalen die Arbeit auf beide Fahrten gleichförmig verteilt, während bei der schiefen Bahn die Gesamtarbeit ganz oder zum größern Teil zum Hinaufsteigen verwendet wird.

Ist e 2mal größer als f, so wird die Zugkraft aufwärts das 3fache der Reibung; abwärts muß die Bremse hemmend wirken mit dem Betrage der Reibung. Dies ist für obige Annahmen der Fall bei Bahnen, welche 1 auf 100 steigen. Für eine Steigung von 2 Prozent, d. h. 1 auf 50, ist nach Obigem 5mal mehr Arbeit nötig, als auf horizontaler Bahn u. s. w.

Bei guten Landstraßen und gewöhnlichen Frachtwagen ist $f = 1/35$ anzunehmen. Bei einer Steigung von 1 auf 35 wird daher aufwärts die doppelte, abwärts keine Zugkraft nötig.

3. **Arbeit auf der schiefen Ebene.** Multipliziert man die Zugkraft, wie sie eben für die Bewegung aufwärts angegeben wurde, mit der Länge L der schiefen Ebene, so erhält man als Arbeit dieser Kraft

$$Qbf + Qh.$$

Allein Qbf und Qh sind die Arbeiten, welche es braucht, um den Körper längs der Basis b und längs der Höhe h fortzuziehen. Die Arbeit längs der Länge ist also gerade so groß wie die Arbeiten längs der Basis und Höhe zusammen.

4. **Reibungswinkel.** Liegt ein Körper auf der schiefen Ebene so, daß er gerade auf dem Punkt ist, durch sein eigenes Gewicht hinabzugleiten, so nennt man den Winkel a, welchen die schiefe Ebene mit der Basis bildet, den Reibungswinkel. In diesem Fall ist das Reibungsverhältnis f gleich dem Verhältnis h : b; mithin

$$f = h : b = \text{tang } a.$$

Die trigonometrische Tangente des Reibungswinkels ist also gleich dem Reibungskoefficienten.

Beisp. 1. Wenn ein Körper auf einer schiefen Ebene, deren Höhe 0,2 m und deren Basis 0,8 m ist, zu gleiten beginnt, so ist der Reibungskoefficient $f = 0{,}2 : 0{,}8 = 0{,}25$.

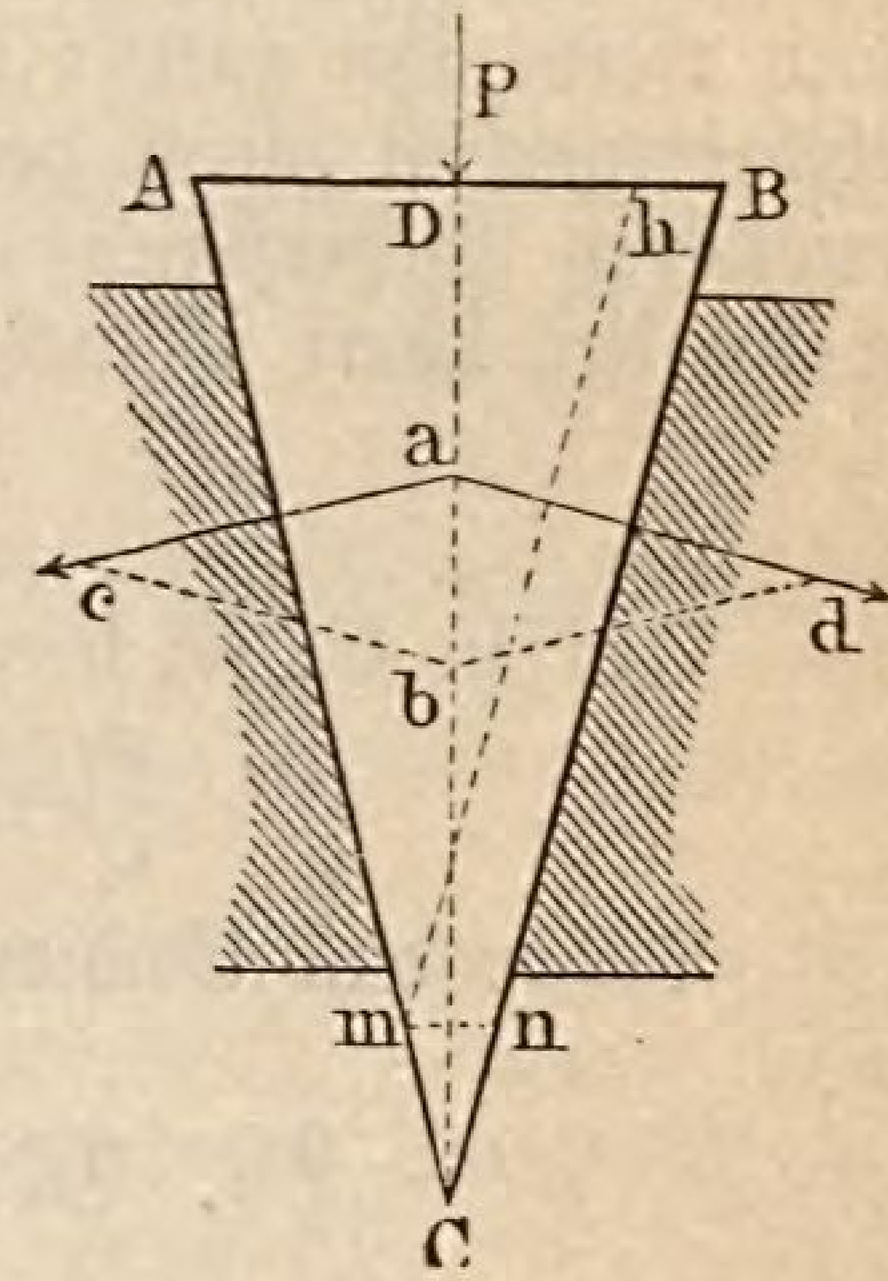
Da nach der Tabelle tang $14^0 = 0{,}2493$, also tang 14^0 sehr nahe $= 0{,}25$, so ist auch der Reibungswinkel hier sehr nahe $= 14^0$.

Beisp. 2. Nach Rondelet sollen gut zugerichtete Steine erst bei einem Reibungswinkel von $28^0 - 35^0$ der Berührungsfläche ausgleiten. Da tang $28^0 = 0{,}5317$ und tang $35^0 = 0{,}7062$, so entsprechen diese Reibungswinkel den Reibungskoefficienten 0,53 und 0,70.

27. Gleichgewicht am Keile.

1. **Eintreiben des Keiles.** Der Keil habe die Form eines aufrechten Prismas mit einem gleichschenkligen Dreiecke ABC als Grundfläche. Es sei

P die Kraft, welche senkrecht auf den Rücken AB wirkt,
Q der Druck des Keiles senkrecht auf die Seiten AC und BC,
e das Verhältnis AD : AC zwischen dem halben Rücken und der Seite und
f der Koefficient der Reibung, welche sich längs beider Seiten geltend macht. Man mache ab = P, ziehe ac und ad senkrecht auf die Seiten des Keiles und vollende das Parallelogramm acbd, so stellen ac und ad den Seitendruck Q vor. Die Dreiecke abc und ABC sind ähnlich; folglich verhält sich die Kraft ab zum Seitendruck ac, wie AB zu AC. Ohne Rücksicht auf die Reibung wird deshalb



(1) $$P = 2Qe.$$

Längs der Richtung von C nach A und von C nach B macht sich je eine Reibung geltend = Qf. Setzt man diese beiden Kräfte zusammen, so entsteht eine Resultante $= 2Qf \cdot \frac{CD}{AC}$, welche in der Richtung von C nach D der Kraft P entgegenwirkt. Mithin ist mit Rücksicht auf die Reibung

$$P = 2Qe + 2Qf \frac{CD}{CA}.$$

Gewöhnlich kann CD mit AC verwechselt werden. Dann wird

(2) $$P = 2Q(e + f).$$

Wenn der Keil in mn abgeschnitten ist, so ziehe man mh parallel zu CB. Alsdann ist das Verhältnis 2e = Ah : Am.

Beisp. Ein Keil werde zur Befestigung eines Rades auf einer Welle verwendet. Es sei AB = 1,2 cm, mn = 1 cm, Am = 16 cm und f = 0,30, so ist

$$Ah = 1{,}2 - 1 = 0{,}2; \quad 2e = 0{,}2 : 16 = 0{,}0125,$$
$$\text{Kraft } P = Q\,(0{,}0125 + 2 \,.\, 0{,}30) = 0{,}6125\,Q,$$

d. h. die Kraft P ist $61\frac{1}{4}$ Prozent vom Seitendruck Q. Ohne Rücksicht auf die Reibung wäre P nur $1\frac{1}{4}$ Prozent von Q.

2. **Lostreiben des Keiles.** Hört der Druck P auf, so hat der Keil das Bestreben loszuspringen. Alsdann wirkt die Reibung nach entgegengesetzter Richtung. Bezeichnet p die Kraft zum Lostreiben des Keiles, in der Richtung CD gedacht, so erhält man aus (2)

(3) $$p = 2Q\,(f - e).$$

Im vorhergehenden Beispiel wird daher $p = Q\,(2\,.\,0{,}3 - 0{,}0125) = 0{,}5875\,Q$, d. h. die Kraft p zum Lostreiben des Keiles ist $58^3/_4$ Prozent vom Seitendruck Q.

Für den Fall, wo der Keil gerade auf dem Punkte ist, loszuspringen, muß vermöge der Formel (3) sein

$$0 = e - f \text{ oder } e = f,$$

d. h. es muß das Steigungsverhältnis e gleich sein dem Reibungsverhältnis. Ist e größer als f, so springt der Keil los; kleiner als f, so haftet er fest. Für Keile, bei denen die Höhe mit der Seite nicht verwechselt werden kann, muß $\frac{CD}{CA}$ statt 1 genommen werden.

3. **Keilpresse.** Das Gewicht G falle von der Höhe H auf den Keil und treibe ihn zuletzt noch um h vorwärts. Wird abgesehen von dem Arbeitsverlust durch den Stoß, so ist Arbeit $GH = Ph$, wenn P den mittleren Widerstand längs des Weges h bezeichnet. Hieraus folgt, wenn der Wert P aus (2) eingeführt wird:

$$\frac{G}{Q} = 2 \cdot \frac{h}{H}\,(e + f).$$

Beisp. Es sei $h = 2$ cm, $H = 30$ cm, $e = 0{,}08$, $f = 0{,}07$, so wird

$$\frac{G}{Q} = 2 \cdot \frac{2}{30}\,(0{,}08 + 0{,}07) = 0{,}02.$$

Daher das Gewicht des Schlägers zum Seitendruck wie 2 : 100.

28. Gleichgewicht an der Schraube.

1. **Ohne Rücksicht auf Reibung.** Man denke sich die Schraube einer Presse zugedreht. Der Druck Q rücke längs der Spindel um die Höhe h vor; dabei lege die Kraft p, tangential an dem mittlern Umfang $2r\pi$ der Schraube wirkend, einen Weg gleich diesem Umfang zurück. Da die von diesen Kräften verrichteten Arbeiten Qh und $p\,.\,2r\pi$ einander gleich sind, so folgt

$$p : Q = h : 2r\pi.$$

Folglich verhält sich die drehende Kraft zum Druck längs der Spindel, wie der Spindelweg zum mittlern Spindelumfang. Das Verhältnis $h : 2r\pi$ heißt Steigungsverhältnis. Es werde mit e bezeichnet, so ist

$$(1) \qquad p = Qe.$$

2. **Mit Rücksicht auf Reibung.** Bei der Drehung der Spindel gleiten die Gewinde über eine schiefe Ebene weg; dabei liefern Q und p Seitenkräfte, welche senkrecht zur Reibfläche stehen und daher Reibung verursachen. Bezeichnet f den Reibungskoefficienten, so wird für ein vierkantiges Gewinde

$$(2) \qquad p = \frac{f \pm e}{1 \mp fe}\,Q,$$

wo das obere Zeichen für das Zudrehen, das untere für das Losdrehen zu nehmen ist.

Beisp. Bei einer vierkantigen eisernen Schraube, welche in einer metallenen Mutter läuft, sei $f = 0{,}10$; folglich, wenn die Steigung $e = 0{,}06$ ist:

$$\text{Kraft zum Zudrehen} = \frac{0{,}10 + 0{,}06}{1 - 0{,}06 \,.\, 0{,}10}\, Q = 0{,}16\, Q,$$

$$\text{Kraft zum Losdrehen} = \frac{0{,}10 - 0{,}06}{1 + 0{,}06 \,.\, 0{,}10}\, Q = 0{,}04\, Q.$$

Wird die Reibung nicht berücksichtigt, so ist $f = 0$ zu setzen, also wird die Kraft zum Zudrehen nur $Q e = 0{,}06\, Q$. Es verhält sich mithin die Kraft beim Zudrehen ohne Reibung zur Kraft beim Zudrehen mit Reibung wie $0{,}06 : 0{,}16$ oder $3 : 8$.

Ist die Schraube, unter sonst gleichen Verhältnissen, zweigängig, also $e = 0{,}12$, so wird die Kraft zum Losdrehen $= -0{,}02\, Q$, also negativ, d. h. die Schraube springt von selbst los und zwar mit einer Kraft $= 0{,}02\, Q$.

Für ein scharfes Gewinde mit einem gleichschenkligen Dreieck als Schnitt erhält man aus (2) annähernd

$$p = \frac{f \pm m e}{m \mp f e}\, Q,$$

worin m das Verhältnis zwischen Höhe und Seite des gleichschenkligen Dreiecks bezeichnet.

Für ein Whitworth-Gewinde ist $m = \cos 27{,}5^0 = 0{,}887$; für ein flaches Gewinde $m = 1$.

3. **Anwendung eines Hebels.** Es werde die Spindel oder Mutter mittelst einer Kraft P an einem Hebelsarm L gedreht, so finden für eine Drehung die Arbeiten $P \,.\, 2 L \pi$ und $p \,.\, 2 r \pi$ statt. Durch Gleichsetzen derselben folgt, unter Berücksichtigung von p in (2):

$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{L} \cdot \frac{f \pm e}{1 \mp e f}.$$

Die beiden Brüche rechts heißen Uebersetzungsverhältnisse. Das Verhältnis zwischen der Kraft am Hebel und dem Druck längs der Spindel ist daher gleich dem Produkt aus den beiden partiellen Uebersetzungen.

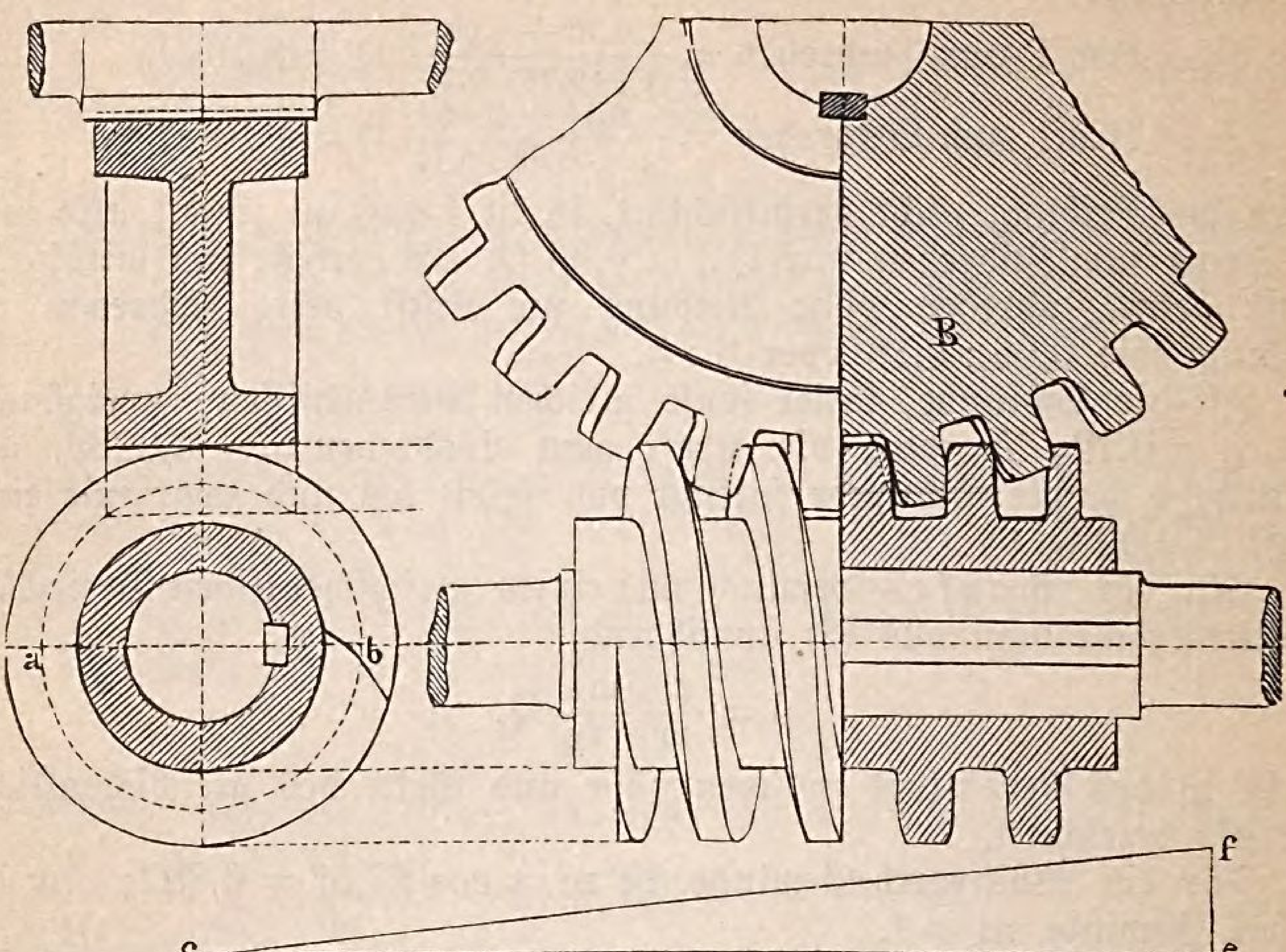
29. Gleichgewicht an der Schraube ohne Ende.

1. **Mechanismus.** Die Schraube ohne Ende und das in dieselbe eingreifende Zahnrad pflanzen die Bewegung unter rechtem Winkel fort, so daß deren Achsen senkrecht auf einander stehen.

In der nachfolgenden Zeichnung, welche eine eingängige Schraube darstellt, ist ab der mittlere Umfang der Schraubengewinde. Man mache ce gleich diesem Umfange und die darauf Senkrechte ef gleich der Ganghöhe, so gibt die schräge Linie cf die mittlere Steigung der Schraubenflächen und zugleich die Neigung der Radzähne zur Radachse an.

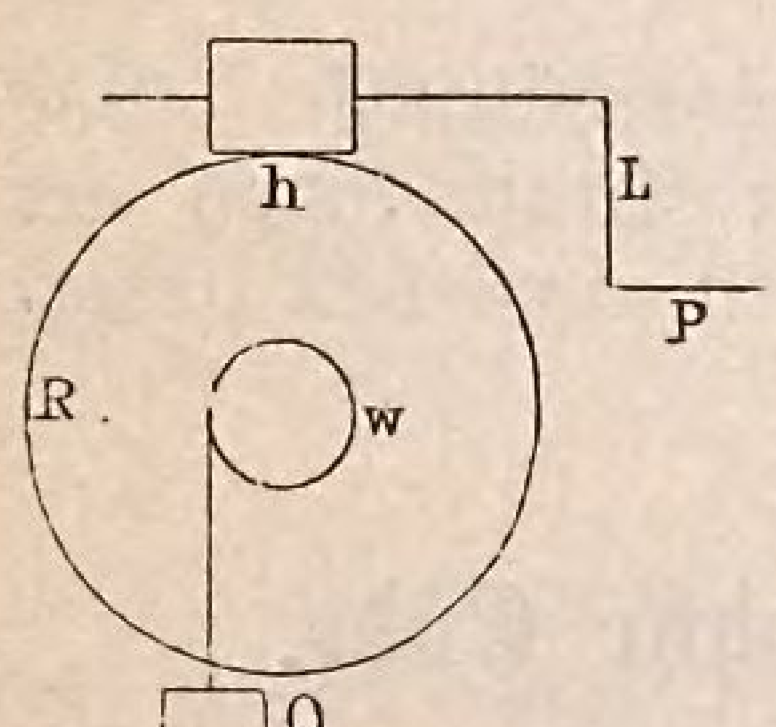
Bei einer eingängigen Schraube ist die Ganghöhe gleich der Radteilung. Dreht sich diese Schraube einmal, so wird das Rad um

einen Zahn fortgeschoben. Hat das Rad 30 Zähne, so muß die Schraube in gleicher Zeit 30mal mehr Umgänge machen als das Rad.



Bei einer zweigängigen Schraube ist die Ganghöhe der Schraubenlinien gleich der doppelten Radteilung. Dreht sich eine solche Schraube einmal, so rückt das Rad um 2 Zähne weiter.

2. **Gleichgewicht ohne Rücksicht auf Nebenhindernisse.** In einer Anordnung, wie sie beistehende Figur andeutet, sei



P die Kraft an der Kurbel,
L die Länge der Kurbel,
Q die Last am Seil,
w der Halbmesser der Seilwelle,
R der Halbmesser des Rades,
h die Höhe des Schraubenganges und
z der Druck, womit die Gewinde der Schraube gegen die Radzähne pressen, in der Richtung der Schraubenachse,

so ist die Arbeit, welche die Kraft P bei einer Drehung verrichtet $= P \,.\, 2 L \pi$. Gleichzeitig wird der Druck z längs des Weges h überwunden. Die Arbeit dieses Druckes ist daher $= h z$. Folglich wird sein

$$(1) \qquad P \,.\, 2 L \pi = h z.$$

An der Radachse halten sich die Kräfte Q und z das Gleichgewicht, wenn ihre statischen Momente gleich sind, also wenn

$$(2) \qquad z R = Q w.$$

Multipliziert man beide Gleichungen, so folgt

$$(3) \qquad \frac{P}{Q} = \frac{w}{R} \cdot \frac{h}{2 L \pi}.$$

Das Verhältnis zwischen Kraft und Last ist also gleich dem Produkt aus den Verhältnissen $w : R$ und $h : 2L\pi$, welche an den beiden Achsen vorkommen.

3. **Zahnreibung.** Der Druck z veranlaßt Reibung. Haben nun r, e und f die Bedeutung wie in § 28 und geht Q wegen des Seil- und Achsenwiderstandes über in Qc (s. § 23), so wird

$$p = \frac{f + e}{1 - fe} z; \quad PL = pr; \quad Rz = Qwc,$$

woraus folgt

$$\frac{P}{Q} = \frac{w}{R} \cdot \frac{r}{L} \cdot \frac{f + e}{1 - fe} \cdot c.$$

Wegen der beiden Widerstände wächst daher die Kraft P im Verhältnis

$$e : \frac{f + e}{1 - ef} \cdot c.$$

Beisp. Wenn $h = 3$ cm, $2r\pi = 30$ cm, $f = 0{,}6$ und $c = 1{,}05$, so findet wegen der Widerstände eine Zunahme von P statt von

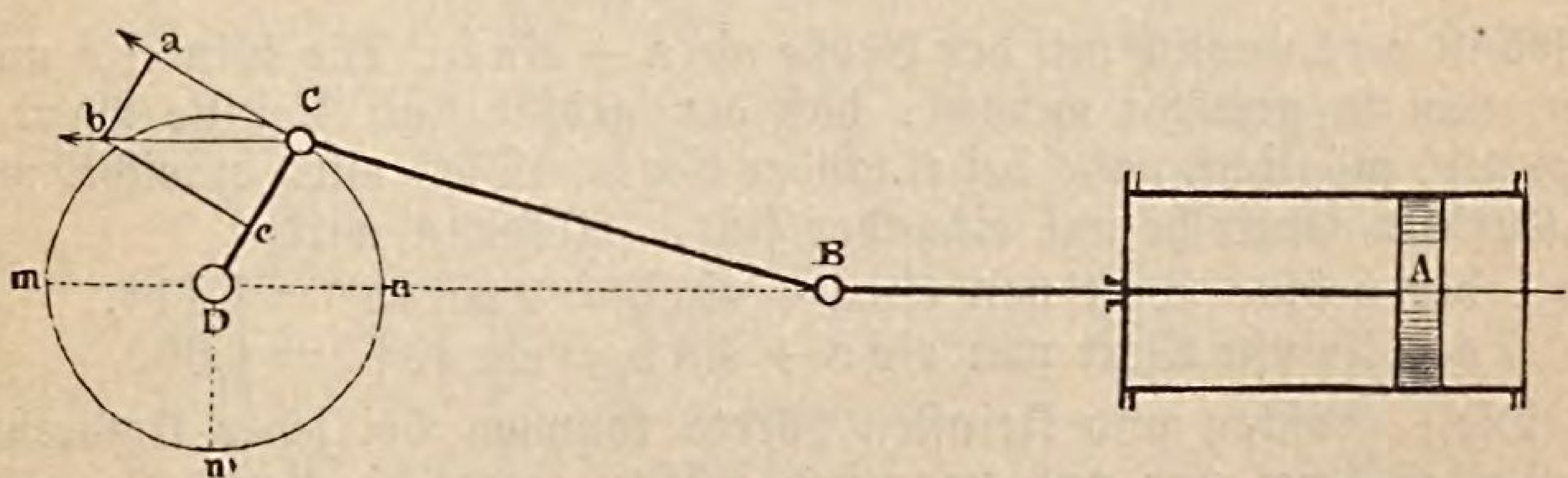
$$0{,}1 : \frac{0{,}06 + 0{,}1}{1 - 0{,}006} \cdot 1{,}05 \text{ oder } 1 : 1{,}71.$$

30. Gleichgewicht an der Maschinenkurbel.

1. **Einfache Kurbel.** Es sei Cb der Druck der Schubstange gegen den Kurbelzapfen C, parallel zur Richtung der Kolbenstange gedacht. Diese Kraft ist z. B. bei einer Dampfmaschine der Druck des Dampfes auf den Kolben. Man zerlege Cb in die Seitenkräfte Cc und Ca. Die erste Seitenkraft drückt die Kurbelwelle in ihr Lager und veranlaßt daselbst Reibung; die zweite Ca wirkt tangential an den Kurbelkreis und bringt somit die Drehung der Kurbel hervor. Es sei

P der Druck Cb, parallel zur Kolbenstange, konstant gedacht,
p der mittlere Wert der tangentialen Kraft Ca,
L die Länge der Kurbel und
α der Winkel, welchen die Kurbel mit der Geraden DB bildet, so ist

$$Cc = P\cos\alpha; \quad Ca = P\sin\alpha.$$



In den toten Punkten n, m ist der Druck auf die Achse am größten, nämlich $= P$, und die tangentiale Kraft am kleinsten, nämlich $= 0$. Macht die Kurbel von einem toten Punkt aus eine Viertels-

drehung, so nimmt der Druck auf die Achse bis auf Null ab und die tangentiale Kraft wächst bis zu ihrem größten Wert.

Bei einer Drehung verrichtet die Kraft P längs eines Weges 4 L eine Arbeit $= 4\,LP$ und p gleichzeitig längs eines Weges $2\pi L$ eine Arbeit $= 2\pi Lp$. Da diese Arbeiten gleich sein müssen, so folgt

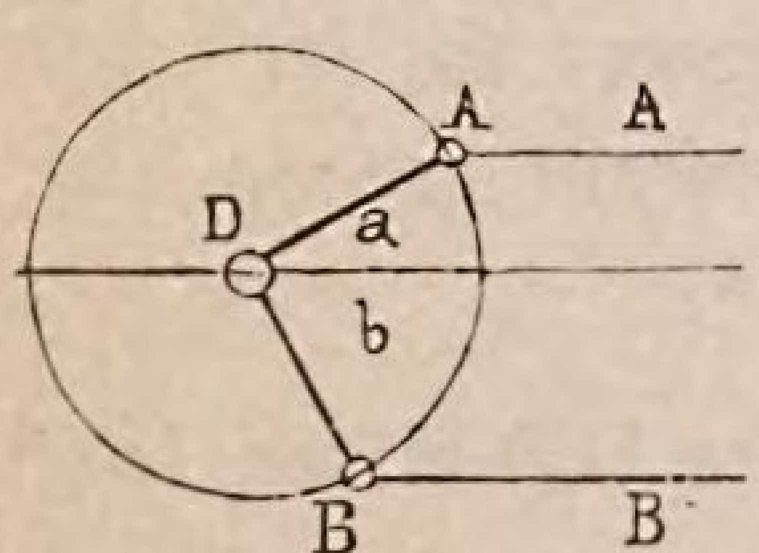
$$p = \frac{2}{\pi} P = 0{,}6366\ P.$$

Gerade eben so groß ist der mittlere Druck auf die Kurbelwelle.

In 4 Stellungen der Kurbel wird die tangentiale Kraft $P \sin \alpha$ gleich diesem mittleren Werte. Für diese Stellungen muß $P \sin \alpha = 0{,}6366\ P$, also $\sin \alpha = 0{,}6366$ sein. In einer dieser Stellungen ist daher $\alpha = 39^0 32'$ oder sehr nahe 40^0. Weicht mithin die Kurbelrichtung um je 40^0 von einem der toten Punkte ab, so ist die tangentiale Kraft gleich ihrem mittleren Wert.

Wegen der Veränderlichkeit der tangentialen Kraft wird die Kurbel ebenfalls eine veränderliche Bewegung annehmen. Der Widerstand (von der Fabrik her), welchen die Kurbelwelle der Drehung entgegensetzt, sei konstant, so wird dieser Widerstand, auf den Kurbelzapfen reduziert, gleich dem mittleren Druck 0,6366 P sein. Die Kurbelwelle sei so weit mit Schwungmassen versehen, daß die Bewegung nicht unterbrochen wird, so werden diese Schwungmassen bei jeder Umdrehung 2mal verzögert längs Bogen von 80^0 und zweimal beschleunigt längs Bogen von 100^0, weil die Kraft während der ersteren Bogen kleiner und während der letzteren größer ist als der Widerstand. Je größer nun die Schwungmassen sind, um so gleichförmiger die Drehung.

2. **Doppelkurbel.** Auf einer Welle D seien zwei Kurbeln AD und BD befestigt. Die Schubstangen AA′ und BB′ seien in jeder Lage parallel zu einander. Es bezeichne



L die Länge jeder Kurbel,
P den Druck auf je eine Kurbel, in der Richtung der Schubstangen konstant wirkend,
a, b die Winkel, welche die Kurbeln mit der Richtung der Schubstangen bilden,

so sind $L \sin a$ und $L \sin b$ die Hebelsarme der Kräfte P, daher ihr gesamtes statisches Moment

$$PL\,(\sin a + \sin b).$$

Dieses ist veränderlich mit der Größe $\sin a + \sin b$. Die Winkel a und b sollen nun so gewählt werden, daß der größte und kleinste Wert des Momentes möglichst nahe bei einander liegen. Dies wird erreicht, wenn die Kurbeln senkrecht auf einander sind. Alsdann wird

der größte Wert von $\sin a + \sin b = 2 \sin 45^0 = 1{,}414$,
der kleinste Wert von $\sin a + \sin b = \sin 90^0 \quad = 1{,}000$.

Diese größten und kleinsten Werte kommen bei jeder Umdrehung der Kurbel 4mal vor und zwar der größte, wenn die Verbindungslinie AB (s. letzte Fig.) senkrecht und parallel liegt zur Richtung der Schubstangen, und der kleinste, wenn eine der Kurbeln in die Richtung der Schubstangen fällt.

Der mittlere Wert der Kraft, welche in tangentialer Richtung an den Kurbelkreis wirkend gedacht werden kann, um die Drehung hervorzubringen, sei p, so ist die Arbeit von p bei einer Umdrehung $= p \,.\, 2\pi L$. Gleichzeitig verrichten die beiden Kräfte P eine Arbeit $= 2\,P \,.\, 4\,L$. Durch Gleichsetzung beider Arbeiten folgt

$$p = \frac{4}{\pi} P = 1{,}273\,P; \quad p\,L = 1{,}273\,P\,L.$$

Da die Schwankungen der tangentialen Kraft p oder des statischen Momentes pL der beiden Kräfte klein ausfallen, so wird die drehende Bewegung der Kurbelwelle, auch ohne große Schwungmassen, ziemlich gleichförmig.

31. Gleichgewicht an Bremsvorrichtungen.

1. **Backenbremse.** Ein Rad, ein Wagen ꝛc. sei in Bewegung, so entspricht der bewegten Masse lebendige Arbeit. Diese sei durch die Wirkung einer Bremse entweder ganz oder teilweise zu vernichten und zwar innerhalb einer gegebenen Zeit oder längs eines bestimmten Weges. Es sei

A die lebendige Arbeit, welche der Masse des Körpers entspricht,
a derjenige Teil von A, welcher nach dem Bremsen noch übrig bleibt,
k die Kraft, womit die Bremsbacken oder das Bremsband normal gegen die Reibfläche drückt,
f der Koefficient der Reibung und
s der Weg, längs welchem die Arbeit von A auf a sinkt,

so ist die Reibung = kf, die Arbeit der Reibung = kfs; folglich

$$(1) \qquad k\,f\,s = A - a.$$

Beisp. 1. Ein Schwungradring habe 2000 kg Gewicht, 4 m Durchmesser und bewege sich mit 12 m mittlerer Umfangsgeschwindigkeit. Ein Bremsbacken drücke am Umfang des Ringes gegen das Rad so, daß derselbe nach zwei Umgängen still stehe. Wie groß muß die Kraft k sein, wenn $f = 0{,}4$ angenommen wird?

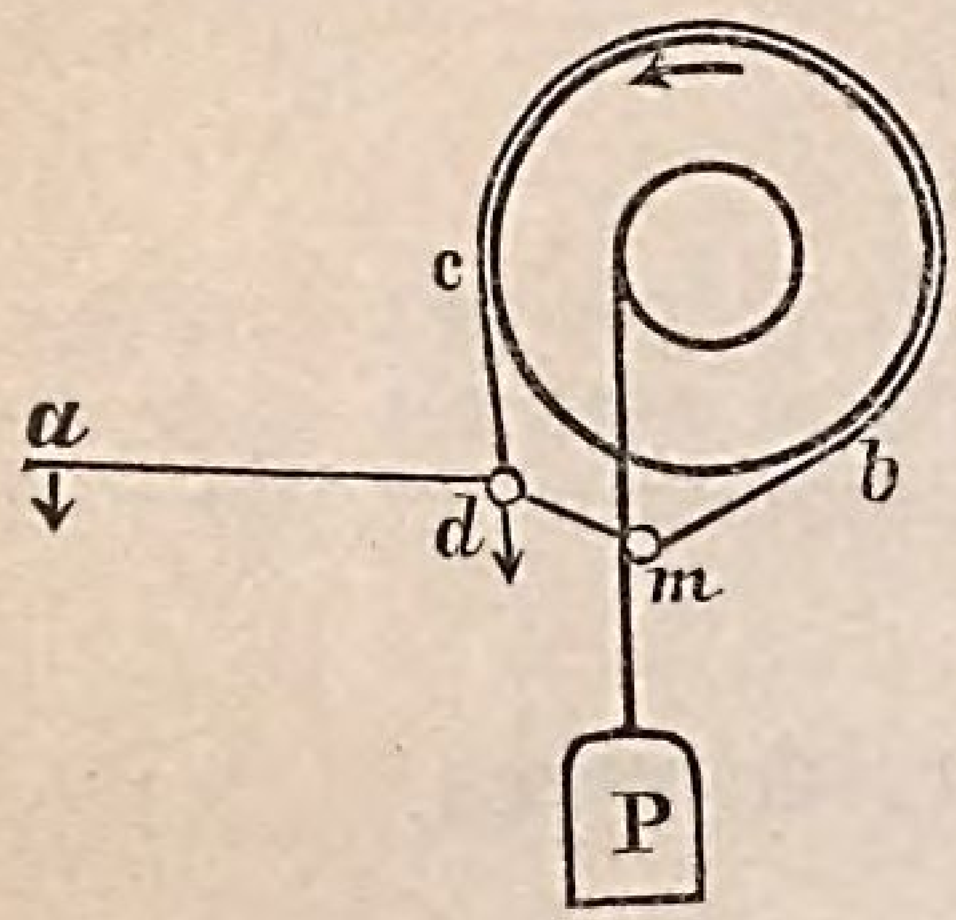
Es ist die lebendige Arbeit des Ringes $A = \frac{2000 \,.\, 12 \,.\, 12}{2 \,.\, 9{,}81} = 14677$ mkg,
ferner der Wert . . . . $a = 0$,
der Weg . . . . $s = 2 \,.\, 4 \,.\, 3{,}14 = 25{,}12$ m,
mithin nach (1) der gesuchte Druck . . $k = \frac{14677}{0{,}4 \,.\, 25{,}12} = 1460$ kg.

Beisp. 2. Ein Eisenbahnzug habe 90 Tonnen Gewicht und bewege sich mit 10 m Geschwindigkeit. Er soll zum Stillstand gebracht werden mittelst Bremsen von 8 Rädern, welche 1 m Durchmesser haben. Jeder Bremsbacken besitze 200 qcm Reibfläche und werde mit einem Druck von 25 kg per 1 qcm Fläche angepreßt. Welchen Weg wird der Wagenzug während des Bremsens durchlaufen?

Es ist der Druck auf die Bremsbacken $8 \,.\, 200 \,.\, 25 = 40000$ kg,
die im Wagenzug angesammelte Arbeit $\frac{90000 \,.\, 10 \,.\, 10}{2 \,.\, 9{,}81} = 458715$ mkg,
daher nach (1) der Weg . . $s = \frac{A}{k\,f} = \frac{458715}{40000 \,.\, 0{,}4} = 28{,}7$ m.

Sollte der Wagenzug auf dem halben Weg zum Stillstand kommen, so müßte auch der Druck der Bremsbacken doppelt so groß sein.

2. **Bandbremse.** Ein Band m b c d von Eisen oder Stahl umschlinge die Bremsrolle, welche in der Richtung des Pfeiles (s. Fig.) sich drehe, infolge des Sinkens einer Last P, die an einem Seil hängt, das auf einer Trommel aufgewickelt ist. Diese Last, reduciert auf den Umfang der Bremsrolle, sei P′. Dadurch muß das Band gegen die Rolle drücken. Dieser Druck werde bewirkt durch einen Hebel a d m, mit dem Drehpunkt in m. Die Kraft drücke in a auf den Hebel. Dadurch erhält das Bandstück m b eine Spannung = T und das Stück c d bekomme eine solche = t, so wird bei den Riemen und Seilrollen sein



$$(2) \qquad T = \frac{(2{,}718)^{bf}}{(2{,}718)^{bf} - 1} P', \text{ und } t = T - P',$$

wo b und f die auf S. 91 angegebene Bedeutung haben.

Nach der Spannung T richtet sich die Stärke des Bandes und von t hängt die Kraft am Hebel bei a ab.

B e i s p. Es werde eine Last von 3600 kg an einer Seiltrommel von 50 cm Durchmesser heruntergelassen. Die Bremsrolle habe 200 cm Durchmesser und werde zu 3/4 ihres Umfanges vom Bremsband umfaßt. Wie groß sind die Spannungen T und t und welchen Querschnitt soll das Band erhalten?

Es ist die Last am Umfang der Bremsrolle 3600 : 4 = 900 kg,
ferner der Bogen . . . . $b = \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot 3{,}14 = 4{,}71.$
Der Reibungskoefficient f werde angenommen . . = 0,5,
so wird der Exponent . . . . $bf = 2{,}355$
und die Potenz . . . . $(2{,}718)^{2{,}355} = 10{,}227.$
Folglich Spannung . $T = \frac{10{,}227}{10{,}227 - 1} P' = \frac{10{,}227 \cdot 900}{9{,}227} = 994$ kg,
und Spannung . . . . $t = 994 - 900 = 94$ kg.
Der Modul der Zugfestigkeit des Bandes sei . . . = 250 kg,
so wird der Querschnitt des Bandes . . . 994 : 250 = 3,98 qcm.
Nimmt man die Breite des Bandes . . . . = 8 cm,
so wird die Dicke desselben . . . . . . 3,98 : 8 = 0,498 cm.

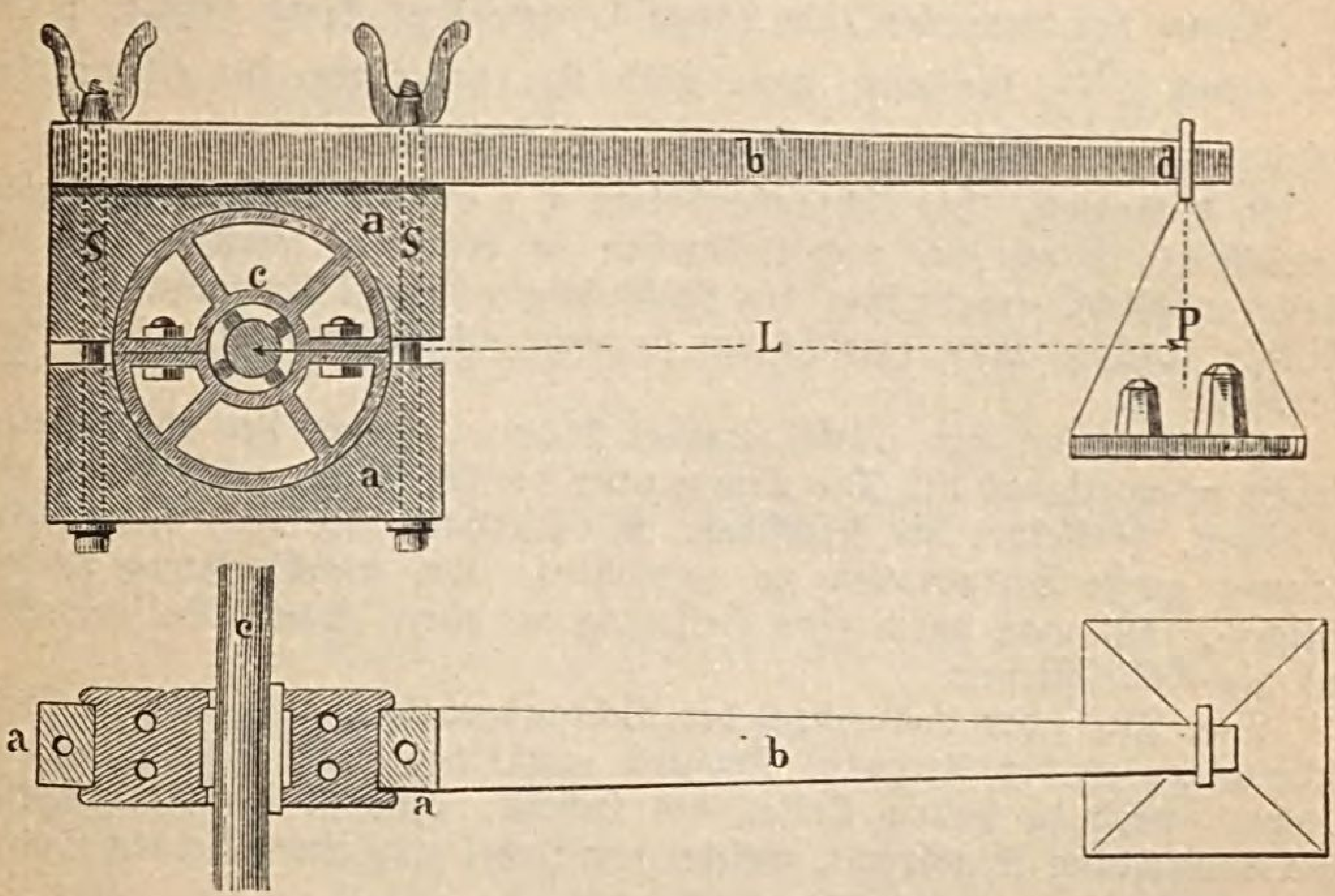
32. Brems-Dynamometer von Prony.

Mit diesem Apparat, erfunden 1821, kann die Arbeit eines Motors gemessen werden, ebenso dient er dazu, um die Arbeit zu ermitteln, die gewisse Arbeitsmaschinen oder Transmissionen absorbieren.

1. **Einrichtung.** Er besteht aus zwei halbkreisförmig ausgeschnittenen Sätteln a a, welche eine Rolle c, auf einer Welle befestigt, umfassen,

und wovon der eine Sattel einen Hebelsarm b trägt, an dessen Ende eine Waagschale zur Aufnahme von Gewichten angebracht ist.

Werden die zwei Sättel vermittelst Schraubenbolzen ss fest an die Rolle angedrückt, und ist der Hebel mit keinem Gewichte beschwert, so wird die Achse den Hebel im Kreise herumführen. Wird dagegen der Hebel mit einem Gewichte beschwert, welches gerade so groß ist, um den Hebel während der Drehung der Welle in seiner Lage zu erhalten, so muß die Rolle in den Sätteln gleiten und es wird alsdann die Arbeit des Motors durch die Reibung der Bremse absorbiert.



Befindet sich die Bremsrolle auf einer aufrechten Welle, wie dies bei der Kraftmessung der Turbinen meistens der Fall ist, so muß das am Ende des Hebels angebrachte Seil über eine Leitrolle, deren Achse parallel zum Hebel liegt, zur Waagschale geführt werden. In diesem Falle übt das Gewicht des Hebels, oder der Bremse überhaupt, keinen Einfluß auf die Kraftmessung aus.

Bei horizontaler Lage der Welle hat dagegen das Gewicht der Bremse Einfluß auf die Drehung. Dieses Gewicht, im Schwerpunkt der Vorrichtung gedacht, reduciere man nach dem Aufhängepunkt d der Last, oder man wäge dieses Gewicht am Aufhängepunkt direkt ab.

2. **Effektgleichung.** Es sei P das auf der Waagschale liegende Gewicht, vermehrt um das der Waagschale und des reducierten Gewichtes der Vorrichtung, L der horizontale Abstand des Aufhängepunktes von der Mitte der Welle, n die Anzahl Umdrehungen der Welle per Minute, r der Halbmesser der Rolle und R die Reibung zwischen den Sätteln und der Rolle. Da sich R und P das Gleichgewicht halten, so sind die statischen Momente dieser Kräfte gleich, also $Rr = PL$. Multipliziert auf beiden Seiten mit 2π, so wird

$$R \cdot 2r\pi = P \cdot 2L\pi$$

die Arbeit sein, welche die Reibung R längs des Weges $2r\pi$, d. h. bei einer Umdrehung, absorbiert. Multipliziert man $2L\pi \cdot P$ mit n, so erhält man die Arbeit in der Minute. Wird das Resultat mit 60 dividiert, so entsteht die Arbeit in der Sekunde. Drückt man L in Metern und P in Kilogrammen aus und dividiert mit 75, so ist die von der Reibung absorbierte Arbeit A per Sekunde in Pferden

$$A = \frac{\pi L}{75 \cdot 30} Pn.$$

Wenn bei Versuchen die Länge L denselben Wert behält, so ist der Bruch $\frac{\pi L}{75 \cdot 30}$ konstant; man wird ihn daher ein- für allemal berechnen und immer nur mit P und n multiplizieren.

3. **Gebrauch.** Die Schraubenbolzen s, s müssen während der Probe fortwährend durch Zu- und Losdrehen so reguliert werden, daß die Welle möglichst regelmäßig die beabsichtigte Anzahl Umdrehungen per Minute macht. Man erreicht um so mehr Gleichförmigkeit, je größer die Rolle ist.

Die Reibung der Sättel erzeugt Wärme, welche der absorbierten Arbeit proportional ist. Die Temperatur der Reibfläche wird daher um so höher, je kleiner die Reibfläche ist. Deshalb sind auch aus diesem Grunde große Bremsrollen zu empfehlen. Um die Erhitzung zu beseitigen, läßt man durch eine Oeffnung im obern Sattel Seifenwasser auf die Rolle fließen.

Das Zu- oder Losdrehen der Schraubenbolzen s, s bewirkt Veränderungen in der Reibung. Dadurch macht der Hebel Schwankungen. Deshalb wird zu beiden Seiten des Hebels, zunächst der Waagschale, eine Vorrichtung angebracht, welche dem Hebel nur einen kleinen Spielraum läßt.

Ist die beabsichtigte Anzahl Umdrehungen und zudem ein möglichst gleichförmiger Gang erzielt, so zählt man während 1—2 Minuten lang die Anzahl Touren und merkt sich auch die Belastung am Hebel.

Bei diesen Proben muß die Verbindung des Motors mit der Transmission unterbrochen sein. Man stelle nach der Bremsprobe die Verbindung mit der Transmission her und lasse den Motor unter denselben Umständen arbeiten, so wird er einen ebenso großen Effekt hervorbringen. Absorbiert davon die Bremse einen Teil, der nach obiger Formel berechnet werden kann, so wird der andere Teil von der Transmission, resp. der Fabrik verbraucht. Es lassen sich in dieser Weise die Arbeitsgrößen bestimmen, welche von einzelnen Teilen der Fabrik oder der ganzen konsumiert werden. Das Verfahren bei einer Turbine zeigt das folgende

Beisp. Das Leitrad einer Turbine habe 36 Oeffnungen, welche durch Schieber, Klappen 2c. geschlossen werden können. Es soll der Nutzeffekt der Turbine und ihr Wirkungsgrad ermittelt werden für einen Wasserzufluß, der für 18, 27 und 36 Leitkanäle erfordert wird.

Bei jedem Versuch ist so viel Wasser auf die Turbine zu leiten, als

die offenen Kanäle durchzulassen vermögen, und jeweilen so lange mit der Bremsprobe zu warten, bis der Wasserzufluß konstant geworden ist.

Es sei das Gefälle bei allen Versuchen . . = 4 m,
die Länge des Bremshebels . . . . . . $L = 3$ m,
die normale Anzahl Umgänge der Turbine . $n = 100$,

so wird für alle Versuche der Wert

$$\frac{\pi L}{75 \,.\, 30} = \frac{3{,}1416 \,.\, 3}{75 \,.\, 30} = 0{,}004189.$$

Erster Versuch. 18 Kanäle der Turbine geöffnet.

Es sei die Anzahl Umgänge . $n = 95$, 100, 105,
die entsprechenden Belastungen $P = 44$, 42, 39 kg,
mithin die Effekte . . . . $A = 17{,}51$ 17,59 17,15 Pferde.
Nun sei die Wassermenge . $= 0{,}570$ kbm, so ist:

Absoluter Effekt des Wassers $\frac{570 \,.\, 4}{75} = 30{,}4$ Pferde.

Somit der Wirkungsgrad der Turbine für obige drei Proben

$$\frac{17{,}51}{30{,}4} = 0{,}576; \quad \frac{17{,}59}{30{,}4} = 0{,}578; \quad \frac{17{,}15}{30{,}4} = 0{,}564.$$

Mithin gibt die Turbine bei ihrer normalen Geschwindigkeit 57,8 Prozent nützliche Arbeit.

Zweiter Versuch. 27 Kanäle der Turbine offen.

Das Verfahren wie oben. Man erhalte:

Anzahl Umgänge n per Minute.	Belastung P.	Nutz-Effekt.	Wasser-menge.	Absoluter Effekt.	Wirkungs-grad.
94	74 kg	29,13	0,820	43,73	0,666
101	69,5	29,40	kbm	Pferde.	0,673
105	66	29,01			0,663

Die Turbine gibt daher bei normaler Geschwindigkeit annähernd 67 Prozent Nutzleistung.

Dritter Versuch. Alle 36 Kanäle der Turbine offen.

n.	P.	Nutz-Effekt.	Wasser-menge.	Absoluter Effekt.	Wirkungs-grad.
96	99	39,82	1,075	57,33	0,695
100	96	40,11	kbm.	Pferde.	0,700
107	87,5	39,09			0,682

Bei voller Beaufschlagung ist die nützliche Leistung 70 Prozent der absoluten Arbeit.

Bei diesen drei Versuchen beträgt die Wassermenge, welche durch je einen Kanal des Leitrades durchfließt:

$$\frac{0{,}570}{18} = 0{,}0315; \quad \frac{0{,}820}{27} = 0{,}0304; \quad \frac{1{,}075}{36} = 0{,}0297 \text{ kbm.}$$

Diese Werte sollten sehr nahe übereinstimmen. Die Abweichungen welche sich zeigen, mögen von der Wassermessung und von der Ungleich-

heit der Oeffnungen herkommen. Die größeren Werte bei den erstern Versuchen weisen darauf hin, daß die Klappen nicht vollkommen schließen.

Vierter Versuch. Die Verbindung der Turbine mit der Transmission werde hergestellt. Die Turbine arbeite mit vollem Wasserzufluß wie beim dritten Versuch. Alle Maschinen in der Fabrik seien abgestellt. Die Bremse werde so belastet, daß man habe: $n = 100$, $P = 82$ kg.

Mithin Entlastung der Bremse um $96 - 82 = 14$ kg.

Somit absorbiert die Transmission $40{,}11 \cdot \frac{14}{96} = 5{,}85$ Pferde.

Fünfter Versuch. Es werde alles belassen wie im 4. Versuch, nur daß noch die Maschinen eines Arbeitssaales angehängt und die Bremse entsprechend entlastet werden. Es sei $n = 100$, $P = 50$ kg.

Daher weitere Entlastung der Bremse $96 - 14 - 50 = 32$ kg.

Mithin absorbiert der Arbeitssaal . . $40{,}11 \cdot \frac{32}{96} = 13{,}37$ Pferde.

Sechster Versuch. Die ganze Fabrik komme in Gang. Es sei Anzahl Umgänge der Turbine $= 100$, Belastung der Bremse $P = 8$ kg.

Mithin absorbiert die Bremse . . . . . $40{,}11 \cdot \frac{8}{96} = 3{,}34$ Pferde.

Somit braucht die Fabrik zum Betrieb . $40{,}11 - 3{,}34 = 36{,}77$ „

Sollte der Hebel bei diesem Versuche eine größere Belastung als diese 8 kg ausmachen, so kann leicht ein Gegengewicht so angebracht werden, daß die wirkliche Belastung der Bremse 8 kg wird.

Siebenter Versuch. Die Bremse werde so stark belastet, daß die Turbine stehen bleibt, so wird die ganz geöffnete Turbine ein gewisses Quantum Wasser durchlassen. Nachdem der Wasserspiegel sich eine Zeitlang konstant erhalten, messe man die Wassermenge. Man finde 1,115 kbm. Mithin läßt die Turbine während des Stillstandes $1{,}115 - 1{,}075 = 0{,}040$ kbm oder im Verhältnis von $1{,}035 : 1$ mehr Wasser durch, als wenn sie mit normaler Geschwindigkeit sich dreht.

Achter Versuch. Man nehme die Bremse ab, hebe die Verbindung der Turbine mit der Transmission auf und lasse wie beim dritten Versuche 1,075 kbm auf die Turbine fließen. Sobald der Wasserstand sich konstant zeigt, zähle man die Anzahl Umdrehungen der Turbine. Man finde 198. Mithin macht die Turbine beim Leergang sehr annähernd doppelt so viel Umgänge als bei ihrer günstigsten Geschwindigkeit.

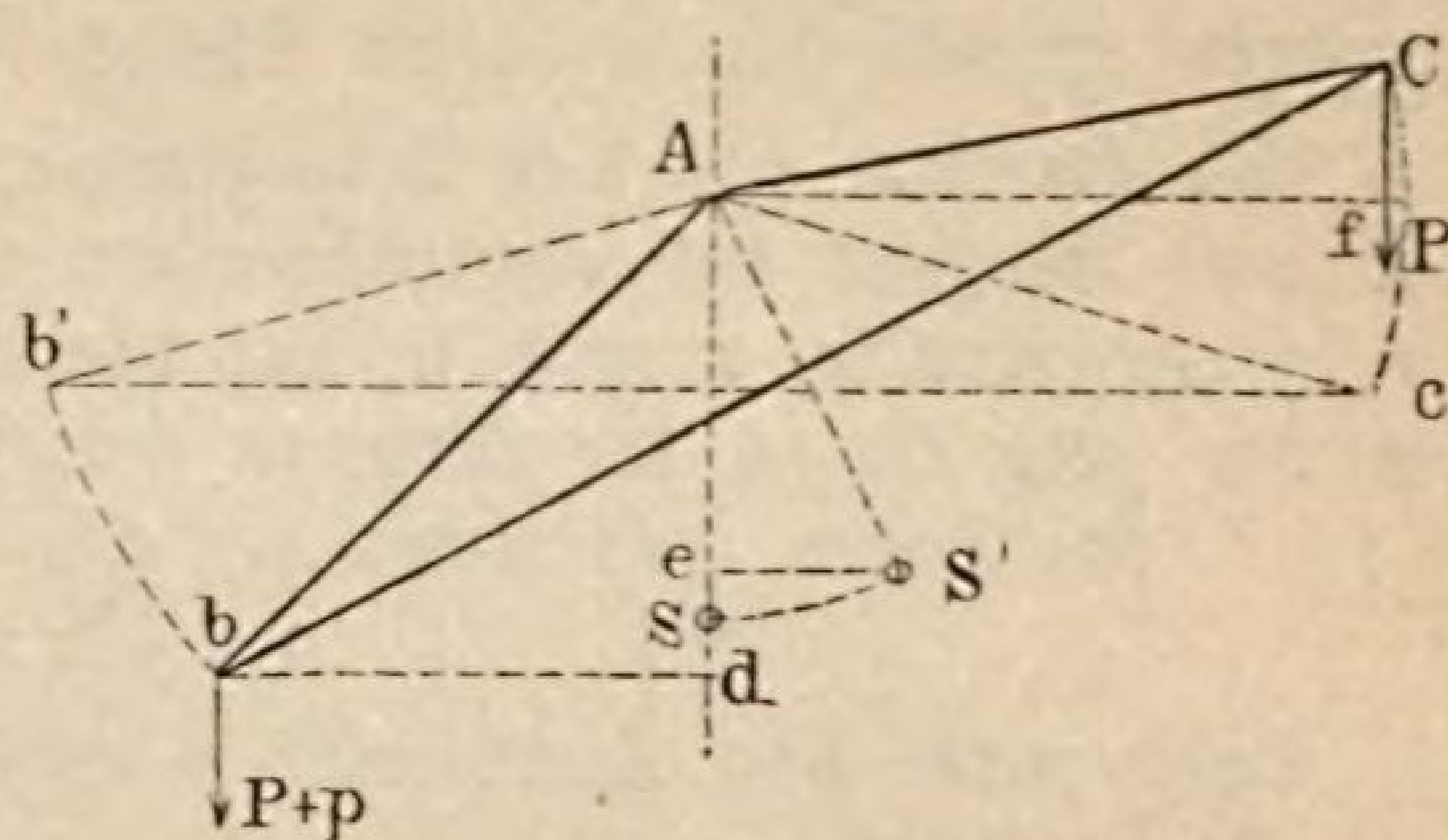
33. Von den Waagen.

1. **Gewöhnliche oder Krämerwaage.** Der Waagbalken muß für sich einspielen, ebenso die ganze leere Waage.

Der Schwerpunkt s des Waagbalkens und der Schalen muß in der Vertikalen durch den Drehpunkt A liegen und zwar unter dem Drehpunkt. Denn würde s mit A zusammenfallen, so wäre die leere Waage in jeder Lage im Gleichgewicht; wäre s über A, so würde die Waage beim geringsten Drucke umschlagen.

Werden gleiche Gewichte auf die Schale gelegt, so soll die Waage einspielen; folglich müssen die Arme des Hebels gleich lang sein.

Die Waage soll empfindlich sein, d. h. bei einem kleinen Zulaggewicht einen möglichst großen Ausschlag geben. Es sei G das Gewicht des Waagbalkens und der Schalen; P ein Gewicht, das auf beide Schalen gelegt werde, und p ein Zulaggewicht in b, infolge dessen der Waagbalken aus der Lage b′Ac′ in die Lage bAc und der Schwerpunkt s nach s′ komme. Man fälle die Geraden bd, es′ und Af senkrecht auf die Vertikalen durch A und C, so sind als Hebelsarme anzusehen: bd für P + p, Af für P und es′ für G. Folglich besteht Gleichgewicht, wenn



$$(P + p) \cdot bd = P \cdot Af + G \cdot es'.$$

Zieht man auf beiden Seiten P · bd ab und dividiert hierauf mit bd, so folgt

$$p = P \frac{Af - bd}{bd} + G \frac{es'}{bd}.$$

Das Zulaggewicht p, das einen beabsichtigten Ausschlag zu geben vermag, fällt also klein aus:

α) Wenn Af = bd. Dies ist für jede Lage des Waagbalkens nur möglich, wenn die Aufhängepunkte b und c mit dem Drehpunkt A in einer Geraden liegen und von ihm gleich weit entfernt sind. Unter dieser Bedingung fällt P aus der letzten Formel weg, d. h. die Empfindlichkeit der Waage wird unabhängig vom abzuwägenden Gewicht;

β) wenn bd groß, d. h. wenn der Waagbalken lang ist;

γ) wenn es′, also auch As klein ist. Mithin wird die Waage um so empfindlicher, je näher ihr Schwerpunkt dem Drehpunkt liegt; endlich

δ) wenn G klein, d. h. wenn die Waage leicht ist.

2. **Schnellwaage.** Sie ist ein gerader Hebel mit zwei ungleichen Armen. Es sei G das Gewicht des Hebels und P das des abzuwägenden Körpers, beide am kürzern Arm in den Abständen a und s von der Achse; ferner p das Laufgewicht auf dem längern Arm, im Abstand b von der Achse; so besteht Gleichgewicht, wenn

$$(1) \qquad Pa + Gs = pb.$$

Nun nehme P um 1 zu; dadurch sei p um x zu verschieben; alsdann besteht wieder Gleichgewicht, wenn

$$(2) \qquad (P + 1)\, a + Gs = p\,(b + x).$$

Zieht man (1) von (2) ab, so findet man für die Verschiebung

$$x = \frac{a}{p}.$$

Dieser Wert von x ist konstant; die Intervalle der Einteilung auf dem längern Arm sind daher gleich groß.

3. **Decimalwaage.** Diese von Quintenz (1821) erfundene Waage enthält drei Hebel: a d, e n und f h. Der Hebel e n bleibt vermöge der Einrichtung horizontal, während die beiden andern sich drehen. Deshalb müssen die vier Schneiden in a, b, c und d in gerader Linie und die fünf Schneiden f, n′, h′, h″, n″ (siehe Grundriß) des gabelförmigen Hebels f h in einer Ebene liegen. Es seien

p das Gewicht auf der Waagschale,
P das Gewicht des abzuwägenden Körpers,
z, y die Kräfte, womit P auf die Stützen in n und e wirkt, und
x der Zug längs der Stange d f; so besteht Gleichgewicht:

am Hebel a d, wenn $p \cdot ab = y \cdot bc + x \cdot bd$; (1)
" " h f, " $x \cdot fh = z \cdot nh$. (2)

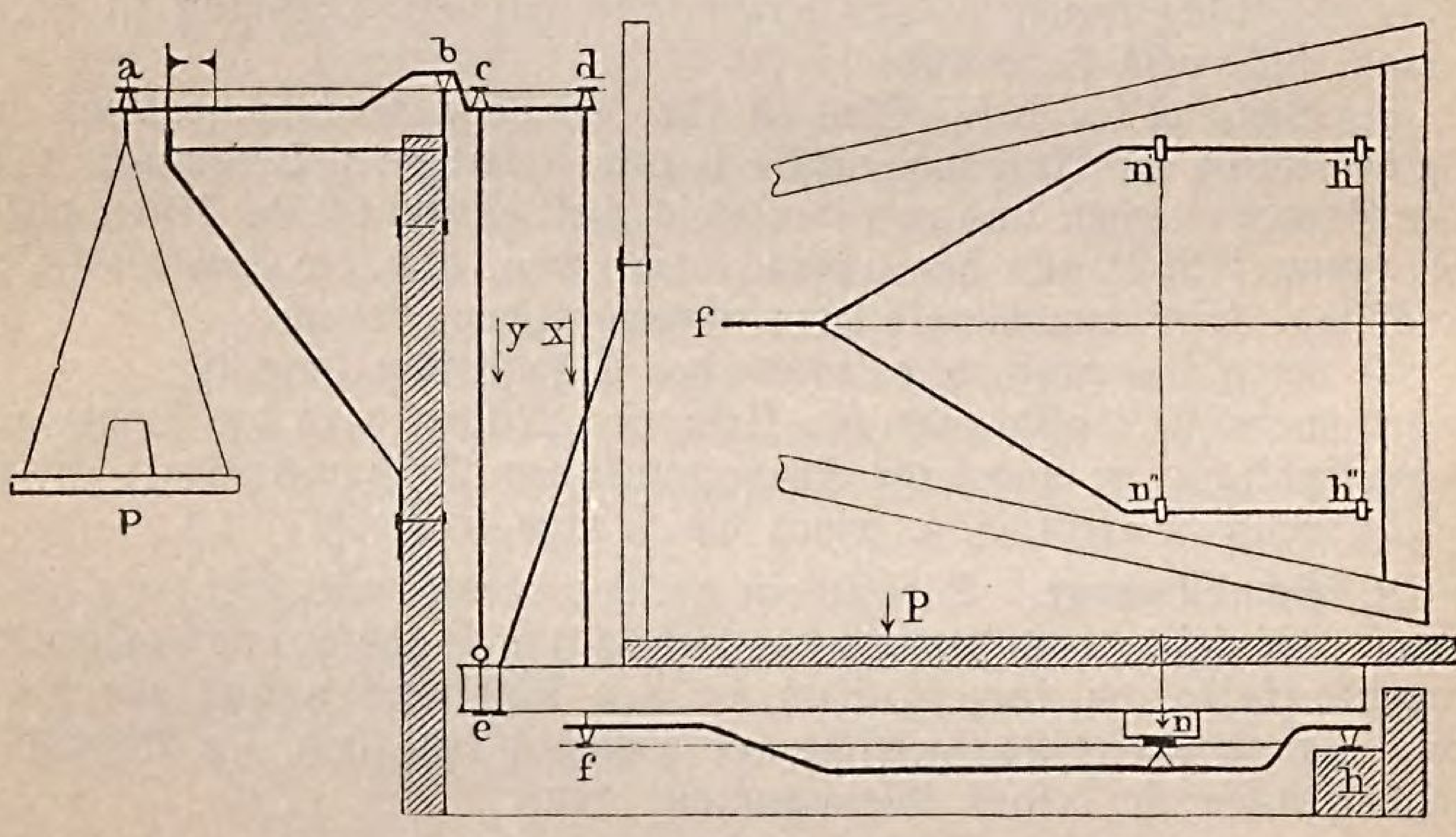
Setzt man den Wert von x aus (2) in (1) und dividiert hierauf mit a b, so folgt

$$p = y \frac{bc}{ab} + z \frac{nh}{fh} \cdot \frac{bd}{ab}. \qquad (3)$$

Damit nun die Gerade e n, also das Tragbrett parallel zur ursprünglichen Richtung bleibe, muß sein

$$nh : fh = bc : db. \qquad (4)$$

Sind diese letztern Verhältnisse z. B. 1 : 6 und sinkt der Punkt c, also auch e, um 1 mm, so sinkt der Punkt d, also auch f, um 6 mm



und daher der Punkt n um 1 mm. Also gehen e und n beim Spielen der Waage um gleichviel auf und ab.

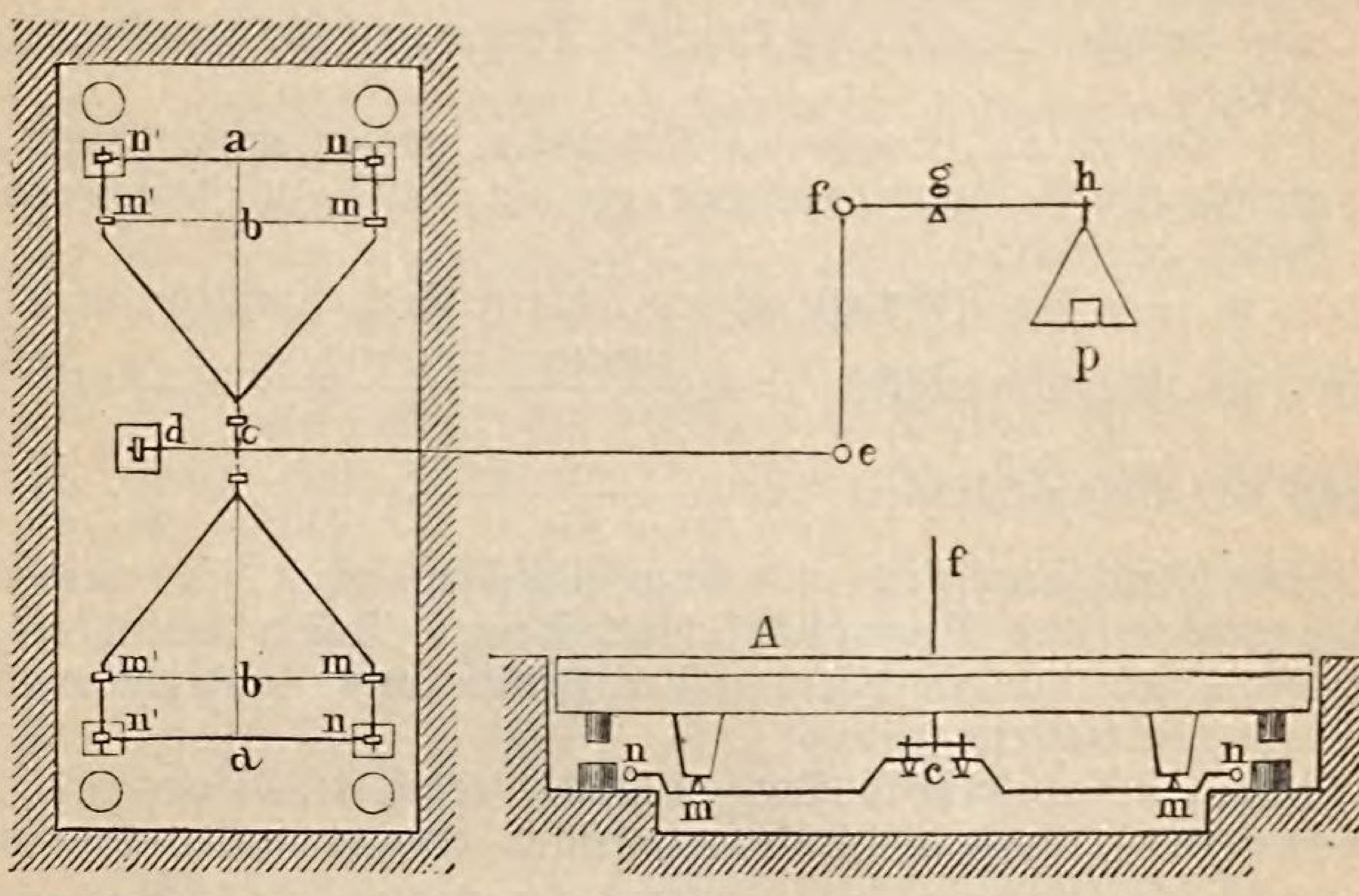
Mit Hilfe von (4) geht Formel (3) über in

$$p = y \frac{bc}{ab} + z \frac{bc}{ab} = (y + z) \frac{bc}{ab}.$$

Allein es ist $y + z = P$; folglich $\frac{p}{P} = \frac{bc}{ab}$.

Nun ist das Verhältnis $bc : ab = 1 : 10$; also wird $p = 0{,}1\,P$.

4. **Brückenwaage.** Unter der Brücke A, auf welche die abzuwägende Last kommt, befindet sich der Hebel de mit einer horizontalen Achse in d. Symmetrisch zu diesem Hebel liegen zwei gabelförmige Hebel cnn′, deren Achsen nn′, nn′ in einer horizontalen Ebene sich befinden und deren Enden mit dem Hebel de in c zusammenhängen. Die Last ruht auf den vier Schneiden in m, m′, m, m′; dadurch drückt sie den Hebel de



in c abwärts. Vertikal aufwärts führt die Stange ef, welche den Hebel fh um die horizontale Achse in g dreht. Es sei

P das Gewicht der auf der Brücke liegenden Last,
y der davon herkommende Vertikaldruck in c,
x der Zug längs der Stange ef und
p das Gewicht auf der Waagschale.

Man ziehe die Gerade cba senkrecht auf nn′, so muß für das Gleichgewicht sein:

am Hebel fh . . $p \cdot gh = x \cdot fg$,
" " de . . $x \cdot ed = y \cdot cd$,
" " cn . . $y \cdot ca = P \cdot ba$.

Multipliziert man diese drei Gleichungen mit einander, so folgt

$$p \cdot gh \cdot ed \cdot ca = P \cdot fg \cdot cd \cdot ba \text{ oder}$$
$$\frac{p}{P} = \frac{ba}{ca} \cdot \frac{cd}{ed} \cdot \frac{fg}{hg}.$$

Um nun eine Centesimalwaage zu erhalten, kann man z. B. nehmen

$$\frac{p}{P} = \frac{13}{99} \cdot \frac{9}{65} \cdot \frac{11}{20} = \frac{1}{100}; \quad \frac{p}{P} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{14}{25} = \frac{1}{100} \text{ rc.}$$

Zwei von den drei Verhältnissen kann man nach Ermessen wählen und das dritte daraus berechnen. Es seien z. B. die beiden ersten Verhältnisse $^1/_6$ und $^1/_8$ und das dritte x, so ist

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \cdot x = \frac{1}{100}; \text{ folglich } x = \frac{6 \cdot 8}{100} = \frac{12}{25}.$$

34. Von den Centrifugal-Regulatoren.

1. **Grad der Gleichförmigkeit und Empfindlichkeit.** Es seien

N_1 und N_0 die größte und kleinste Tourenzahl, welche der Regulator per Minute machen soll;

n eine zwischen N_1 und N_0 liegende Tourenzahl für den Beharrungszustand;

n_1 jene Tourenzahl, welche der Regulator machen muß, damit er den erwähnten Beharrungszustand verläßt, also zu steigen oder zu sinken beginnt;

$\Delta n = n_1 - n$ die Differenz dieser letztern Tourenzahlen; so wird

$$\text{Grad der Gleichförmigkeit} = \frac{\text{mittlere Tourenzahl}}{\text{Differenz d. extremen Tz.}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{N_1 + N_0}{N_1 - N_0},$$

$$\text{Grad der Empfindlichkeit} = \frac{n}{(n + \Delta n) - (n - \Delta n)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{\Delta n}.$$

Sind Gleichförmigkeit und Empfindlichkeit groß, so werden Ungleichförmigkeit und Unempfindlichkeit klein. Daher nennt man die reciproken Werte der vorstehenden Verhältnisse auch Ungleichförmigkeits- und Unempfindlichkeitsgrade.

Wenn der Regulator 60 Touren macht, jedoch auf 61 oder 59 Touren übergehen soll, damit die Hülse zu steigen oder zu sinken beginnt, so wird $n = 60$, $\Delta n = 1$; daher der Empfindlichkeitsgrad $\frac{60}{2 \cdot 1} = 30$.

Bei einer Dampfmaschine mit Schwungrad steigt und sinkt die Geschwindigkeit des letztern zweimal bei jeder Umdrehung. Der Regulator soll aber bei diesen periodischen Schwankungen in seiner Lage verharren. Daher muß sein Empfindlichkeitsgrad kleiner sein als der Gleichförmigkeitsgrad des Schwungrades, oder diesen höchstens erreichen. Geht er über diesen hinaus, so wird der Regulator ohne Katarakt bei jeder Umdrehung auf- und abspringen.

Im nachfolgenden kommen Werte für n^2 und $n_1{}^2$ vor. Durch Division derselben erhält man

$$\frac{n_1{}^2}{n^2} = \frac{(n + \Delta n)^2}{n^2} = \frac{n^2 + 2n \cdot \Delta n + (\Delta n)^2}{n^2}.$$

Da das Glied $(\Delta n)^2$ gegenüber den andern im Zähler des dritten Bruches weggelassen werden kann, so folgt

$$\frac{n_1{}^2}{n^2} = 1 \pm \frac{2 \Delta n}{n}.$$

2. **Arbeitsvermögen des Regulators.** Es sei

R die Energie, d. h. die Kraft, welche der Regulator an der Hülse in vertikaler Richtung entwickeln muß, um den Widerstand des Stellzeuges und die Reibung des Regulators zu überwinden (R wird beim Steigen der Hülse positiv, beim Sinken negativ), und

z der größte Weg der Regulatorhülse, so ist

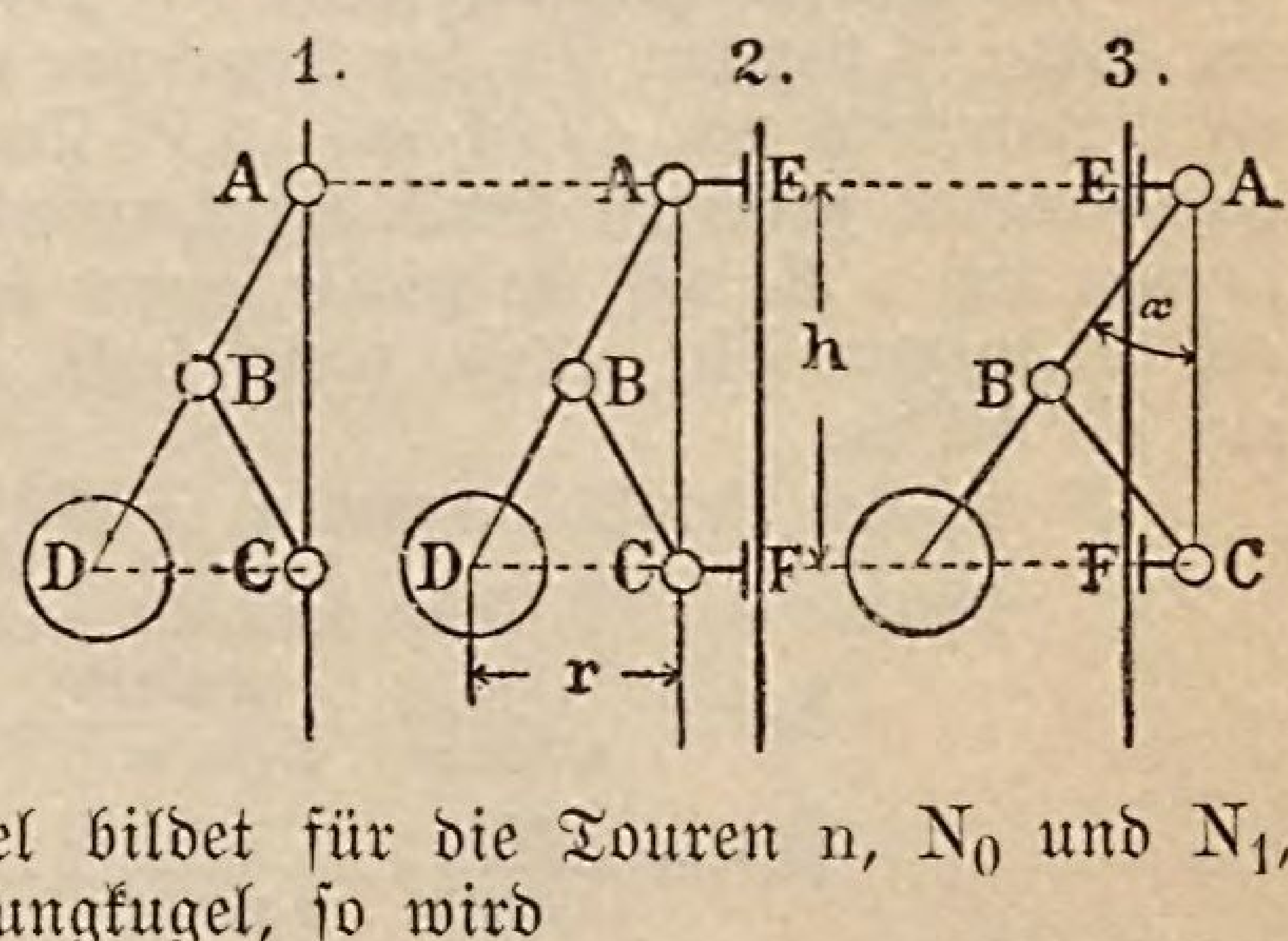
$$\text{Arbeitsvermögen} = R z.$$

3. **Gleichgewichtszustände.** Jeder Regulator enthält Hebel, an welchen sich Centrifugal- und Schwerkräfte das Gleichgewicht halten. Die Gleichgewichtszustände können (S. 60) labile, indifferente und stabile sein. Um herauszufinden, welcher dieser Zustände an einem Hebel vorkomme, stelle man die Gleichung zwischen der Tourenzahl und der jeweiligen Hülsenhöhe (oder auch dem Ausschlagwinkel) geometrisch dar (S. 39), in der Weise, daß die Hülsenhöhen, vom kleinsten bis zum größten Werte, als Abscissen, die entsprechenden Werte von n als Ordinaten aufgetragen werden, so bilden die Endpunkte der Ordinaten eine Kurve (n-Kurve).

Steigt diese Kurve, so erhebt sich der Schwerpunkt der beweglichen Pendelmassen, wenn n wächst; in diesem Fall ist das Gleichgewicht stabil. Wird die Kurve geradlinig und parallel zur Abscissenachse, so bleibt die Tourenzahl konstant: die Bewegung ist isochron, das Gleichgewicht indifferent oder astatisch. Fällt die Kurve, so ist das Gleichgewicht labil: einer Steigung der Hülse entspricht eine Abnahme der Tourenzahl.

Von einem guten Regulator wird verlangt, daß N_0 und N_1 nicht weit aus einander liegen. Daher sollte der Regulator astatisch sein. Allein dann springt er von einer Grenzlage in die andere, ist also für Dampfmaschinen nicht geeignet, wohl aber z. B. zum Vor- und Rückwärtsdrehen einer Spindel. Obiger Forderung wird entsprochen, wenn die n-Kurve nur schwach ansteigt. In diesem Falle nähert sich das stabile Gleichgewicht dem astatischen. Bei geringer Abweichung vom letztern heißt es pseudo-astatisch. Das labile Gleichgewicht ist ganz auszuschließen.

4. **Regulator von Watt.** Die Aufhängung kann sein: central (Fig. 1), offen (Fig. 2) und gekreuzt (Fig. 3). Es sei



a = AD die Länge des Pendelarmes,
b = BC = AB die Länge der Schubstange und des obern Teiles von a,
h, r die vertikale und horizontale Projektion von a,
e = AE = CF der Abstand des Aufhängepunktes von der Spindelachse,
α, α_0, α_1, die Winkel, welche a mit der Spindel bildet für die Touren n, N_0 und N_1,
G das Gewicht einer Schwungkugel, so wird

(1) $$h = a \cos \alpha; \qquad r = a \sin \alpha;$$

(2) $$z = 2b(\cos \alpha_0 - \cos \alpha_1);$$

(3) $$n_1^2 = \frac{894}{h} \cdot \frac{r}{r+e}\left(1 \pm \frac{R}{G} \cdot \frac{b}{a}\right).$$

Für den Beharrungszustand, wenn R = 0, gibt (3)

(4) $$n^2 = \frac{894}{h} \cdot \frac{r}{r+e}.$$

Durch Division der beiden letzten Gleichungen folgt.

(5) $$\frac{n_1^2}{n^2} = 1 \pm \frac{R}{G} \cdot \frac{b}{a};$$

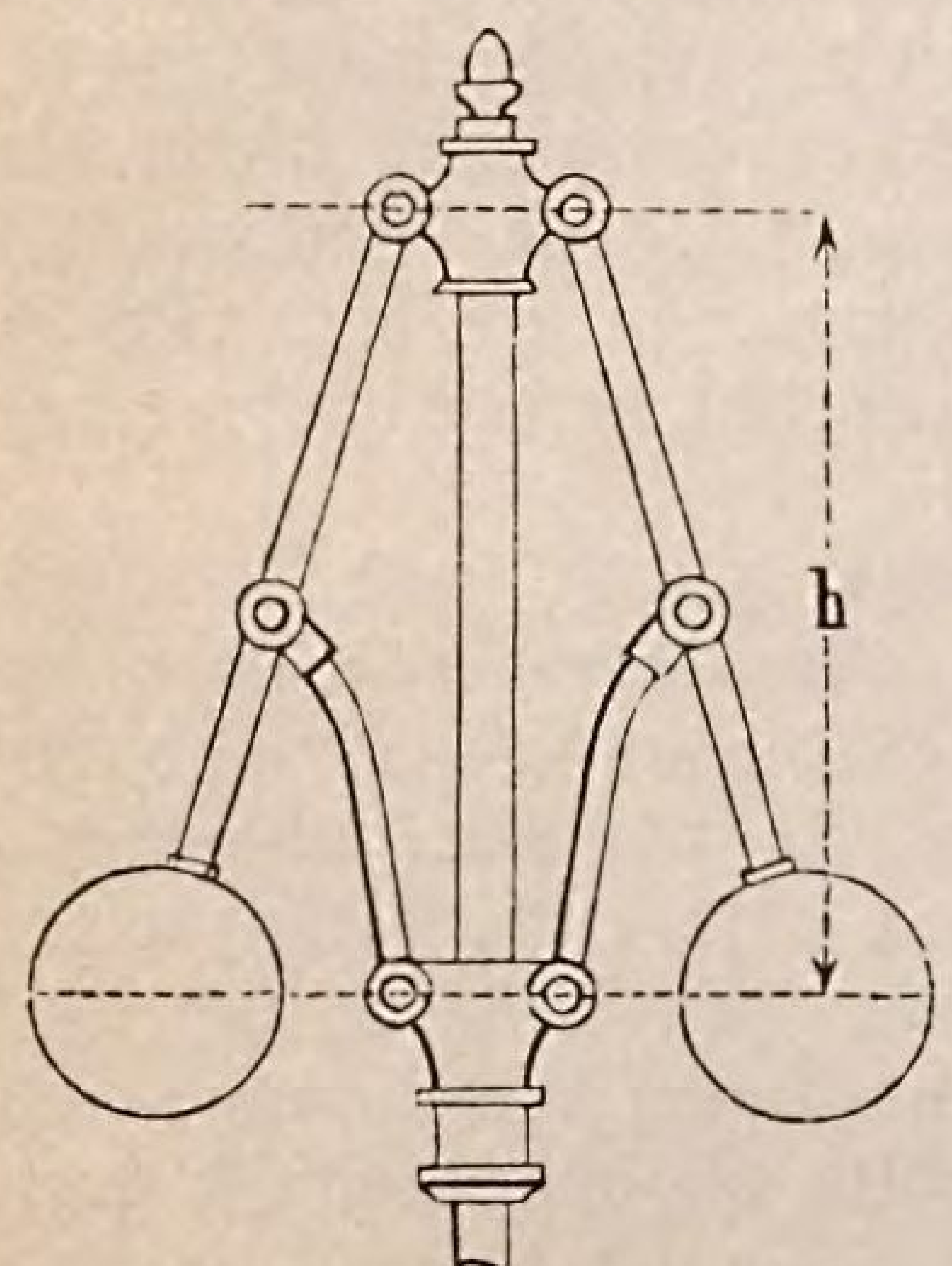
(6) $$\frac{2\,\Delta n}{n} = \frac{R}{G} \cdot \frac{b}{a}.$$

Aus (6) erhält man als Wert für die Energie

(7) $$R = G \,.\, \frac{a}{b} \cdot \frac{2\,\Delta n}{n}.$$

Für die centrale Lage wird $e = 0$, für die gekreuzte negativ.

Formel (6) zeigt, daß die Empfindlichkeit groß wird, wenn G gegenüber R, und a gegenüber b groß sind.



Beisp. Für die offene Aufhängung sei $e = 0{,}03$ m; $a = 0{,}36$ m; $b = 0{,}18$ m; $\alpha = 30^0$; $\frac{2\,\Delta n}{n} = \frac{1}{15}$; $G = 8$ kg.

Wie groß werden n und R?

Man erhält aus (1), (4) und (7):

$$h = 0{,}36 \,.\, \cos 30 = 0{,}312;$$
$$r = 0{,}36 \,.\, \sin 30 = 0{,}180.$$
$$n^2 = \frac{894}{0{,}312} \cdot \frac{0{,}18}{0{,}21} = 2456;$$
$$n = 49{,}56;$$
$$\Delta n = \frac{49{,}56}{2\,.\,15} = 1{,}65;$$
$$R = 8 \cdot \frac{0{,}36}{0{,}18} \cdot \frac{1}{15} = 1{,}07 \text{ kg}.$$

Der Regulator macht also im Beharrungszustand 49,56 Touren bei einem Ausschlagwinkel von 30°. Steigt oder sinkt diese Tourenzahl um 1,65, so beginnt sich der Regulator zu heben oder zu senken. Dieses weite Intervall von 47,91 auf 51,21 Touren ist bedingt durch den angenommenen geringen Grad der Empfindlichkeit. Dieses Intervall reduciert sich z. B. auf die Hälfte, wenn der Empfindlichkeitsgrad von 15 auf 30 steigen soll; allein dann sinkt auch die Energie von 1,07 kg auf die Hälfte.

Es sei der kleinste Winkel $\alpha_0 = 20^0$, der größte $\alpha_1 = 40^0$, so wird

Hubhöhe $z = 2 \,.\, 0{,}18\,(\cos 20 - \cos 40) = 0{,}062$ m.

$$N_0^2 = \frac{894}{a \cos 20} \cdot \frac{a \sin 20}{a \sin 20 + e} = 2126; \; N_0 = 46{,}1.$$

$$N_1^2 = \frac{894}{a \cos 20} \cdot \frac{a \sin 40}{a \sin 40 + e} = 2867; \; N_1 = 53{,}5.$$

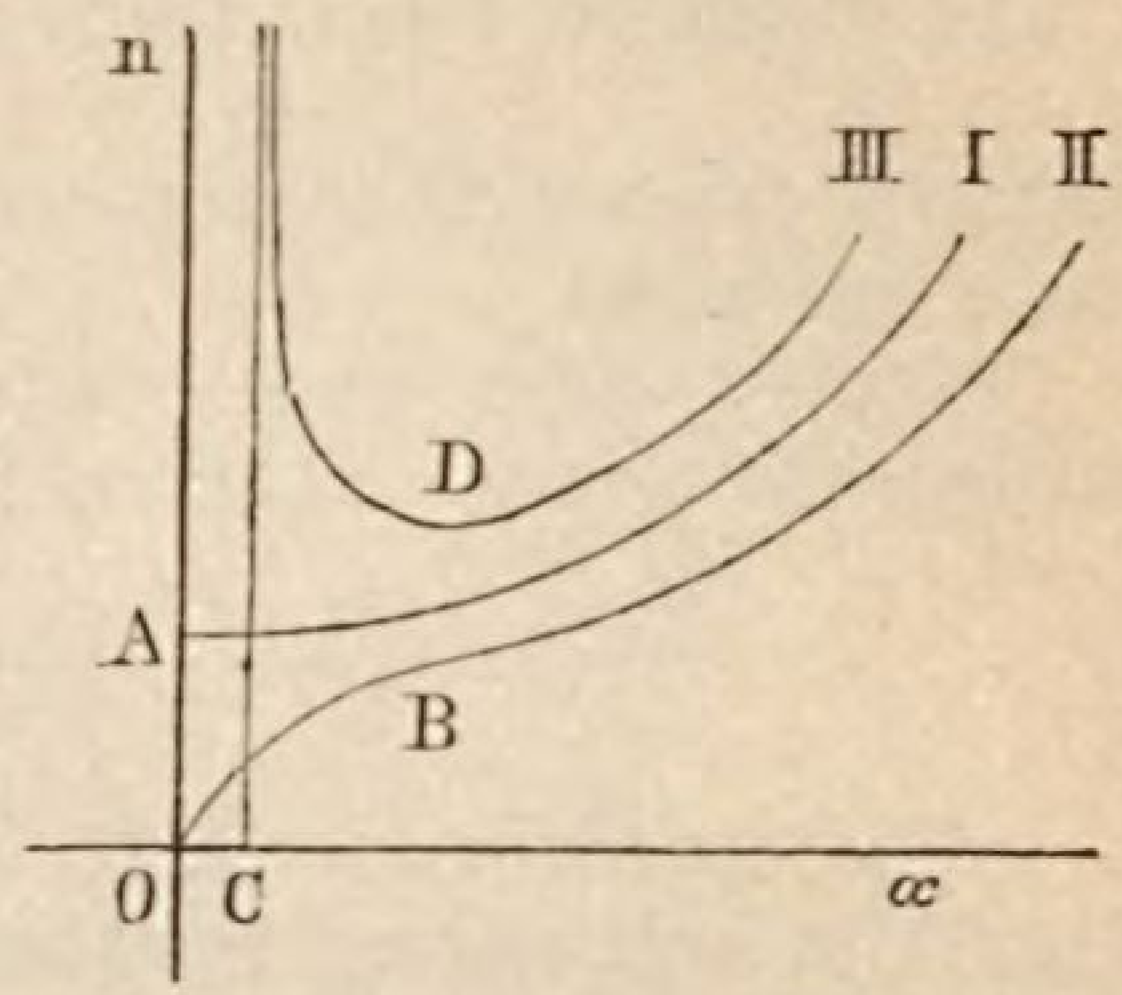
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{N_1 + N_0}{N_1 - N_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{53{,}5 + 46{,}1}{53{,}5 - 46{,}1} = 6{,}73.$$

Der Grad der Gleichförmigkeit 6,73 ist als sehr klein zu betrachten.

Wenn die Tourenzahl nur schwanken würde innerhalb der absolut notwendigen Grenzen 47,91 und 51,21, so wäre der Grad der Gleichförmigkeit nur = 15.

Das Diagramm für die n-Kurve ist in folgender Figur dargestellt. Auf der waagrechten Abscissenachse $O\alpha$ sind die Winkel α, parallel zur Ordinatenachse On die Touren n dargestellt. Man erhält:

a) Für die centrale Aufhängung die Kurve I. Für $e = 0$ wird $n = \sqrt{\frac{894}{h}} = OA$. Dieser Wert ist der kleinste, den der Regulator annehmen kann. Von diesem Werte an steigt die Kurve stetig, anfangs langsam, später rascher, um für $\alpha = 90$ parallel zu On zu werden.



b) Für die offene Aufhängung die Kurve II. Für $r = 0$ wird $n = 0$; also beginnt die Kurve im Anfangspunkt 0, steigt anfangs rasch, erreicht in B eine Wendung gegen die horizontale Richtung und steigt für größere Werte von α rasch aufwärts nach der vertikalen Richtung.

c) Für die gekreuzte Aufhängung die Kurve III. Es sei $OC = e$. Wird nun $r - e = 0$, so wird $n = \infty$, also die Ordinate in C unendlich groß. Von da an sinkt die Kurve bis zu einem Punkte D, für welchen die Abscisse α gefunden wird aus $\sin^3\alpha = \frac{e}{a}$. Von D steigt die Kurve wieder ähnlich wie die andern.

5. **Regulator von Porter.** Versieht man den Watt'schen Regulator für offene Aufhängung mit einem Gewichte, das die Spindel lose umgibt und auf die Hülse drückt, so entsteht der Porter'sche Regulator.

Es gelte die Bezeichnung wie beim Watt'schen Regulator; außerdem sei Q das auf der Hülse liegende Gewicht, so wirkt auf die Hülse eine Kraft beim Steigen $= Q + R$, beim Sinken $= Q - R$ und es ist

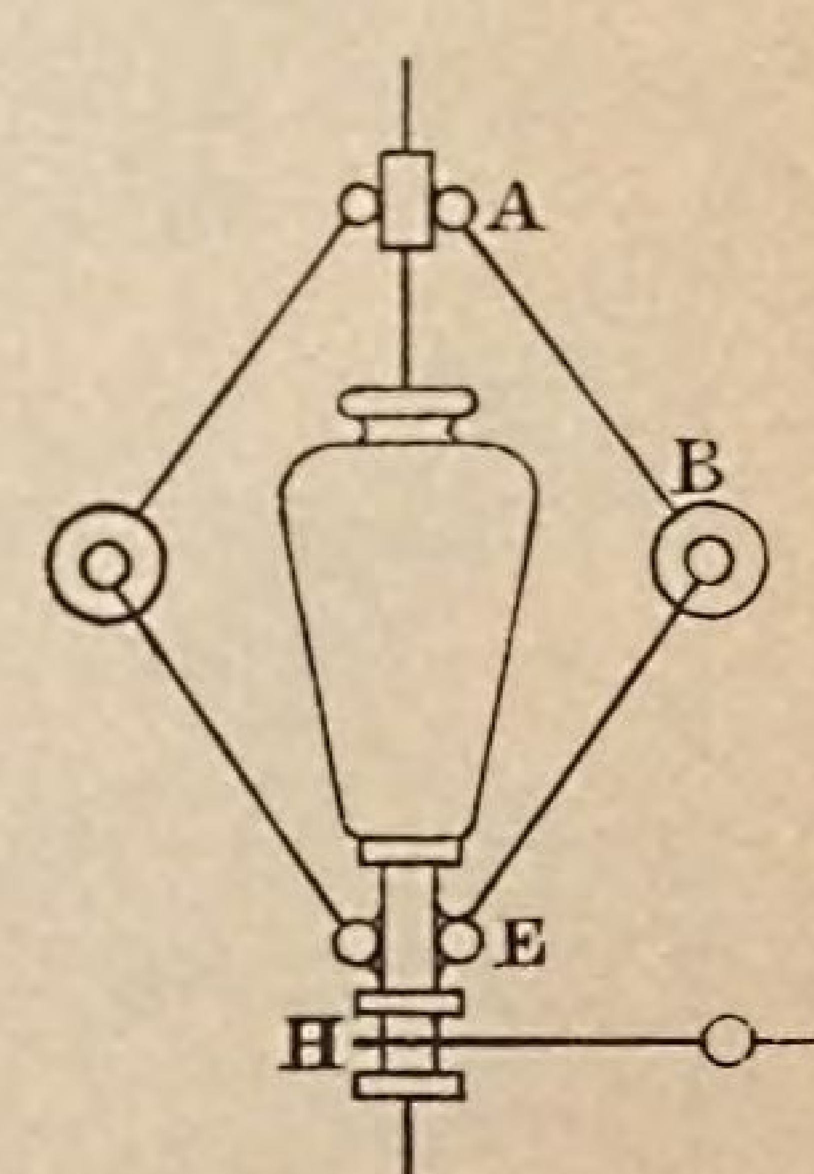
$$(1) \qquad n_1^2 = \frac{894}{h} \cdot \frac{r}{r+e} \cdot \frac{G + (Q \pm R)\frac{b}{a}}{G};$$

$$(2) \qquad n^2 = \frac{894}{h} \cdot \frac{r}{r+e} \cdot \frac{G + Q\frac{b}{a}}{G};$$

$$(3) \qquad \frac{n_1^2}{n^2} = 1 \pm \frac{R}{Q + G\frac{a}{b}};$$

$$(4) \qquad \frac{2\Delta n}{n} = \frac{R}{Q + G\frac{a}{b}};$$

$$(5) \qquad R = \left(Q + G\frac{a}{b}\right) \cdot \frac{2\Delta n}{n}.$$



Vergleicht man die Werte von n^2 und $\frac{2\Delta n}{n}$ = beim Watt'schen und Porter'schen Regulator, so zeigt sich, daß, unter sonst gleichen Umständen,

der letztere eine höhere Tourenzahl und eine höhere Empfindlichkeit hat. Es ist nämlich

das Verhältnis der Empfindlichkeitsgrade $= 1 : 1 + \frac{Q}{G} \cdot \frac{b}{a}$,

das Verhältnis der Tourenzahlen . . . $= 1 : \sqrt{1 + \frac{Q}{G} \cdot \frac{b}{a}}$.

Dadurch wird a klein und damit auch der Raum klein, den der Regulator einnimmt.

Nimmt man noch $b = a$, wie dies gewöhnlich der Fall ist und vorstehende Figur andeutet, so wird

$$n^2 = \frac{894}{h} \cdot \frac{r}{r + e} \cdot \frac{G + Q}{G}; \qquad \frac{2\Delta n}{n} = \frac{R}{Q + G}.$$

Die n-Kurve verläuft ähnlich wie diejenige für den Watt'schen Regulator mit offener Aufhängung. Für $r = 0$ wird auch $n = 0$; ferner entsteht ein Wendepunkt wie dort.

Beisp. Wenn wie oben $e = 0{,}03$ m; $a = 0{,}36$ m; $\alpha = 30^0$; so wird

$$r = 0{,}180; \quad h = 0{,}312.$$

Wenn ferner $R = 1$ kg, $G = 5$ kg und $Q = 50$ kg, so erhält man

$$n^2 = \frac{894}{0{,}312} \cdot \frac{0{,}18}{0{,}21} \cdot \frac{5 + 50}{5} = 27016; \quad n = 164{,}4;$$

$$\frac{2\Delta n}{n} = \frac{1}{50 + 5} = \frac{1}{55} \quad . \; . \; . \; . \quad \Delta n = 1{,}5.$$

Der Regulator macht also 164,4 Touren und verläßt den Beharrungszustand bei $164{,}4 + 1{,}5 = 165{,}9$ und bei $164{,}4 - 1{,}5 = 162{,}9$ Touren für $\alpha = 30^0$.

6. **Regulator von Kley.** Versieht man den Watt'schen Regulator für gekreuzte Aufhängung mit einem Gewichte Q, das die Spindel lose umgibt und an die Hülse angehängt ist, so erhält man

$$n_1^2 = \frac{894}{h} \cdot \frac{r}{r - e} \cdot \frac{G + (Q \pm R)\frac{b}{a}}{G};$$

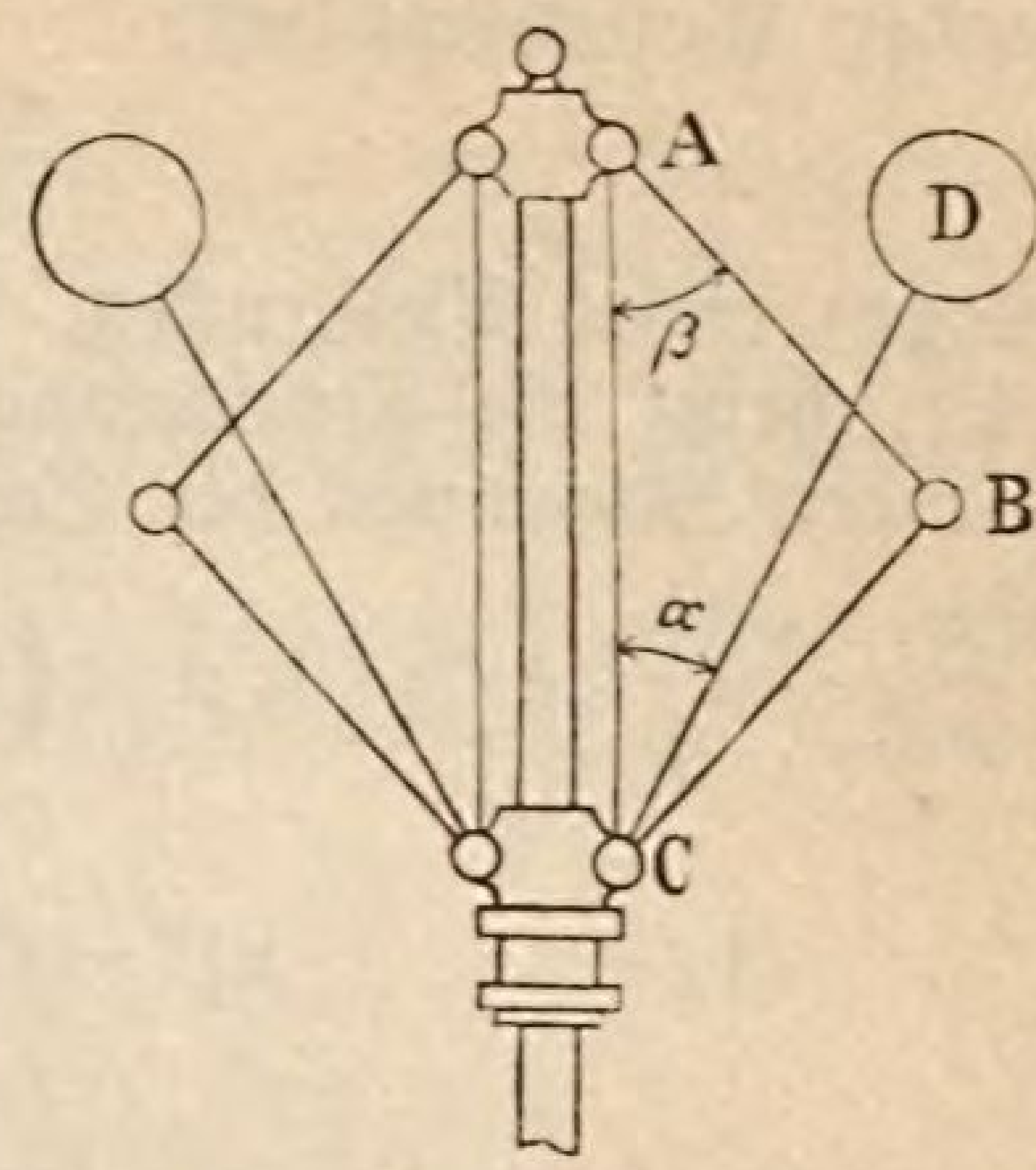
$$n^2 = \frac{894}{h} \cdot \frac{r}{r - e} \cdot \frac{G + Q\frac{b}{a}}{G};$$

$$\frac{n_1^2}{n^2} = 1 \pm \frac{R}{Q + G\frac{a}{b}};$$

$$\frac{2\Delta n}{n} = \frac{R}{Q + G\frac{a}{b}}.$$

Die n-Kurve hat eine ähnliche Form wie die des Watt'schen Regulators für gekreuzte Aufhängung. Es kommt also anfangs ein labiles, dann ein indifferentes und zuletzt ein stabiles Gleichgewicht vor.

7. **Regulator von Proell.** Er hat, wie der Watt'sche Regulator, zwei zur Spindel symmetrisch gelegene Pendel CD, jedoch in umgekehrter Aufstellung. Dieselben werden von einem Gewicht Q gehalten, das, wie beim Porter'schen Regulator, lose über die Spindel gesteckt ist und die Hülse enthält. Dieses Gewicht (samt der beiden Pendel) ist mittelst der Stangen CB und BA in den festen Punkten A aufgehängt.



Es sei AC parallel zur Spindel, AB = BC = b; CD = a; Winkel BAC = β; Winkel DCA = α; Winkel BCD konstant; Gewicht einer Schwungkugel = G; so erhält man nach bisheriger Bezeichnung:

$$n_1^2 = \frac{894}{h} \cdot \frac{r}{r+e} \cdot \frac{(2G + Q \pm R)\frac{b}{a} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} - G}{G};$$

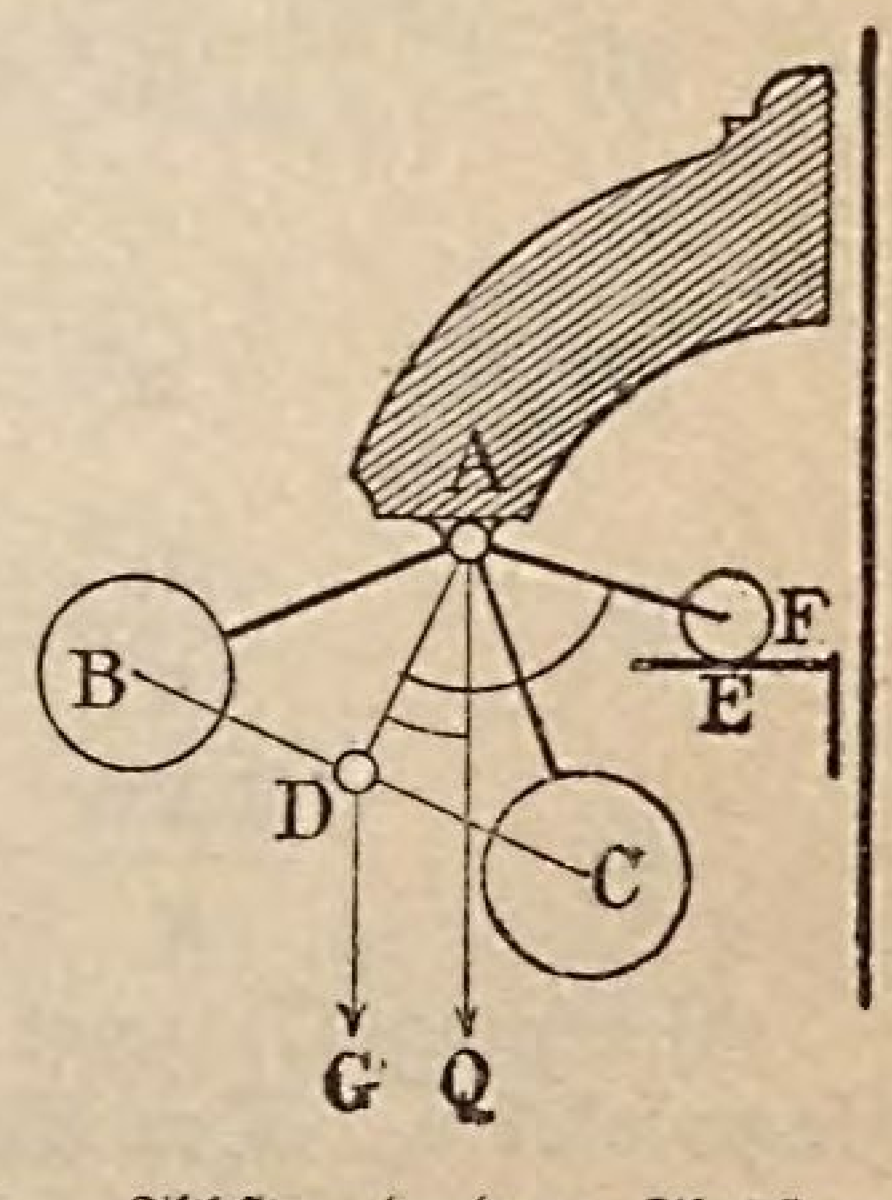
$$n^2 = \frac{894}{h} \cdot \frac{r}{r+e} \cdot \frac{(2G + Q)\frac{b}{a} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} - G}{G};$$

$$\frac{n_1^2}{n^2} = 1 \pm \frac{R}{2G + Q - G\frac{a}{b} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}};$$

$$\frac{2\Delta n}{n} = \frac{R}{2G + Q - G\frac{a}{b} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}}.$$

Die n-Kurve stimmt nahe überein mit der des Kley'schen Regulators.

8. **Cosinus-Regulator von Buß.** An der vertikalen Spindel ist eine horizontale Geradführung E befestigt, ferner über die Spindel ein gußeiserner Mantel lose gelegt, der an zwei einander gegenüber liegenden Stellen A die Drehachsen für Hebel enthält. Jeder dieser Hebel hat drei Arme: AB, AC und AF, welche in einer durch die Spindelachse gehenden Ebene liegen und unter einander konstante Winkel bilden. An den Enden der ersten Hebelsarme sind Schwungkugeln B und C angebracht, am Ende des letztern Armes eine Rolle oder ein Geleitstück, um auf der Geradführung hin- und hergehen zu können.



Ist der Regulator in Bewegung, so ändert sich die Lage der Arme AB, AC zur vertikalen Richtung und es ist der Mantel gezwungen zu steigen oder zu sinken.

Es sei G das Gewicht zweier Schwungkugeln, im Schwerpunkt D derselben aufgehängt, Q das Gewicht des Mantels, in der Achse A aufgehängt; ferner AD = a, AF = b, Abstand der Achse A von der Spindel = e, Winkel DAQ = α, Winkel DAF = β; so ist das

statische Moment der an den Schwungkugeln des einen Pendels wirkenden Centrifugalkraft

$$\frac{\pi^2 n^2}{900} \cdot \frac{G}{g} \cdot e \cdot a \cos \alpha.$$

Wegen dieses Ausdruckes, der den Cosinus des Ausschlagwinkels enthält, heißt die Einrichtung Cosinus-Regulator. Dieses Moment steht mit den Momenten der Schwerkräfte im Gleichgewicht; daher

$$\frac{\pi^2 n_1{}^2}{900} \cdot \frac{G}{g} \cdot e \cdot a \cos \alpha = \left(G + \frac{Q \pm R}{2}\right) b \sin(\beta - \alpha) + G\, a \sin \alpha;$$

$$(1) \qquad n_1{}^2 = 894 \frac{\left(G + \frac{Q \pm R}{2}\right) b \sin(\beta - \alpha) + G\, a \sin a}{G\, e\, a \cos \alpha};$$

$$(2) \qquad n^2 = 894 \frac{\left(G + \frac{Q}{2}\right) b \sin(\beta - \alpha) + G\, a \sin \alpha}{G\, e\, a \cos \alpha};$$

$$(3) \qquad \frac{n_1{}^2}{n^2} = 1 \pm \frac{R}{2G + Q + 2G \frac{a}{b} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}};$$

$$(4) \qquad \frac{2\Delta n}{n} = \frac{R}{2G + Q + 2G \frac{a}{b} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}}.$$

Dieser Regulator kann in folgender Weise astatisch gemacht werden. Setzt man in die erste dieser Gleichungen $\sin(\beta - \alpha) = \sin \beta \cos \alpha - \cos \alpha \sin \beta$ und dividiert mit $\cos \alpha$, so folgt

$$\frac{\pi^2 n_1{}^2}{900} G\, e\, a = \left(G + \frac{Q}{2}\right) b \sin \beta - \left(G + \frac{Q}{2}\right) b \cos \beta \operatorname{tg} \alpha + G\, a \operatorname{tg} \alpha.$$

Nun bringt man hierin die beiden letzten Glieder zum Verschwinden, indem man die Einrichtung so trifft, daß

$$(5) \qquad -\left(G + \frac{Q}{2}\right) b \cos \beta + G\, a = 0,$$

so folgt

$$(6) \qquad n_1{}^2 = 894 \frac{\left(G + \frac{Q \pm R}{2}\right) b \sin \beta}{G\, e\, a};$$

$$(7) \qquad n^2 = 894 \frac{\left(G + \frac{Q}{2}\right) b \sin \beta}{G\, e\, a};$$

$$(8) \qquad \frac{n_1{}^2}{n^2} = 1 \pm \frac{R}{Q + 2G};$$

$$(9) \qquad \frac{2\Delta n}{n} = \frac{R}{Q + 2G}.$$

Gleichung (7) zeigt in der That, daß n unabhängig ist vom Ausschlagwinkel α. Der Wert von n, welchen (7) liefert, ist zugleich jener, der aus (2) entsteht für $\alpha = 0$. Die Bedingung (5) ist, weil sie vollständige Astasie herbeiführt, nicht zu empfehlen.

Die Werte von α können positiv und negativ sein und schwanken zwischen -30^0 und $+30^0$.

9. **Feder-Regulator nach Porter.** Ersetzt man beim Porter'schen Regulator, S. 125, das Gewicht Q durch eine Spiralfeder, welche zwischen A und E die Spindel umgibt, so entsteht dieser Regulator, der den Vorteil bietet, daß diese Spindel sowohl horizontal wie vertikal aufgestellt werden kann.

Nun ist der Druck Q der Feder und die durch Q bewirkte Verkürzung u der Feder, in der Richtung der Spindel gemessen, gegeben durch die Gleichungen

$$(1) \qquad Q = \frac{s}{2} \cdot \frac{d}{D} \cdot \frac{d^2 \pi}{4},$$

$$(2) \qquad u = \frac{5}{2} \cdot \frac{s}{E} \cdot \frac{D}{d} \cdot L,$$

worin d den Durchmesser des Drahtes, D den mittleren Durchmesser einer Windung, L die Länge des Drahtes, s die specifische Spannung und E den Modul der Elasticität des Federmateriales bezeichnen.

Wird die Spindel vertikal aufgestellt, so gelten die Formeln für den Porter'schen Regulator; liegt die Spindel horizontal, so heben sich die statischen Momente der Gewichte G auf und man erhält

$$n_1^2 = \frac{894}{h} \cdot \frac{r}{r+e} \cdot \frac{Q+R}{G}; \; n^2 = \frac{894}{h} \cdot \frac{r}{r+e} \cdot \frac{Q}{G}; \; \frac{n}{2\,\Delta\, n} = \frac{Q}{R}.$$

Man nehme nun, um die Rechnung durchzuführen, als gegeben an: α, a, e; ferner d, D, L und s, so ergibt sich aus (2) die Verkürzung u und aus (1) der Federdruck Q. Daher kann die Tourenzahl n berechnet werden.

Es seien nun u_1 und u_0 die kleinste und größte Verkürzung, entsprechend den Winkeln α_0, α_1, den Tourenzahlen N_0, N_1, den Federdrücken Q_0 und Q_1 und den specifischen Spannungen s_0 und s_1; so ist zunächst der Hülsenweg $z = u_1 - u_0$. Dann folgen aus den Hülsenverschiebungen $u - u_0$ und $u_1 - u$ die Winkel α_0 und α_1; ferner aus (2) die Werte s_0 und s_1; hierauf aus (1) die Werte Q_0 und Q_1 und endlich die Werte N_0 und N_1. Die Rechnung kann übrigens auch in anderer Weise durchgeführt werden. Die Empfindlichkeit ist die gleiche wie beim Porter'schen Regulator.

B e i s p. Es seien d = 0,7 cm; D = 4 cm; L = 150 cm und s = 3000 kg, so wird

$$Q = \frac{3000}{2} \cdot \frac{0{,}7}{4} \cdot 0{,}3848 = 101 \text{ kg};$$

$$u = \frac{5}{2} \cdot \frac{3000}{1\,800\,000} \cdot \frac{4}{0{,}7} \cdot 150 = 3{,}57 \text{ cm},$$

d. h. es wird die Feder durch eine Spannung von 101 kg um 3,57 cm zusammengedrückt.

Nun sei $\alpha = 40^0$; a = 0,3 m; e = 0,03 m; G = 10 kg und R = 1 kg, so ergibt sich

$$r = 0{,}3 \cdot 0{,}6428 = 0{,}19284; \qquad h = 0{,}3 \cdot 0{,}7660 = 0{,}2228;$$

$$n^2 = \frac{894}{0{,}2298} \cdot \frac{0{,}19284}{0{,}22804} \cdot \frac{101}{10} = 33400; \quad n = 184.$$

$$\frac{n}{2 \cdot \Delta n} = \frac{101}{1} = 101; \quad \Delta n = \frac{184}{2 \cdot 101} = 0{,}91.$$

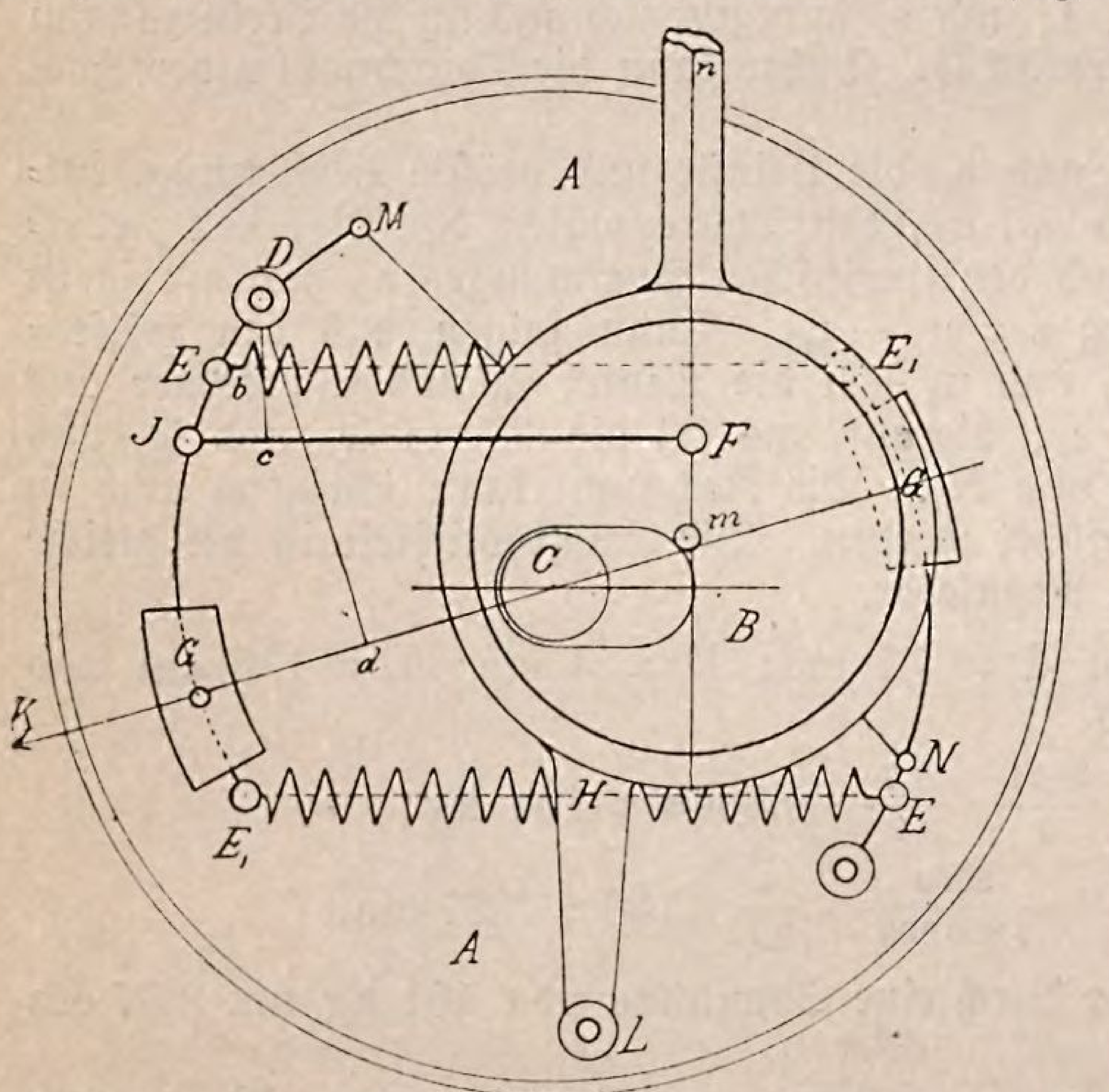
Beim Ausschlagwinkel von 40^0 macht der Regulator 184 Touren und ändert seine Lage, wenn die Tourenzahl um 0,91 zu- oder abnimmt.

Bei einem gewissen Winkel β wird die Feder ohne Spannung sein. Für diesen Winkel hat man

$$u = 2a (\cos \beta - \cos 40^0); \; 3{,}57 = 60 (\cos \beta - 0{,}766),$$

woraus folgt $\beta = 33{,}4^0$.

10. **Feder-Regulator von Westinghouse.** Es ist A die Scheibe des Schwungrades und C die Welle der Dampfmaschine. Ueber diese Welle ist lose ein Excenter gesteckt, versehen mit einem Schlitz, so daß es auf der Welle verschoben werden kann. Der Schlitz ist so angebracht, daß während dieser Verschiebung die Excentricität und der Voreilungswinkel sich ändern, während das lineare Voreilen konstant bleibt. Die Excenterstange, welche den entlasteten Kolbenschieber bewegt, hat die Richtung m n. Der Excenterring ist getragen durch einen Stift L, der aus der Scheibe des Schwungrades hervortritt, mittelst eines Armes H L, so daß das Excenter bei seiner Verschiebung Schwingungen um L herum macht. Zwei einander gegenüber liegende Arme D G können sich um feste Achsen D drehen. An den Enden dieser Arme befinden sich Gewichte G, die während der Drehung sich infolge der Centrifugalkraft von der Welle entfernen. Der Centrifugalkraft wirkt entgegen die Spannung je einer Spiralfeder E E_1. Bei normalem Gange stehen diese Spannungen mit den Centrifugalkräften im Gleichgewicht und es bleibt der Radius C G = r konstant. Wächst die Tourenzahl, so nimmt die Centrifugalkraft zu, ebenso auch der Widerstand der Feder; daher ändert sich das Gleichgewicht wie bei den Pendelregulatoren.



Nun sei K die an einem Gewicht G wirkende Centrifugalkraft und D d = d der Hebelsarm von K; ferner Q der Widerstand einer Feder und der Hebelsarm des Widerstandes D b = b; endlich sei R die halbe Kraft, womit das Excenter längs der

Stange J F verschoben wird, wenn die Tourenzahl n in $n \pm \Delta n$ übergeht und D c = c der Hebelsarm von R. Verbindet man die Hebel durch eine Stange M N, so heben sich die statischen Momente der Gewichte G in jeder Lage der Scheibe auf. Daher besteht Gleichgewicht, wenn

$$K \cdot d = Q \cdot b \pm R \cdot c.$$

Nun ist aber nach S. 64 $K : P = g' : g$. Allein g' ist hier die Centrifugalbeschleunigung, also nach S. 72 $= \frac{v^2}{r}$; folglich durch Elimination von g':

$$K = \frac{G v^2}{g r} \text{ und } 60 v = 2 r \pi n_1;$$

daher geht die erste Gleichung über in

$$n_1{}^2 = \frac{894}{r} \cdot \frac{Q b \pm R c}{G d}.$$

Für R = 0 verbleibt das Excenter in seiner Lage und es wird

$$n^2 = \frac{894}{r} \cdot \frac{Q}{G} \cdot \frac{b}{d};$$

daher der Grad der Empfindlichkeit

$$\frac{n}{2 \Delta n} = \frac{Q}{R} \cdot \frac{b}{c}.$$

Es kommen hier die Gleichungen (1) und (2) S. 129 zur Anwendung. Dabei bezeichnet u die Verstreckung der Feder für die Tourenzahl n, den Radius r, die Spannungen s und Q und die Centrifugalkraft K. Bei der Rechnung wird man einen ähnlichen Gang einhalten wie beim letzten Regulator und mit u_0, r_0, s_0, Q_0 ... die unteren, mit u_1, r_1, s_1, Q_1 ... die oberen Grenzwerte von u, r, s ... bezeichnen.

Dieser Regulator, angebracht am Schwungrad und versehen mit zwei einander diametral gegenüber liegenden Schwungmassen, hat in neuester Zeit zahlreiche Umwandlungen durchgemacht. Eine derselben ist die, daß das Excenter auf der Welle festsitzt und daß ein zweites über dieses geschoben ist, das durch den Regulator innerhalb bestimmter Grenzen auf dem inneren verschoben wird; eine weitere besteht darin, daß das innere Excenter ebenfalls lose auf der Welle sitzt und daß beide an der relativen Verschiebung teilnehmen.

Festigkeit und Elasticität der Materialien.

35. Ueber Festigkeit und Elasticität im allgemeinen.

1. **Arten der Festigkeit.** Festigkeit ist der Widerstand, den ein Körper einer äußern Kraft entgegensetzt. Man unterscheidet Zug- und Druck-, Schnitt-, Biegungs- und Torsionsfestigkeit. Wird ein Körper auf Zug und Biegung, auf Zug und Torsion ꝛc. in Anspruch genommen, so entsteht die zusammengesetzte Festigkeit. Die Fähigkeit, einer äußern Arbeitsgröße zu widerstehen, heißt Arbeitsvermögen oder Arbeitsfestigkeit.

Wie auch die äußere Kraft auf den Körper einwirke, immer ist der Widerstand gleich der Kraft. Diese Kraft per Einheit des Querschnittes heißt specifische Belastung, der entsprechende Widerstand specifische Festigkeit, auch specifische Spannung, auch Modul der Festigkeit. Der Bruchbelastung entspricht der Bruchmodul.

2. **Verhalten des Körpers in gespanntem Zustande.** Jede Spannung bewirkt eine bestimmte Ausdehnung, Verkürzung, Verschiebung der kleinsten Teile des Körpers. Diese Verschiebungen sind innerhalb einer gewissen Grenze den Kräften proportional, welche sie hervorbringen. Man nennt sie die Grenze der Elasticität. Reicht die Verschiebung über diese Grenze hinaus, so wächst im allgemeinen die Formänderung schneller als die sie hervorbringende Kraft. Nach Verschwinden dieser Kraft tritt immer eine bleibende Formänderung oder eine Aenderung in der Lage der kleinsten Teile ein, welche in einer gewissen Weise mit der Dauer der Einwirkung wächst. Allerdings ist diese bleibende Aenderung für kleine Kräfte kaum bemerkbar, für größere jedoch so erheblich, daß eine Reihe nach einander eintretender permanenter Ausdehnungen oder Verkürzungen die totale Ausdehnung oder Verkürzung, welche ein Körper überhaupt verträgt, erreichen kann. In diesem Fall tritt ein Bruch ein.

3. **Maß der Beanspruchung.** Die Materialien dürfen in der Technik mit folgenden Teilen der Bruchbelastung in Anspruch genommen werden:

1)	bei ruhenden Konstruktionen, ohne Stoßwirkungen und ohne Wechsel in der Belastung auf	$^1/_4$ bis $^1/_3$,
2)	bei schwächern Stößen und häufigem Wechsel der Spannung auf	$^1/_{10}$ „ $^1/_6$,
3)	bei starken Stößen und sehr häufigem Wechsel der Spannung auf	$^1/_{25}$ „ $^1/_{15}$.

Das Verhältnis zwischen dem Bruchmodul und derjenigen Spannung, welche in Wirklichkeit angewendet wird, heißt Grad der Sicherheit, auch Sicherheitsfaktor.

36. Absolute Festigkeit.

1. **Gesetz.** Ein prismatischer Stab werde in der Längenrichtung ausgedehnt. Es sei

F der Querschnitt des Stabes,
P die ausdehnende Kraft und
s der Modul, d. h. der Widerstand des Materials per Einheit des Querschnittes, so ist Fs der Widerstand für den ganzen Querschnitt, also

$$P = Fs. \tag{1}$$

Hiernach ist die absolute oder Zugfestigkeit unabhängig von der Form des Querschnittes und der Länge des Stabes.

2. **Bruchmodul** in Kilogrammen per 1 qcm Querschnitt:

Steine.

Basalt von Auvergne	77
Kalkstein von Portland	60
„ weißer, von feinem Korn	15
„ körniges Gefüge, sandig	23
Ziegel, sehr gut gebrannt	19
Gyps, eingerührt, fest	12
Mörtel, von vorzüglichem hydraulischem Kalk	15
„ von fettem Kalk, 40 Jahre alt	4

Hölzer.	Senkrecht auf die Fasern.	In der Richtung der Fasern.
Tannenholz	20 — 50	500 — 650
Buchenholz	60 — 80	700 — 900
Eiche	60 — 150	600 — 700

Metalle.

Gußeisen (umgeschmolzenes Roheisen)	850— 1300
Mittel aus zahlreichen Versuchen	1100
Flußeisen (Bessemer-Eisen, Thomas-Gilchrist-Eisen, Siemens-Martin-Eisen) und zwar	
Flußstabeisen	3800— 4800
Flußeisenblech	3800— 4500
Flußeisendraht	5800— 6800
Flußstahl, aus Flußeisen erstellt:	
Eisenbahnmaterial (Schienen, Achsen 2c.)	5000— 6000
Draht	10000—14000
Tiegelguß in Schienen	7000—10000

Schweißeisen (Renneisen, Herdfrischeisen, Puddeleisen, geschweißtes Paketeisen; überhaupt Schmiedeisen und Walzeisen) und zwar

Niet- und Schraubenmaterial	3700—4000
Gewöhnliches Rund- und Stabeisen	3400—3600
Kesselbleche	3200—3500
Eisendraht	5000—6000

Schweißstahl, aus Schweißeisen erstellt, zu Werkzeugen, Federn 2c. . . . . 7000—10000

Kanonenmetall	2400	Aluminium, gegossen	1100
Deltametall	5800	„ gehämmert	2100
Kupfer, gewalzt	2100	Zinn, gegossen	300
„ geschlagen	2500	Zink, gegossen	600
„ gegossen	1340	„ gewalzt	500
Messing	1250	Blei	130

Verschiedene Materialien.

Hanffaser	600—800
Rinds- und Roßleder	200—250
Kalbleder	130
Papier zum Zeichnen aus Leinen und Baumwolle	200
Papier aus Holzfasern von Völter in Heidenheim	442

Beisp. 1. Eine schmiedeiserne Stange von gleichförmigem Querschnitt werde vertikal aufgehängt. Wie lang kann sie sein, wenn sie durch ihr eigenes Gewicht gerade abgerissen wird?

Der Querschnitt der Stange werde angenommen	= 1 qcm.
Das Gewicht dieser Stange per 1 m Länge ist	= 0,78 kg.
Gewicht der Stange auf eine Länge von x Metern, bei welcher die Stange brechen soll	= 0,78x „
Bruchmodul der Stange, angenommen	= 3900 „

Das Gewicht 0,78 x muß nun gleich sein diesem Modul. Folglich

Gesuchte Länge $x = 3900 : 0{,}78 = 5000$ m.

Beisp. 2. Wie stark müssen die 4 cylindrischen, schmiedeisernen Säulen einer hydraulischen Presse sein, welche einen Druck von 200000 kg auszuüben hat?

Für vierfache Sicherheit ist der in Rechnung zu bringende Druck = 800000 kg, und wenn der Bruchmodul des Schmiedeisens zu 3600 kg angenommen wird, so müssen die 4 Stangen nach Formel (1) zusammen folgenden Querschnitt haben

$$F = \frac{P}{s} = \frac{800000}{3600} = 222 \text{ qcm},$$

was auf jede derselben 55,5 qcm Querschnitt oder 8,4 cm Dicke ausmacht.

3. **Festigkeit von Schmiedeisen bei verschiedener Temperatur.**

Versuche von Fairbairn mit bestem Stabeisen. Die erste Horizontalreihe enthält die Temperatur, die zweite den Bruchmodul.

−36	+16	46	100	132	154	163	213	242	500°
4445	4356	4980	5812	6050	5664	6173	5753	6050	2536 kg.

Versuche von Nyström, die Festigkeit bei 0° zu 100 angenommen.

0	37,7	93,3	149	205	260	316	370	427	483°
100	106	114	120	112	120	114	105	94	82.

Nach Versuchen von Thémery und Poirier sank die Festigkeit eines Eisenstabes von 4345 kg auf 780 kg, also auf $^1/_6$ des ursprünglichen Wertes, als er dunkelrot erwärmt wurde.

Daß bei strenger Winterkälte eiserne Bestandteile, insbesondere bei Eisenbahnen, leichter brechen als bei gewöhnlicher Temperatur, kommt wesentlich daher, daß gewisse Teile, wie Unterlagen, Boden 2c., nicht hinlänglich nachgeben, daß mithin die Stöße verderblicher wirken.

4. **Festigkeit von Eisenblech in verschiedenen Richtungen.**

Versuche von Fairbairn.	Walzrichtung.	Senkrecht dazu.
Yorkshire, Lawmoor, im Mittel per qcm .	3821 kg	4215 kg
Derbyshire	3414	2737
Shropshire	3095	3149
Staffordshire	3080	3308
Versuche von Jamphy.		
Holzkohleneisen	3313	3240
Mittel aus diesen Werten	3397	3259

5. **Einfluß des Kohlengehaltes auf die Festigkeit des Stahles.**

Versuche von Bauschinger mit Ternitzer Bessemer-Stahl.

Kohlengehalt	0,14	0,19	0,46	0,55	0,66	0,80	0,96 %
Zugfestigkeit	4430	4785	5330	5650	6295	7230	8305 kg
Druckfestigkeit	4780	5390	6330	6170	6550	9670	9890 „
Schubfestigkeit	3410	3710	3585	4000	4280	4820	5820 „

6. **Größe der Ausdehnung.** Es gelte die bisherige Bezeichnung. Außerdem sei

l die ursprüngliche Länge des Stabes,
Δl die durch die Spannung bewirkte Ausdehnung und
E der Modul der Elasticität, d. h. die Kraft, welche einem Stab vom Querschnitt 1 eine Ausdehnung geben könnte gleich der ursprünglichen Länge, wenn der Stab bis zu dieser Ausdehnung vollkommen elastisch bliebe,

so wird, da sich die Ausdehnungen wie die Kräfte verhalten,

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{s}{E}, \tag{2}$$

und durch Elimination von s aus (1) und (2)

(3) $$P = E \frac{\Delta l}{l} F.$$

Die Größe $\Delta l : l$ wird Ausdehnungsverhältnis und sein Wert für die Grenze der Elasticität Grenzverhältnis genannt.

Beisp. 1. Nach Hodgkinson (s. Tabelle unten) kann ein Zug von 375 kg einem schmiedeisernen Stab von 100 cm Länge und 1 qcm Querschnitt eine Verlängerung von 0,0185 cm beibringen. Wie groß ist der Modul der Elasticität?

Es ist $l = 100$; $\Delta l = 0{,}0185$ und $s = 375$ kg; daher nach Formel (2)

$$\text{Modul } E = 375 \cdot \frac{100}{0{,}0185} = 2027027 \text{ kg}.$$

Beisp. 2. Um wie viel verstrecken sich die Säulen der auf S. 134 erwähnten hydraulischen Presse?

Es ist $s = 900$ kg und da $E = 2000000$ kg angenommen werden kann, so wird nach Formel (2)

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{900}{2000000} = \frac{1}{2222},$$

d. h. die Zunahme an Länge beträgt $^1/_{2222}$ von der ursprünglichen Länge.

7. **Ausdehnung von Schmied- und Gußeisen,** per laufenden Meter.

Versuche von Ardant mit Eisendraht.			Versuche von Hodgkinson: Schmiedeisen.			Gußeisen.		
Belastung	Verlängerung.		Belastung	Verlängerung.		Belastung	Verlängerung.	
per qcm	Geglüht.	Hart.	per qcm	Total.	Bleibend.	per qcm	Total.	Bleibend.
kg	mm	mm	kg	mm	mm	kg	mm	mm
500	0,29	0,26	187	0,082		74	0,075	
1000	0,59	0,52	375	0,185		111	0,114	0,0018
1500	1,17	1,04	562	0,284	0,0025	148	0,155	0,0045
2000	1,47	1,30	749	0,380	0,0034	222	0,239	0,0089
2500	2,50	1,57	937	0,475	0,0042	296	0,326	0,0146
3000	13,00		1125	0,571	0,0051	370	0,416	0,0220
3250	14,10	2,22	1312	0,665	0,0068	444	0,551	0,0310
3500	18,00	2,40	1500	0,760	0,0101	517	0,611	0,0430
4000	20,50		1687	0,873	0,0330	592	0,715	0,0559
4250	Bruch	2,82	1875	1,013	0,0830	666	0,828	0,0703
4500	....	3,10	2250	2,227	0,2617	740	0,946	0,0884
4900	....	Bruch	2625	9,156	8,4691	815	1,068	0,1088
			3000	17,888	16,5145	886	1,206	0,1339
			3374	24,774	22,7087	963	1,392	0,1746
			3562	34,935	32,8201	1040	1,548	0,2007
			3745	Bruch				

8. **Ausdehnung des Leders**, per 1 m Länge.

Versuche von Autenheimer.

Lederriemen, neu.			Lederriemen, kurze Zeit im Gebrauch, etwas verstreckt.			Lederriemen, lange gebraucht, stark verstr.	
Last per	Ausdehnung.		Last per	Ausdehnung.		Last per	Aus-
1 qcm	Total.	Bleibend.	1 qcm	Total.	Bleibend.	1 qcm	dehnung.
kg	cm	cm	kg	cm	cm	kg	cm
20	3,0	0,82	5	0,68	—	33,3	0,94
40	4,7	1,33	10	1,18	0,50	57,1	1,67
60	6,25	1,88	20	2,12	0,90	81,1	2,30
80	7,65	2,51	30	3,00	1,21	104,8	3,39
100	9,38	3,10	50	4,60	1,65	123,9	4,60
130	11,70	4,09	70	6,10	2,06	147,6	6,29
160	13,95	5,20	100	8,20	2,65	160,0	7,40
200	16,70	6,77	130	11,29	3,77	176,2	8,20
229	18,75	7,90	155	15,20	5,78	190,0	Bruch
235	Bruch		185	Bruch			

9. **Ausdehnungsverhältnis und Modul der Elasticität.**

Bezeichnung der Körper.	Ausdehnungsverhältnis		Belastung per 1 qcm in kg		Elasticitätsmodul per 1 qcm in kg.
	bis zur Grenze der Elasticität.	bis zum Bruche.	bis zur Grenze der Elasticität	bis zum Bruche.	
Eiche	0,00177	0,004	215	600	120000
Nadelholz	0,00192	0,005	250	550	130000
Gußeisen	0,00062	0,015	500	1060	900000
Schmiedeisen, kurz . .	0,00073	0,025	1500	3600	2143000
„ mäßig dehnbar	0,00072	0,120	1450	3600	1986000
„ stark dehnbar .	0,00071	0,250	1400	3600	1842000
Gußstahl, gehämmert .	0,00200	0,006	6000	10000	3000000
Gußstahlachsen von Krupp	—	0,161	—	6520	2160000
Deltametall	0,00227	0,129	2270	5800	997700
Kanonenmetall . . .	0,00063	0,150	200	2300	320000
Leder, verstreckt . . .	—	0,180	—	230	1200

37. Einfluß der Centrifugalkraft auf rotierende Körper.

Bei der Drehung eines Rades, einer Rolle, einer Turbine 2c. hat jeder Teil des Radkranzes oder Ringes die Tendenz, sich von der Drehachse zu entfernen. Dadurch wird der Kranz oder Ring auf absolute Festigkeit in Anspruch genommen. Die Centrifugalkraft (S. 72) wächst mit dem Quadrat der Geschwindigkeit v, ebenso mit dem Gewicht des Ringes, also mit dessen Querschnitt; allein die Festigkeit wächst ebenso mit dem Querschnitt; daher hat dieser keinen Einfluß auf die von der Centrifugalkraft hervorgebrachte Spannung. Bezeichnet man diese Spannung per 1 qcm Querschnitt mit s, so wird

$$s = 0{,}074\ v^2.$$

Nimmt man für Gußeisen als höchsten zulässigen Wert von s = 100 kg, so folgt

$$v^2 = \frac{100}{0{,}074} = 1350; \quad v = 36{,}7\ m,$$

d. h. die Umfangsgeschwindigkeit des Kranzes oder Ringes soll 36,7 m nicht überschreiten. Als obere Grenze nimmt man gewöhnlich 30 m an. Es sei

d der mittlere Durchmesser des Radkranzes und
n die entsprechende höchste Tourenzahl des Rades,

so erhält man als zusammengehörende Werte

d = 0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	3	4 m
n = 2292	1146	764	573	382	286	191	143

38. Schnittfestigkeit.

Sie ist der Widerstand, welchen ein Körper gegen das Durchschneiden oder Abscheren leistet. Dieser Widerstand ist proportional der Schnittfläche, sobald der Bruch gleichzeitig auf der ganzen Schnittfläche eintritt, daher gilt das Gesetz (1) der absoluten Festigkeit (S. 133).

1. **Versuche von Cresy** über den Schnittwiderstand beim Durchlochen von Eisen- oder Kupferblechen.

Durchmesser der Löcher	1/2	1/2	1/2″ engl.
Blechdicke	0,08	0,17	0,24″ „
Schnittfläche	0,810	1,722	2,432 qcm.
Widerstand per 1 qcm für Eisenblech .	3373	3141	3170 kg.
„ „ „ „ Kupferblech	2220	2081	—

2. **Versuche von Gouin** über das Abscheren cylindrischer Stäbe. Diese Stäbe waren von Schmiedeisen, dessen Zugfestigkeit 4000 kg per 1 qcm betrug. Sie füllten genau das Loch stählerner Gabeln aus, welche beim Auseinanderziehen die Bolzen abscherten. Als Mittel aus je 10 Versuchen ergab sich:

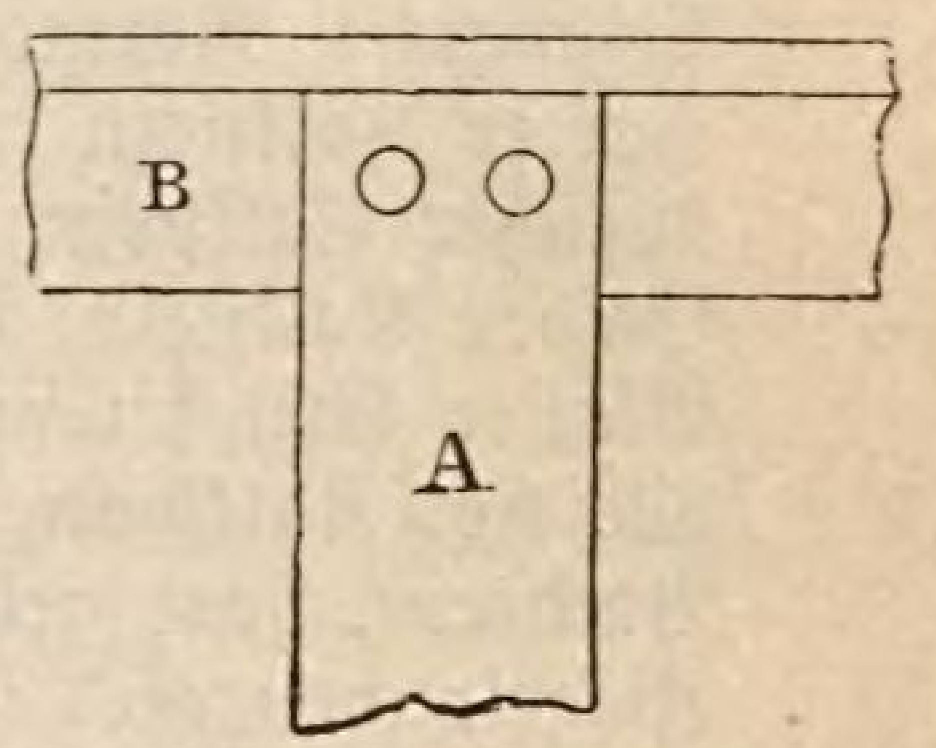
Durchmesser der Bolzen	0,8	1,0	1,2	1,6 cm
Widerstand per 1 qcm Schnittfläche	3270	3155	3148	3183 kg.

3. **Versuche von Tetmajer** mit Nieten, die erstern zu Brückenbauten, die letztern zu Dampfkesseln bestimmt:

a) Nietendicke (Schweißeisen) . .	1,5	1,8	2,1	2,5 cm
Widerstand per 1 qcm Fläche .	2950	2820	2780	2910 kg.
b) Nietendicke (Flußeisen) . . .	—	—	1,7	2,4 cm
Widerstand per 1 qcm Fläche .	—	—	3120	3080 kg.

Hiernach kann die specifische Schnittfestigkeit zu 4/5 der absoluten Festigkeit angenommen werden.

Beisp. Eine flache Stange A werde an einem Träger B vermittelst zweier neben einander liegender Nieten festgemacht. Es sei die Breite der Stange = 10 cm und ihre Dicke = 1,6 cm. Wie dick sind die Nieten zu nehmen, wenn Nieten und Stange A gleich stark beansprucht werden und der Modul der Schnittfestigkeit zu 0,8 von dem der absoluten Festigkeit der Stange angenommen wird?



Wir lösen die Aufgabe durch Probieren.

Der Durchmesser einer Niete werde angenommen . .	= 2,5 cm,
daher Querschnitt beider Nieten (als Kreisflächen) . .	= 9,81 qcm,
Querschnitt, reduciert auf 80 Prozent 0,8 . 9,81 . .	= 7,85 „
ferner Stangenbreite, über die Löcher gemessen, 10—5	= 5 cm,
folglich Stangenquerschnitt längs der Löcher 5 . 1,6 .	= 8 qcm.

Da nun der Querschnitt der Nieten etwas kleiner ist als der letztere Querschnitt, so ist der Durchmesser der Nieten etwas zu klein angenommen worden. Er wird daher nahe 2,51 cm sein.

39. Rückwirkende Festigkeit.

Die rückwirkende Festigkeit (Druckfestigkeit) ist der Widerstand eines Körpers gegen das Zusammendrücken. Hierbei kann der Bruch durch Zerdrücken oder Biegen eintreten. Die Biegung beginnt, wenn die Länge des Stabes die kleinste Dimension des Querschnittes wenigstens 5- bis 10mal übertrifft, je nach der materiellen Beschaffenheit des Stoffes. Der Widerstand beim Zerdrücken heißt absolut rückwirkende und der beim Biegen relativ rückwirkende oder auch Knickfestigkeit.

A. Absolut rückwirkende Festigkeit.

1. **Gesetz.** Die Festigkeit ist proportional dem kleinsten Querschnitt des Körpers. Der Querschnitt ist senkrecht zum Druck zu nehmen.

Es seien F dieser Querschnitt, P die Belastung und s der Modul der Festigkeit (Widerstand per Einheit des Querschnittes), so ist

$$(1) \qquad P = Fs.$$

2. **Bruchmodul,** per 1 qcm.

Steine.	Dichtigkeit.	Bruchmodul.
Basalt aus Schweden	2,95	2000 kg
Porphyr	2,87	2470
Grüner Granit aus den Vogesen	2,85	620
Grauer Granit „ „ „	2,64	420
Harter Sandstein	2,50	870
Weicher Sandstein	2,48	10
Schwarzer Marmor aus Flandern	2,72	790
Harter Kalkstein	2,36	310
Weicher Kalkstein	2,07	120
Gelber Kalkstein bei Metz	2,00	100
Blauer Gryphitenkalkstein (zu hydraul. Kalk)	2,60	300
Weicher Kalkstein, dem Wasser widerstehend	1,82	60
Backstein, hart gebrannt	1,56	150
Ziegelmauerwerk (an der Britanniabrücke)	—	36
Gyps, mit Kalkmilch angerührt	—	73
„ mit Wasser angerührt	—	50
Gewöhnlicher Mörtel aus Kalk und Sand	—	35
Hydraulischer Kalk, sehr gute Qualität	—	144
„ „ gewöhnliche „	—	70
Portland-Cement, mindestens	—	150
Roman-Cement, „	—	80

Metalle.	
Schmiedeisen, in kurzen Stücken	3000—4500
Gußeisen, aus größeren Massen genommen	6500—8000
Gußeisen, in kleinen Stücken gegossen und durch die Abkühlung an der Oberfläche hart geworden	13000
Deltametall	9540
Kanonenmetall	10000
Kupfer, auf 1/10 der Höhe zusammengepreßt	3855
Messing, „ „ „ „ „	3615
Zinn, „ „ „ „ „	620
Blei, „ „ „ „ „	145

Hölzer.	
Rottanne, in der Richtung der Fasern	405
Weißtanne, „ „ „ „ „	475
Eiche, „ „ „ „ „	455
Buche, „ „ „ „ „	540
Esche, „ „ „ „ „	610
Eiche, senkrecht auf die Fasern	160

3. **Belastung der kühnsten Bauwerke,** nach Rondelet.

	per 1 qcm
Pfeiler der Peterskirche in Rom	16,36 kg
„ der Paulskirche in London	19,36
„ des Pantheon in Paris	29,44
„ des Kirchturms zu St. Mery	29,40
Säulen der St. Pauluskirche in Rom	19,76
„ der Kirche in Toussaint d'Angers	44,28

4. **Festigkeit über einander gelegter Steine,** nach Rondelet. Die Steine waren Würfel von 5 cm Seitenlänge. Die Bruchbelastung betrug:

	Ein Würfel.	Zwei Würfel.	Drei Würfel.
Lyas, sehr hart	254,04	216,44	191,20 kg
Harter Stein von Bagneux .	266,00	168,92	155,60
„ „ „ „ .	205,52	160,40	154,12
„ „ „ „ .	141,48	113,16	110,08
„ „ „ „ .	148,84	119,08	115,60

5. **Festigkeit über einander liegender prism. Steine,** nach Vicat.

Anzahl Schichten . . .	1	2	4	8
Höhe aller Schichten . .	1	1	2	4
Bruchbelastung	1	0,930	0,861	0,834.

6. **Belastung der Mauern.** Mauern aus behauenen Steinen oder aus Backsteinen sollen höchstens auf $^1/_{10}$, Mauern aus Bruchsteinen auf höchstens $^1/_{20}$ derjenigen Festigkeit in Anspruch genommen werden, welche den Steinen der Mauern entspricht.

Beisp. Welche Höhe kann eine Mauer aus Ziegelsteinen erreichen, wenn sie unter ihrer eigenen Belastung zerdrückt wird?

Die Mauer sei hinlänglich dick, so daß sie sich nicht biegt, so wird sie durch Zerdrücken ihrer untersten Schichten brechen. Es sei

die Festigkeit der Ziegelsteine per 1 qcm . . . . . . = 50 kg
und das specifische Gewicht des Materials . . . . . . = 1,8,
folglich das Gewicht einer prismatischen Säule von 1 qcm
Querschnitt und 1 m Höhe . . . . 0,01 . 10 . 1,8 = 0,18 kg.
Höhe der Mauer, bei welcher die unterste Schicht zerdrückt wird . . . . 50 : 0,18 = 278 m.

Nach obiger Regel dürfte diese Mauer nur 27,8 m hoch gemacht werden, selbst in dem Fall, wo sie außer ihrem Gewicht keine weitere Last zu tragen hätte.

7. **Belastung der Pfähle.** Hölzerne Pfähle, welche hinreichend stark in den Boden eingetrieben, überall von der Erde umschlossen und durch einen Rost zusammengehalten sind, können nach Rondelet mit 30 bis 35 kg per 1 qcm des Pfahlquerschnittes belastet werden.

Beisp. Ein steinerner Brückenpfeiler habe 8 m Breite, 2,6 m Dicke und 7 m Höhe. Er soll auf einem Roste ruhen, der von Pfählen getragen wird, die 25 cm Durchmesser haben. Wie viel Pfähle sind einzurammen?

Volumen des Pfeilers . . . . 8 . 2,6 . 7 = 145,6 kbm.
Specifisches Gewicht der Steinmasse, angenommen . = 2,6.
Folglich Gewicht von 1 kbm . . . . = 2600 kg.
Gewicht des ganzen Pfeilers . . . . 145,6 . 2600 = 378560 kg.
Querschnitt des Pfahles . . . . 625 . 0,785 = 490 qcm.
Belastung eines Pfahles (30 kg per 1 qcm) 30 . 490 = 14700 kg.
Gesuchte Anzahl Pfähle . . . . 378560 : 14700 = 26.

8. **Größe der Verkürzung.** Es gilt das gleiche Gesetz wie für die Ausdehnung, daher nach Formel (3) von S. 136

$$P = E \frac{\Delta l}{l} F, \tag{2}$$

worin $\Delta l : l$ das Verkürzungsverhältnis und E den Modul der Elasticität für Verkürzung bezeichnen.

9. **Verkürzung von Schmied- und Gußeisen,** per laufenden Meter.

Versuche von Hodgkinson.

Schmiedeisen.		Gußeisen.		
Belastung per 1 qcm.	Totale Verkürzung.	Belastung per 1 qcm.	Verkürzung. Total.	Verkürzung. Bleibend.
kg	mm	kg	mm	mm
341	0,233	290,2	0,3240	0,0188
644	0,433	580,4	0,6562	0,0537
940	0,606	870,6	1,0025	0,0953
1245	0,800	1160,8	1,3606	0,1426
1545	0,990	1451,0	1,7175	0,2068
1840	1,183	1741,3	2,0786	0,3681
2145	1,449	2032,2	2,4733	0,4581
2290	1,761	2326,7	2,9432	0,5077

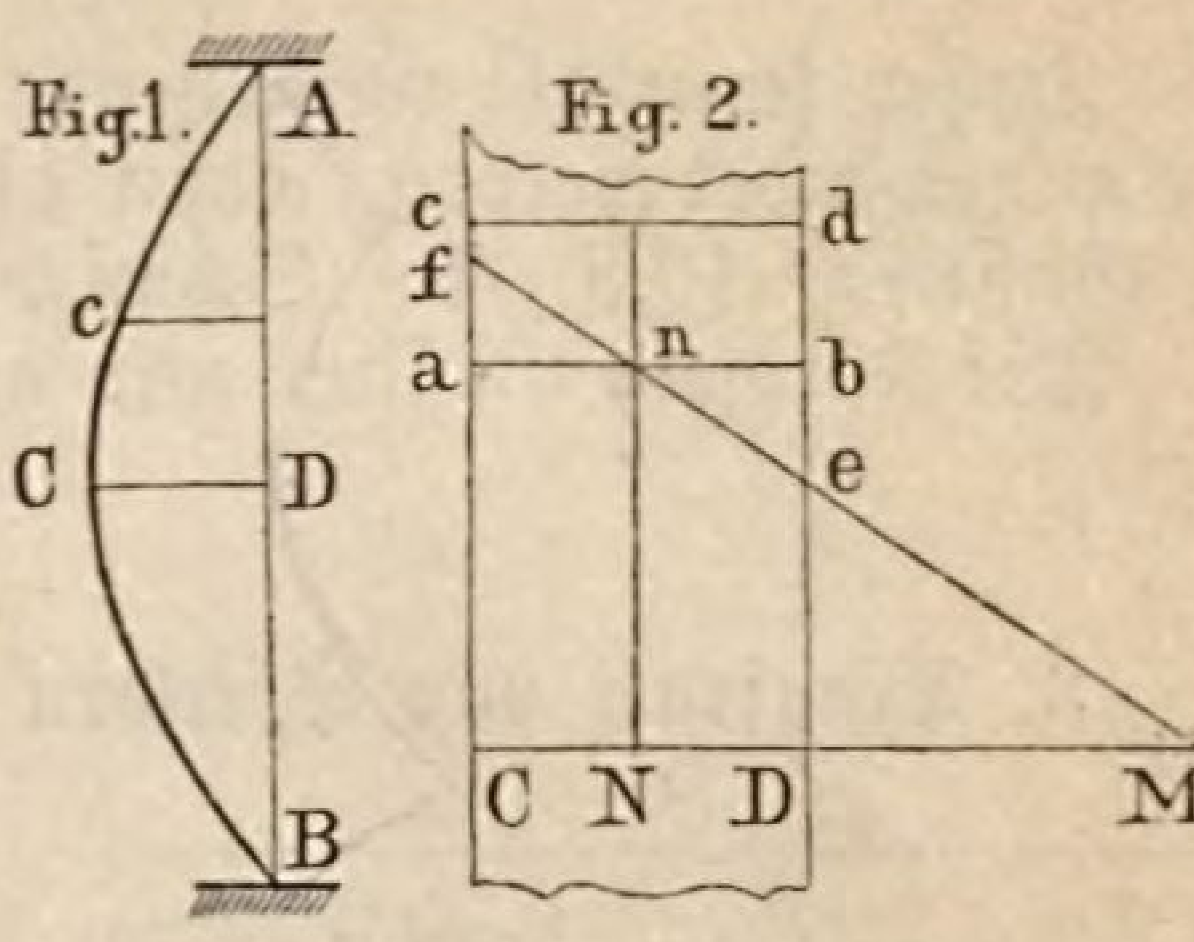
Hieraus ergibt sich als Modul der Elasticität für Verkürzung
für Schmiedeisen E = 1464000 kg,
für Gußeisen E = 895700 „

B. Relativ rückwirkende Festigkeit (Knickfestigkeit).

1. **Längen- und Biegungsdruck.** Ein prismatischer Stab AB, Fig. 1, dessen Enden senkrecht zur Längenrichtung abgeschnitten sind, werde der Länge nach zusammengedrückt, so daß er sich biege. Die Biegung wird am größten in der Mitte CD seiner Länge. Bliebe der Stab geradlinig, so würde er zusammengedrückt wie bei der absolut rückwirkenden Festigkeit. Wegen der Biegung aber wird das Material außerdem noch auf der konkaven Seite zusammengedrückt, auf der konvexen ausgedehnt.

In jedem Querschnitt werden diese zwei Gebiete getrennt durch eine Gerade, welche durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht und Neutralachse heißt.

Es sei das sehr kurze Stück Cc vergrößert dargestellt durch Fig. 2 und zwar in der ursprünglichen Höhe Cc. Beim Zusammendrücken gelange der Querschnitt cd nach ab; hierauf erst erfolge die Biegung, so wird sich ab um die Neutralachse n drehen in die Lage ef. Es liege M in den Richtungen ef und CD, so wird nM der Krümmungshalbmesser der Schicht nN sein. Die Schicht Dd verkürzt sich zunächst um db, dann noch um be; die Schicht Cc verkürzt sich zuerst um ca und dehnt sich nachher wieder aus um af. Nun sei



s der Modul der absolut rückwirkenden Festigkeit, entsprechend der Verkürzung ca = db und

s' der größte specifische Druck, hervorgerufen durch die Biegung, entsprechend der Verkürzung be,

so wird s der Längen- und s' der Biegungsdruck genannt. Von n aus nimmt der Druck nach der konkaven Seite zu von s bis s + s' und nach der andern Seite ab von s bis s − s'. Dieser letztere Wert kann positiv, Null oder negativ sein. Der Bruch erfolgt, wenn s + s' zum Bruchmodul wird.

2. **Tragkraft prismatischer Stäbe.** Es seien

P die Belastung des Stabes in seiner Längenrichtung,

E der Modul der Elasticität für Verkürzung,

b, δ Breite und Dicke des rechtwinkligen Querschnittes, b parallel zur Neutralachse,

d, d_1 äußerer und innerer Durchmesser des hohlen cylindrischen Stabes und

l die Länge des Stabes, so wird

Querschnitt rechtwinklig. Querschnitt rund.

$$(3)\qquad P = \frac{E\pi^2}{12}\,\frac{b\delta^3}{l^2} \qquad\qquad P = \frac{E\pi^3}{64}\,\frac{d^4 - d_1^{\,4}}{l^2}.$$

Für Stäbe mit zusammengesetzten Querschnitten, die sich in Rechtecke symmetrisch zur Neutralachse zerlegen lassen, ersetze man die Größe $b\delta^3$ durch so viele Glieder, als Rechtecke auf einer Seite der Neutralachse vorhanden sind, wobei die Glieder abgezogen werden, welche fehlendem Material entsprechen. Jedes dieser Glieder wird erhalten, wenn man die Breite des Rechtecks mit der dritten Potenz der Höhe multipliziert.

Beim massiven Cylinder ist $d_1 = 0$ anzunehmen.

Wenn die Säule kurz ist, geht der Fall B in A (S. 139) über. Hierfür erhält man für einen rechtwinkligen Querschnitt

$$\frac{E\pi^2}{12}\cdot\frac{b\delta^3}{l^2} = b\delta\,.\,s;\quad l = 0{,}907\,\delta\sqrt{\frac{E}{s}}\,.$$

Die letzte Formel liefert nun folgende Resultate:

Werte von	s	E	l
für Gußeisen . . .	7500	900000	10,3 δ
„ Schmiedeisen .	3600	1500000	18,5 δ
„ Holz	450	130000	15,4 δ

Daher kann die vorstehende Formel für rechtwinklige Querschnitte nur angewendet werden, wenn die Höhe die Dicke mindestens übertrifft: bei Gußeisen 10,3-, bei Schmiedeisen 18,5- und bei Holz 15,4mal.

Die Formeln (3) sind nur annähernd richtig, wie das Nachfolgende zeigt.

3. **Tragkraft von Pfeilern aus Tannenholz**, nach Rondelet.

Verhältnis der Höhe zur Dicke.	Bruchbelastung nach		Verhältnis der Höhe zur Dicke.	Bruchbelastung nach	
	Rondelet.	Formel (4).		Rondelet.	Formel (4).
1	420 kg		35	134 kg	114 kg
10	370		40	105	88
15	320		45	80	69
20	265	350 kg	50	62	56
25	210	224	60	35	39
30	165	156	70	20	28

$$(4) \qquad P = 140000 \frac{b\,\delta^3}{l^2}.$$

Beisp. Ein Pfeiler mit quadratischem Querschnitt und 400 cm Höhe habe eine Last von 3600 kg zu tragen. Wie groß ist sein Querschnitt für 10fache Sicherheit?

Hier wird $P = 10 \,.\, 3600$ und Dicke $\delta = b$; daher nach (4)

$$10 \,.\, 3600 = 140000 \cdot \frac{b^4}{400 \,.\, 400}; \quad b^4 = 41143.$$

Querschnitt des Pfeilers . $b^2 = \sqrt{41143} = 203$ qcm.

Seite des Querschnittes . $b = \sqrt{203} = 14{,}2$ cm.

Da sich die Höhe zur Dicke verhält wie 400 : 14,2 oder wie 28 : 1, so ist Formel (4) hier anwendbar.

4. **Tragkraft gußeiserner Säulen**, nach Hodgkinson.

$$(5) \qquad P = 535000 \frac{d^{3,6} - d_1^{3,6}}{l^{1,7}}.$$

Die Exponenten der Potenzen von d und l sind in Formel (5) kleiner als in (3).

Für 6fache Sicherheit kann man statt 535000 rund 90000 in Rechnung bringen.

Tragkraft massiver eiserner Säulen, nach Love.

Nach den Formeln auf S. 147.

Durchmesser.	Höhe.	Belastung. Gußeisen.	Belastung. Schmiedeeisen.	Durchmesser.	Höhe.	Belastung. Gußeisen.	Belastung. Schmiedeeisen.
cm	cm	kg	kg	cm	cm	kg	kg
	100	8770	6730		175	29189	21947
	125	6910	6318		200	25532	21240
	150	5473	5889		225	22358	20492
	175	4404	5447		250	19631	19716
5	200	3586	5012	9	275	17299	18924
	225	2980	4594		300	15307	18126
	250	2493	4210		350	12145	16549
	275	2112	3847		400	9808	15040
	300	1807	3516		450	8052	13631
	150	9937	9107		200	35088	26928
	175	8186	8587		225	31106	26135
	200	6803	8056		250	27606	25302
	225	5710	5728		275	24552	24440
6	250	4840	7015	10	300	21900	23562
	275	4143	6523		350	17599	21792
	300	3578	6058		400	14349	20053
	325	3117	5622		450	11865	18390
	350	2418	4842		500	9942	16830
	150	16047	12974		200	46327	33141
	175	13525	12396		225	41534	32411
	200	11450	11791		250	37229	31532
	225	9753	11172		300	30022	29667
7	250	8368	10553	11	350	24433	27730
	300	6296	9354		400	20112	25786
	350	4871	8246		450	16755	23889
	375	4325	7735		500	14120	22074
	400	3862	7254		550	12029	20364
	175	20514	16855		200	59243	40176
	200	17666	16191		250	48533	38400
	225	15265	15500		300	39751	36432
	250	13252	14795		350	32746	34350
8	275	11566	14086	12	400	27214	32226
	300	10151	13384		450	22841	30115
	350	8952	12028		500	19363	28061
	400	6362	10770		550	16574	26094
	450	5187	9628		600	14315	24234

Durchmesser.	Höhe.	Belastung. Gußeisen.	Belastung. Schmiedeeisen.	Durchmesser.	Höhe.	Belastung. Gußeisen.	Belastung. Schmiedeeisen.
cm	cm	kg	kg	cm	cm	kg	kg
	250	76215	54028		350	206330	136040
	300	64191	51898		400	185314	132698
	350	54106	49588		450	166141	129649
	400	45803	47166		500	148914	126131
14	450	39015	44691	22	550	133611	122458
	500	33472	42216		600	120091	118672
	550	28929	39780		650	108196	114817
	600	25186	37417		700	97736	110923
	650	22080	35146		800	80450	103148
	700	19485	32985		900	67021	95561
	300	95387	69902		350	260983	163872
	350	82063	67422		400	236986	160714
	400	70670	64771		450	214618	157278
	450	61064	62007		500	194141	153609
16	500	53011	59185	24	550	175619	149746
	550	46265	56350		600	159007	145733
	600	40608	53542		700	130994	137407
	650	35843	50790		800	108862	128911
	700	31812	48119		900	91366	120467
	750	28383	45547		1000	77455	112251
	350	116763	87794		350	322060	194171
	400	102137	84966		400	295285	190944
	450	89440	81974		450	269836	187411
	500	78531	78869		500	246138	183616
18	550	69201	75701	26	550	224354	179596
	600	61243	72511		600	204537	175391
	650	54423	69335		700	170489	166573
	700	48475	66203		800	143015	157439
	750	43567	63140		900	120930	148228
	800	39236	60165		1000	103130	139130
	350	158215	110676		350	389410	226918
	400	140350	107712		400	360045	223632
	450	124426	104539		450	331699	220028
	500	110426	101206		500	304875	216123
20	550	100106	99495	28	600	256776	207604
	600	87598	94248		700	216429	198362
	650	78389	90705		800	183215	188672
	700	70399	87166		900	156066	178773
	750	63450	83660		1000	133894	168871
	800	57395	80211		1100	115723	159130

5. **Tragkraft eiserner Säulen,** nach Love. Die Resultate der Versuche von Hodgkinson hat Love benützt, um folgende Formeln für die Bruchbelastung massiver cylindrischer Säulen abzuleiten:

$$\text{für Gußeisen} \;.\;.\;.\;.\;.\; P = \frac{7500\,F}{1{,}45 + 0{,}00337\left(\frac{l}{d}\right)^2},$$

$$\text{für Schmiedeisen} \;.\;.\;.\;.\; P = \frac{3600\,F}{1{,}55 + 0{,}0005\left(\frac{l}{d}\right)^2},$$

worin F den Querschnitt, also der Zähler rechts die absolut rückwirkende Festigkeit der Säulen angibt.

Bei Berechnung der vorstehenden Tabelle wurde eine 6fache Sicherheit zu Grunde gelegt, also 1250 statt 7500 und 600 statt 3600 gesetzt.

Mittelst dieser Tabelle erhält man die Tragkraft einer hohlen Säule mit gleichförmiger Wanddicke, wenn man die Tragkraft berechnet für den vollen Querschnitt, sodann für den Querschnitt der Höhlung und den letzten Wert vom erstern abzieht. Hiernach besitzen hohle Säulen eine größere Festigkeit als massive von gleichem Gewicht.

Beisp. Eine hohle cylindrische Säule von Gußeisen habe 20 cm äußern, 14 cm innern Durchmesser und 600 cm Höhe. Wie viel mal weniger trägt eine massive Säule von gleicher Höhe, gleichem Querschnitt und gleichem Material?

Es ist der Querschnitt der hohlen Säule . .	160,22 qcm.
Folglich der Durchmesser der massiven Säule	14,3 cm.
Tragkraft der hohlen Säule nach Tabelle .	62412 kg.
Tragkraft der massiven Säule nach Love . .	27315 „
Verhältnis beider Tragkräfte	1 : 0,437.

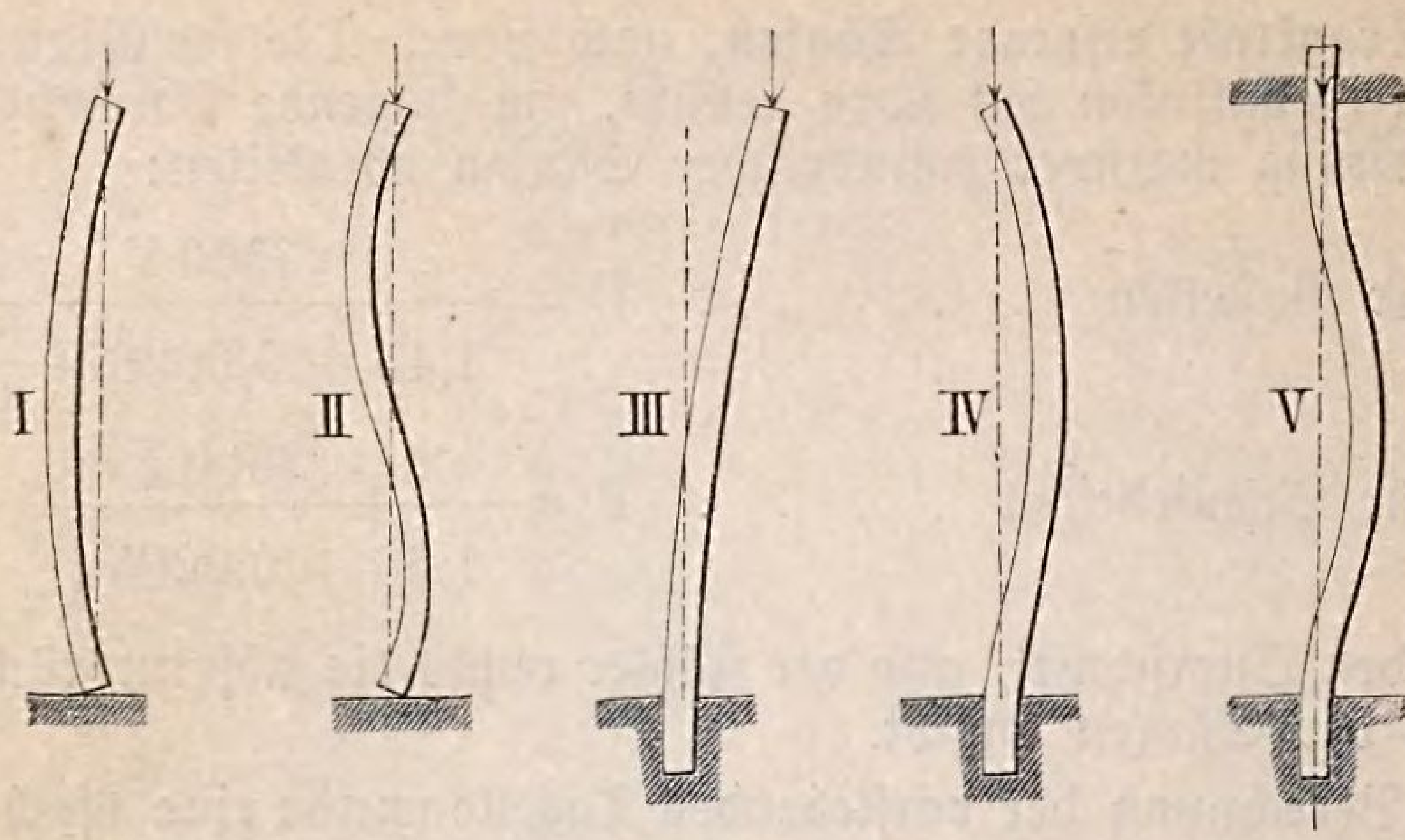
Je länger hohle Säulen sind, um so schwieriger wird es beim Gießen, ihrer Wand überall dieselbe Dicke zu geben. Mit Rücksicht auf diese Schwierigkeit, selbst unabhängig von den Bedingungen der Festigkeit, soll die Wanddicke nicht unter die folgenden Grenzen herabsinken:

Höhe der Säule ·	2—3	3—4	4—6	6—8 m
Kleinste Wanddicke	1,2	1,5	2,0	2,5 cm.

6. **Vergleichung der rückwirkenden Festigkeit eines Pfeilers unter folgenden Umständen:**

I. Endflächen senkrecht auf der Länge, Biegung nach einer Seite;
II. Endflächen senkrecht auf der Länge, jedoch doppelte Biegung nach entgegengesetzter Seite;
III. unteres Ende festgehalten, oberes frei und zur Seite ausweichend;
IV. unteres Ende festgehalten, oberes senkrecht zur Länge, ohne zur Seite ausweichen zu können;
V. beide Enden festgehalten und Seitenbiegung in der Mitte.

Es verhalten sich die Festigkeiten von I : II : III : IV : V
wie die Zahlen 4 : 16 : 1 : 9 : 16.



7. **Größe der Ausbiegung.** Es gelte die bisherige Bezeichnung. Außerdem sei

u die größte Ausweichung CD (Fig. 1, S. 143) des Stabes von der geraden Richtung AB und

z der Abstand der Neutralachse von der Stabsoberfläche, wo die Spannung s' herrscht, so wird

$$u = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{s'}{E} \cdot \frac{l^2}{z}. \tag{6}$$

Für Querschnitte, welche symmetrisch sind zur Neutralachse, wird $z = 0,5\,d$.

Um u zu finden, nehme man die höchste zulässige Spannung $s + s'$ als Teil des Bruchmoduls an, bestimme sodann den Wert von P aus Formel (3), woraus sich s mit Hilfe von (1) ergibt. Alsdann sind s und $s + s'$ bekannt, also ist es auch s', welcher Wert zur Berechnung von u nach (6) nötig wird.

Beisp. Eine cylindr. schmiedeis. Säule von 10 cm Dicke und 500 cm Höhe werde auf 6fache Sicherheit belastet. Wie stark biegt sie sich?

Für $d = 10$; $l = 500$; $E = 1500000$ und 6fache Sicherheit wird

Tragkraft nach Love . . . . = 16830 kg.
Querschnitt der Säule . . . . $F = 78,55$ qcm.
Daher Längenspannung . . . . $s = \frac{16830}{78,55} = 214$ kg.
Nun beträgt die Gesamtbeanspruchung . . . $s + s' = 600$ „
Daher wird die Biegungsspannung . $s' = 600 - 214 = 386$ „
Und die Ausbiegung nach (6) $u = \frac{1}{9,87} \cdot \frac{386}{1500000} \cdot \frac{500^2}{5} = 1,30$ cm.

8. **Stäbe von ähnlicher Form.** Ihre Tragkräfte verhalten sich, bei gleichem Material, gleicher Längen- und Biegungsspannung wie die Querschnitte; die gleichliegenden Kanten bilden ähnliche Kurven (S. 22).

40. Festigkeit kugelförmiger und cylindrischer Gefäße.

Bei beiden Gefäßarten bezeichne

D, d den äußern und innern Durchmesser des Gefäßes,

e die gleichförmige Wanddicke,

p den Druck auf die Wandfläche per Flächeneinheit und

s′, s die Widerstände, welche das Material der Wand per Einheit des Querschnittes gegen äußern und innern Druck auszuhalten hat.

I. Kugelförmige Gefäße.

1. **Gefäße mit äußerm Druck.** Der Druck in der Richtung eines Durchmessers auf die Fläche $0,25\ D^2\pi$ wirkend, ist $= 0,25\ D^2\pi\, p$. Man betrachte die hohle Kugel als eine cylindrische Säule mit dem Querschnitt $0,25\pi\ (D^2 - d^2)$, so ist das Material gegen Zerdrücken in Anspruch genommen. Der Widerstand des Materials ist $= 0,25\pi\ (D^2 - d^2)\ s'$. Setzt man diese beiden Kräfte einander gleich, so folgt

$$(D^2 - d^2)\ s' = D^2 p.$$

2. **Gefäße mit innerm Druck.** Die im Gefäße befindliche Flüssigkeit hat das Bestreben, das Gefäß in zwei Hälften aus einander zu treiben. Legt man einen ebenen Schnitt durch die Mitte des Gefäßes, so wirkt die Flüssigkeit mit einer Kraft senkrecht auf diese Schnittfläche $= 0,25\pi\, d^2 p$. Das Material widersteht mit einem Querschnitt $= 0,25\pi\ (D^2 - d^2)$; die widerstehende Kraft ist daher $= 0,25\pi\ (D^2 - d^2)\ s$. Setzt man den Druck der Flüssigkeit gleich diesem Widerstand, so folgt

$$(D^2 - d^2)\ s = d^2 p.$$

Beisp. Ein kugelförmiges Gefäß von Kupfer habe 40 cm innern Durchmesser und einen Druck von höchstens 30 Atmosphären auszuhalten. Wie groß muß seine Wanddicke genommen werden, wenn das Material 4fache Sicherheit bieten soll?

Es ist der Druck einer Atmosphäre per 1 qcm Fläche = 1,033 kg.
Folglich der Druck von 30 Atmosphären per 1 qcm = 30,99 „
Die Festigkeit des Kupfers per 1 qcm Querschnitt sei = 2400 „
Folglich der Wert s für 4fache Sicherheit . . . . = 600 „

Setzt man diese Werte in die letzte Formel, so folgt

$$D^2 - 40^2 = \frac{30,99}{600} \cdot 40^2; \quad D = \sqrt{1683} = 41,02 \text{ cm};$$

$$\text{Wanddicke} = \frac{41,02 - 40}{2} = 0,51 \text{ cm}.$$

II. Cylindrische Gefäße mit äußerm Druck.

1. **Druck längs der Achse.** Hier dient der Cylinder als Säule, über deren Tragkraft nachzusehen ist auf S. 147.

2. **Druck senkrecht auf die Achse.** Es sei das Gefäß ohne Endflächen. Man lege zwei Ebenen, welche die Röhren von außen berühren,

parallel zu einander, so schließen sie zwei Flüssigkeitskörper ein, welche die beiden Hälften der Röhrenwand parallel zu diesen Ebenen zusammendrücken. Der Druck auf die Länge L der Röhre ist D L p. Ihm widersteht das Material der Wand längs der Berührungslinien; also trifft es einem Querschnitt e L der Wand einen Druck 0,5 D p L. Dieser Druck macht sich dem ganzen Umfang nach geltend.

a) Nimmt man an, die Wand sei auf absolut rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommen, so wird 0,5 D p L = s′ e L; woraus folgt

$$(1) \qquad e = \frac{D\,p}{2\,s'}.$$

b) Legt man dagegen die relativ-rückwirkende Festigkeit zu Grunde, so zerlege man die Wand durch zwei Ebenen, welche der Achse nach gehen und senkrecht zu einander stehen. Dadurch zerfällt die Wand in vier Säulen von der Breite L, der Dicke e und der Höhe $\frac{D\pi}{4}$, welche je in der Mitte nach innen und gegen die Enden hin nach außen sich abbiegen. Sie sind dann gebogen wie die Säule im Fall V, S. 148. Wendet man auf sie Formel (3) auf S. 143 an, so folgt

$$0{,}5\,D\,p\,L = 4 \cdot \frac{E\,\pi^2}{12} \cdot \frac{L\,e^3}{\left(\frac{D\pi}{4}\right)^2}.$$

$$(2) \qquad e^3 = \frac{3}{32} \cdot \frac{p}{E} \cdot D^3.$$

Beisp. Welche Wanddicke erhält eine schmiedeiserne Röhre von 40 cm Durchmesser, wenn sie einem Druck von 8 Atmosphären ausgesetzt wird und 10fache Sicherheit gewähren soll?

Man nehme p = 8 kg, s′ = 3600 kg, E = 1500000 kg, so wird für D = 40 und 10fache Sicherheit

nach (1) . . . . $e = \frac{40 \,.\, 8 \,.\, 10}{2 \,.\, 3600} = 0{,}444$ cm

nach (2) . . $e^3 = \frac{3 \,.\, 8 \,.\, 10 \,.\, 40 \,.\, 40 \,.\, 40}{32 \,.\, 1500000} = 0{,}334$; $e = 0{,}694$ „

III. Cylindrische Gefäße mit innerm Druck.

1. **Ausdehnung längs der Achse.** Man denke sich den Cylinder mit zwei Bodenflächen versehen, so ist der Druck im Innern auf jede Bodenfläche = $0{,}25\,d^2\pi p$. Diese beiden Kräfte dehnen die cylindrische Wand längs der Achse aus. Der Querschnitt des Materials, welcher Widerstand leistet, ist = $e\,(d + e)\,\pi$; also sein Widerstand = $e\,(d + e)\,\pi\,s$. Setzt man diese beiden Kräfte einander gleich, so folgt

$$(3) \qquad e\,(d + e)\,s = 0{,}25\,d^2 p.$$

2. **Ausdehnung des Durchmessers.** Legt man einen ebenen Schnitt durch die Achse des Gefäßes, so wird die cylindrische Wand auf eine Länge L geschnitten längs zwei Flächen, deren Inhalt zusammen = 2 e L ist. Der Druck der Flüssigkeit hat das Bestreben, die durch diesen Schnitt entstandenen zwei Hälften des Cylinders aus einander zu

treiben. Dadurch wird das Material gespannt. Allein diese Spannung nimmt von innen nach außen ab. Es sei s_0 der mittlere Wert dieser Spannung, so ist der Widerstand der Wand $= 2eLs_0$, der Druck auf die Fläche dL aber $= dLp$. Folglich durch Gleichsetzen

$$(4) \qquad 2es_0 = dp.$$

Die Länge des Cylinders ist also ohne Einfluß auf die Spannung.

a) Die Wand sei dünn. In diesem Fall kann s_0 als größte Spannung (an der innern Oberfläche) angesehen werden. Vertauscht man noch in Formel (3) die Größe $d + e$ mit d, so wird $s_0 = 2s$, d. h. der Cylinder mit dünner Wand (Dampfkessel, Gas- und Wasserleitungen ꝛc.) ist längs des Umfanges 2mal stärker gespannt als längs der Cylinderkanten.

b) Wand beliebig dick. Man erhält nach Lamé

$$(5) \qquad e = \frac{d}{2}\left(\sqrt{\frac{s+p}{s-p}} - 1\right),$$

wo s die Spannung auf der innern Seite der Wand bezeichnet.

Beisp. Ein gußeiserner Cylinder mit 40 cm innerm Durchmesser habe 50 Atmosphären Druck auszuhalten. Wie groß muß seine Wanddicke für 5fache Sicherheit sein?

Es ist der Druck von 50 Atm. per 1 qcm Fläche $p = 50 \,.\, 1{,}033 = 51{,}65$ kg.
Die Bruchfestigkeit des Gußeisens per 1 qcm sei . . $= 1100$ „
Folglich die Spannung, bei 5facher Sicherheit . . . $s = 220$ „

Wanddicke nach (5) . . $e = 20\left(\sqrt{\frac{220 + 51{,}65}{220 - 51{,}65}} - 1\right) = 5{,}40$ cm.

Mittlere Spannung des Materials nach (4) $s_0 = \frac{40 \,.\, 51{,}65}{2 \,.\, 5{,}40} = 191{,}3$ kg.
Nähme die Spannung von innen nach außen gleichförmig ab, so wäre sie außen . . $2s_0 - s = 382{,}6 - 220 = 162{,}6$ „

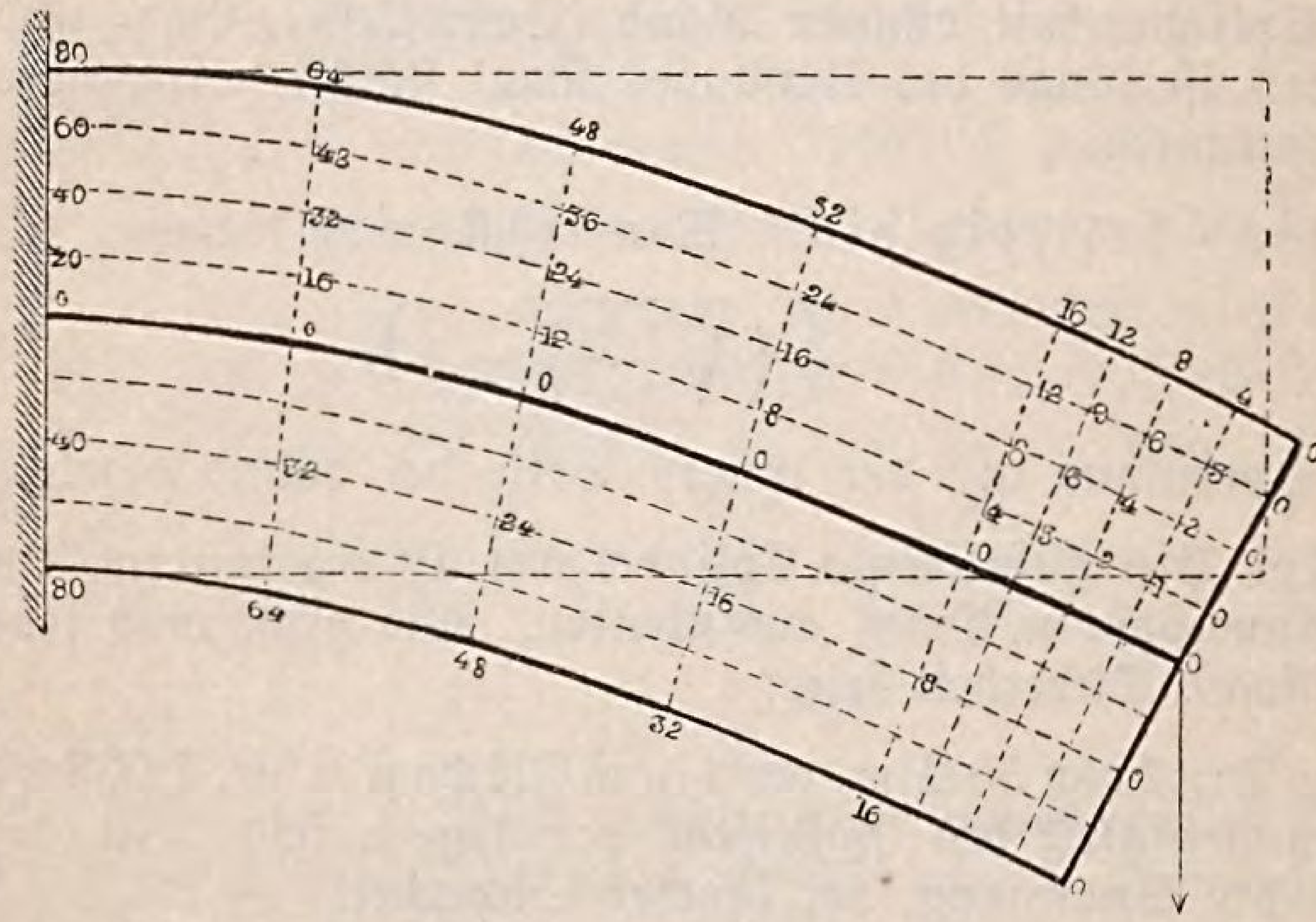
41. Relative Festigkeit.

Der Widerstand, den ein Körper einer Kraft entgegensetzt, welche senkrecht auf seine Längenrichtung wirkt und ihn biegt, heißt seine relative Festigkeit oder auch Biegungsfähigkeit.

1. Verteilung der Spannung im Material. Eine prismatische Stange sei in horizontaler Lage an einem Ende eingespannt. Man denke sich dieselbe durch waagrechte Ebenen in sehr dünne über einander liegende Schichten zerlegt. Nun werde sie am freien Ende belastet, so wird sie sich biegen; dabei werden sich die Schichten auf der obern (konvexen) Seite verstrecken, auf der untern (konkaven) verkürzen (s. nächste Figur). Die oberste Schicht verlängert sich am meisten; nach unten

nehmen diese Verlängerungen ab. Die unterste Schicht verkürzt sich am meisten; nach oben nehmen die Verkürzungen ab. Es wird deshalb eine Schicht geben, wo sich die ausgedehnten und zusammengedrückten Schichten begegnen. Diese wird **Neutralschicht** und ihr Durchschnitt mit einer Querschnittsebene **Neutralachse** genannt. Diese geht durch den Schwerpunkt des Querschnittes.

Eine und dieselbe Schicht wird aber nicht ihrer ganzen Länge nach gleich stark ausgedehnt oder verkürzt. Denn man denke sich den Stab so eingemauert, daß der hervortretende Teil einmal die einfache und hierauf die doppelte Länge hat, so wirkt im ersten Fall die Last am

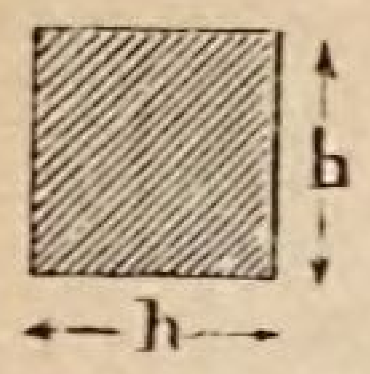


Hebelsarm 1, im zweiten Fall am Hebelsarm 2; also verhalten sich auch die statischen Momente derselben Last wie 1 : 2; folglich werden die Schichten an der eingemauerten Stelle im zweiten Fall auch 2mal stärker in Anspruch genommen als im ersten. Daher nimmt die Ausdehnung oder Verkürzung in derselben Schicht zu wie die Entfernung vom Aufhängepunkt der Last.

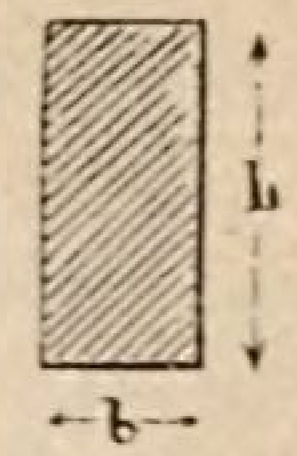
In vorstehender Figur ist das **Verhältnis der Verstreckungen und Verkürzungen** in einzelnen Schichten durch Zahlen anschaulich gemacht. Diese Zahlen geben auch das Verhältnis der spannenden und pressenden Kräfte in diesen Schichten an. Verbindet man Stellen mit gleichen Zahlen stetig mit einander, so erhält man Kurven von gleicher Spannung.

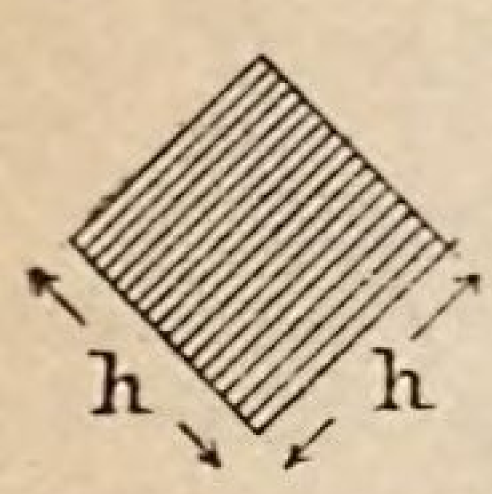
2. **Festigkeitsmoment.** Es ist das Bestreben vorhanden, eine Drehung des Querschnittes ab (Fig. S. 154) um die Neutralachse A herbeizuführen. Widersteht die oberste Schicht der Ausdehnung mit der Kraft p, so ist während des Drehens Aa der Hebelsarm der Kraft p; folglich Aa . p das statische Moment, womit diese Schicht die Drehung verhindert. Widersteht die unterste Schicht dem Zusammendrücken mit der Kraft q, so ist Ab . q ihr statisches Moment. Jeder Schicht oberhalb A entspricht ein Moment wie Aa . p, und jeder unterhalb A ein solches wie Ab . q. Die Summe dieser Momente heißt **Festigkeitsmoment.**

Festigkeitsmomente für verschiedene Querschnitte.

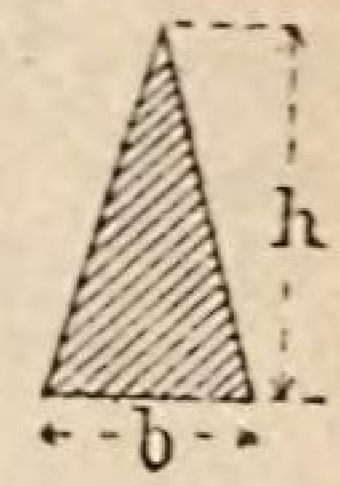


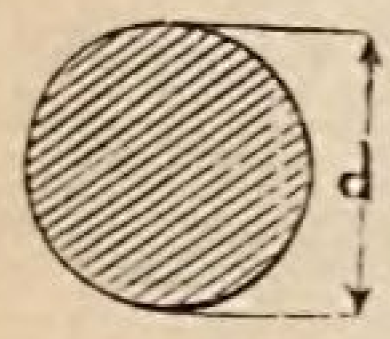
$\frac{s}{6} h^3$ $\qquad$ $\frac{s}{6} b h^2$



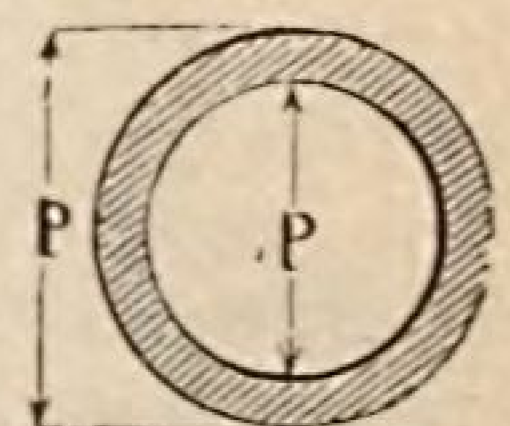


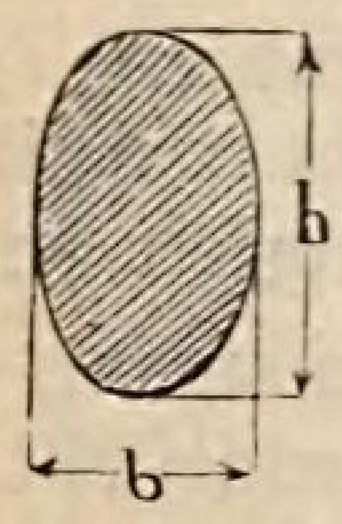
$\frac{s\sqrt{2}}{12} h^3$ $\qquad$ $\frac{s}{24} b h^2$



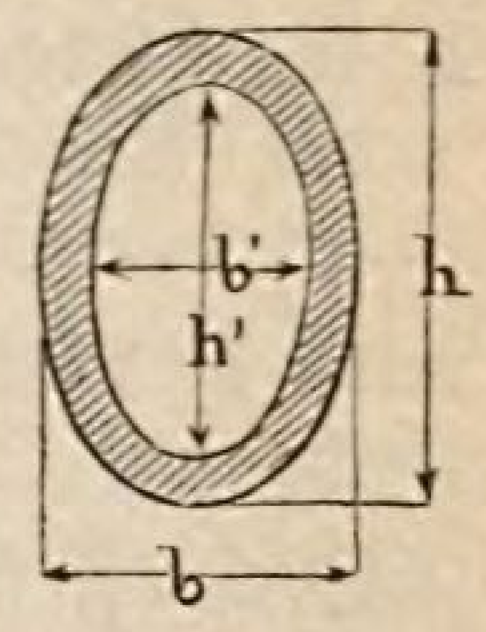


$\frac{s\pi}{32} d^3$ $\qquad$ $\frac{s\pi}{32} \frac{d^4 - d'^4}{d}$



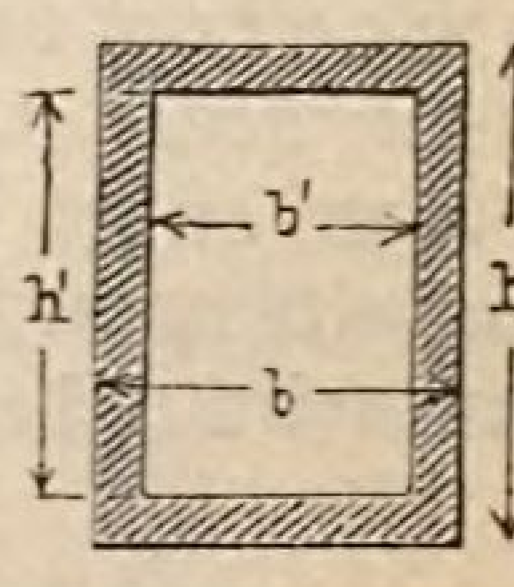


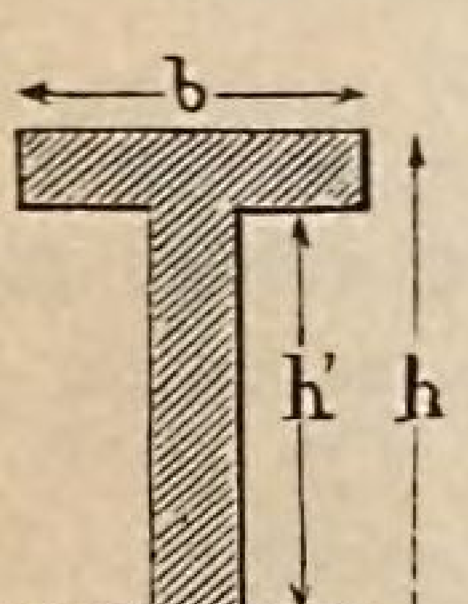
$\frac{s\pi}{32} b h^2$ $\qquad$ $\frac{s\pi}{32} \frac{b h^3 - b' h'^3}{h}$





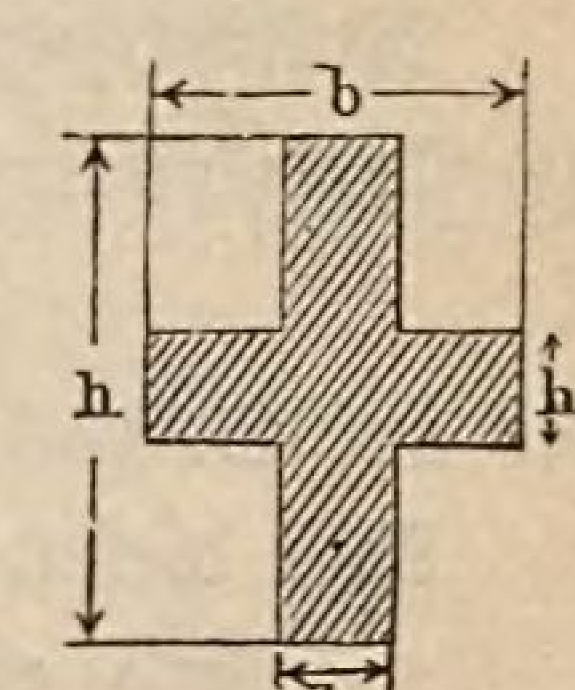
$\frac{s}{6} \frac{b (h^3 - h'^3)}{h}$ $\qquad$ $\frac{s}{6} \frac{b h^3 - b' h'^3}{h}$

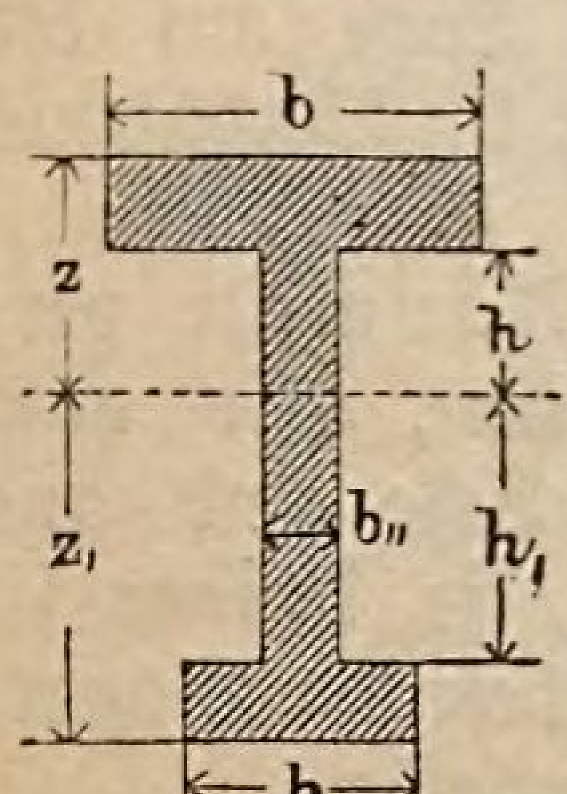




$\frac{s}{6} \frac{b' h'^3 + b (h^3 - h'^3)}{h}$;

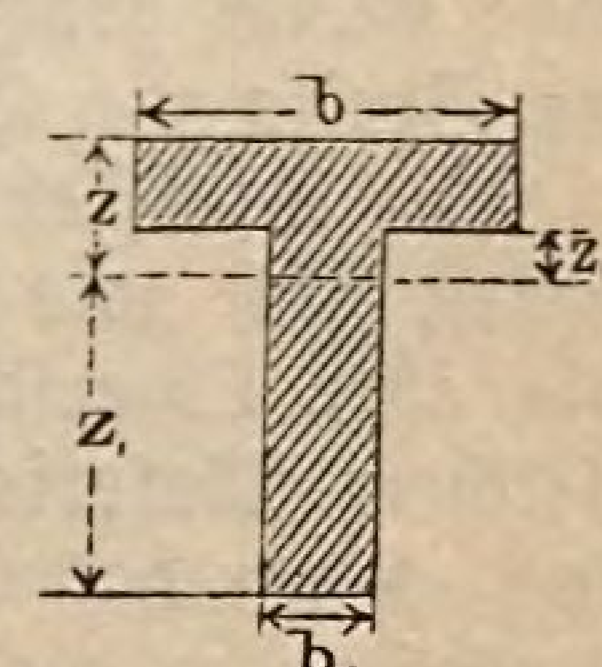
$\frac{s}{6} \frac{b' h^3 + (b - b') h'^3}{h}$

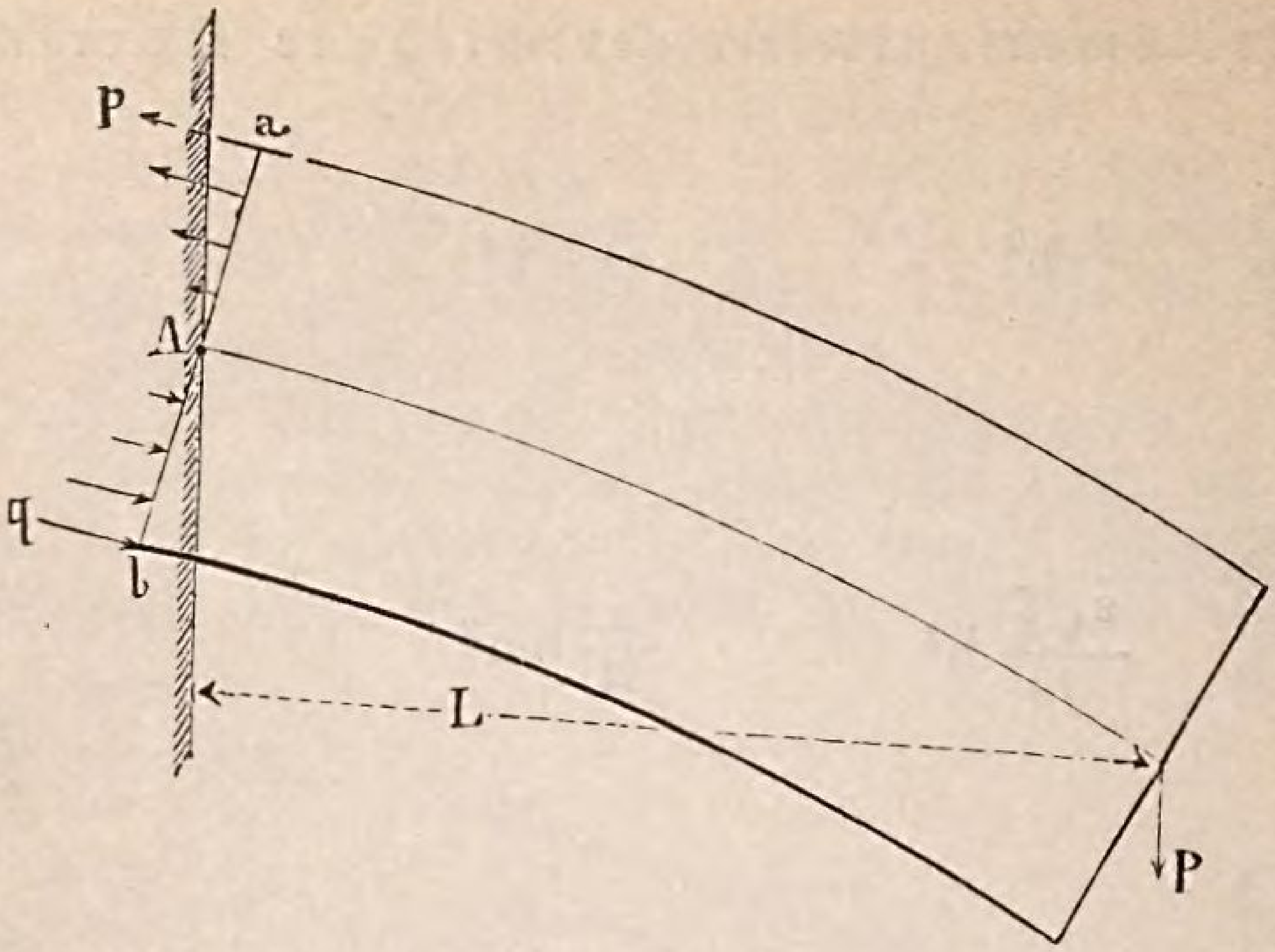




$\frac{s}{3} \frac{b z^3 - (b - b'') h^3 + b' z'^3 - (b' - b'') h'^3}{z}$;

$\frac{s}{3} \frac{b z^3 - (b - b') z''^3 + b' z'^3}{z}$





Nun sei

P die Last am freien Ende,

L die Länge des Trägers, also der Hebelsarm von P und

s der Widerstand, welchen die oberste Schicht vom Querschnitt 1 an der Einmauerungsstelle leistet (Modul der Zugfestigkeit in a),

so wird das Aktionsmoment PL gleich sein dem Festigkeitsmoment, wie dasselbe auf S. 153 für verschiedene Querschnitte zusammengestellt ist.

Diese Festigkeitsmomente kann man auch aus den Trägheitsmomenten der Querschnitte hervorgehen lassen, wenn man die Trägheitsmomente multipliziert mit der Spannung s und dividiert mit dem Abstand dieser Spannung von der Neutralachse. So ist (S. 81) das Trägheitsmoment für ein Rechteck, dessen Achse die Fläche in zwei symmetrische Teile teilt, nach Formel (4)

$$T = \frac{1}{12} b h^3.$$

Multipliziert man hier mit s und dividiert mit $\frac{h}{2}$, so erhält man als Festigkeitsmoment

$$P L = \frac{1}{6} s b h^2,$$

wie auf S. 153 angegeben.

Aus diesen Formeln gehen unmittelbar folgende Resultate hervor:

a) Wird ein rechtwinkliger Stab aus der flachen Lage auf die hohe Kante gelegt, so ändert sich seine relative Festigkeit im Verhältnis der Breite zur Höhe.

b) Die Festigkeiten von Balken mit ähnlichen Formen verhalten sich wie die Quadrate ihrer linearen Dimensionen, also auch wie ihre Querschnittsflächen. Daraus folgt, daß ähnliche und aus gleichem Material gebaute Maschinen relativ fester sind, je kleiner sie sind; denn das Gewicht der Teile verhält sich wie die Kuben der Lineardimensionen, die Biegungsfestigkeit wie die Quadrate derselben.

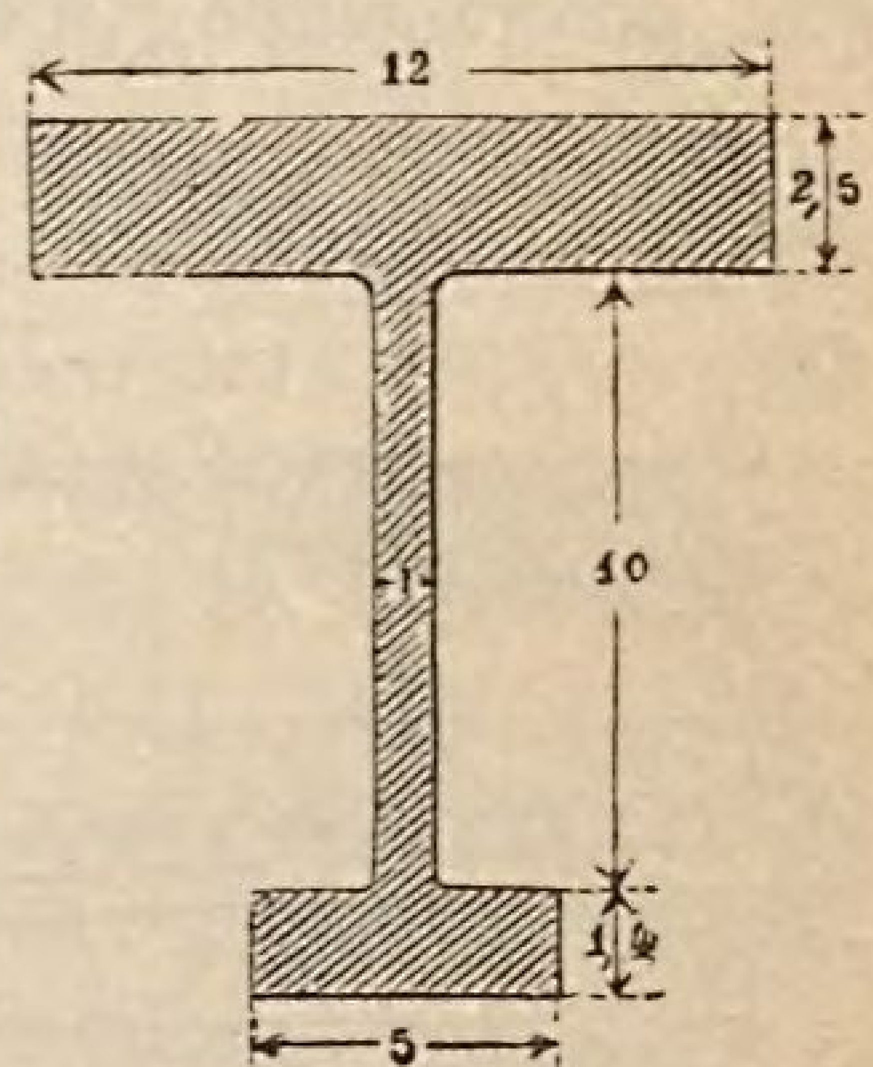
Ist mithin die Maschine A nach einem 2mal kleineren Maßstab als die Maschine B gebaut, so ist jeder Teil 8mal leichter, aber nur 4mal schwächer, da die Verkürzung der Stücke die relative Festigkeit vermehrt.

3. **Beste Querschnittsformen.** Aus dem Vorstehenden folgt:

a) Das Material soll im Querschnitt da angehäuft werden, wo es die größte Spannung auszuhalten hat, also auf der obern und untern Seite des Querschnittes. Jenes Material, das zunächst der Neutralachse liegt, trägt nur wenig zur Festigkeit bei.

b) Für Material, das gleichen Widerstand gegen das Zusammendrücken und Ausdehnen leistet, soll der Stoff zu beiden Seiten der Neutralachse gleichförmig verteilt werden. In diesem Fall ist das Schmiedeisen. Nur dann soll bei Schmiedeisen das Material auf der Druckseite mehr angehäuft werden als auf der Zugseite, wenn der Querschnitt aus Rippen besteht, welche besondere Biegungen werfen, d. h. wenn die Druckseite der Gefahr unterliegt, daß die absolut rückwirkende Festigkeit teilweise in die relativ rückwirkende übergeht.

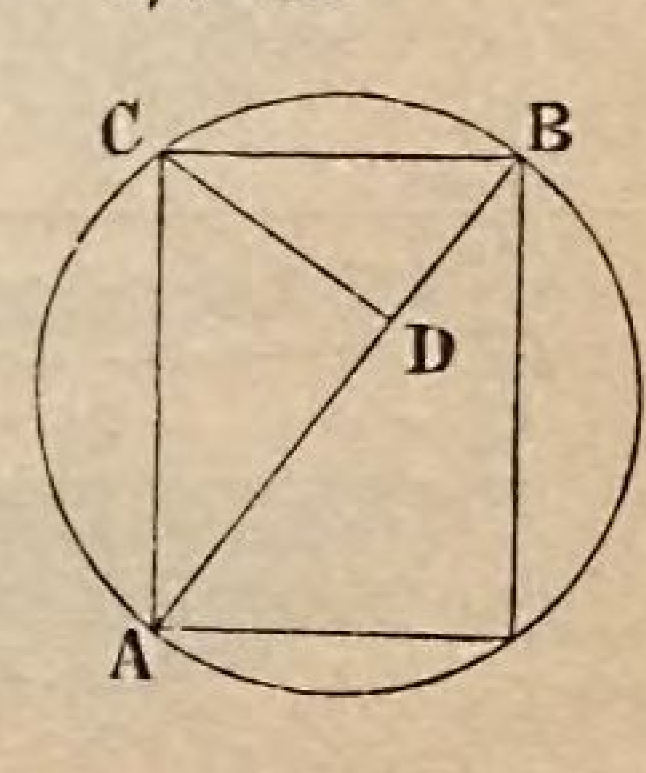
c) Ist der Widerstand gegen das Zusammendrücken größer als gegen die Ausdehnung, so muß man auf der Seite, auf welcher der Stab ausgedehnt wird, den Querschnitt in entsprechender Weise vergrößern. Hierher gehört das Gußeisen. Bei diesem verhält sich die Druckfestigkeit zur Zugfestigkeit ungefähr wie 6 : 1. Balken, welche zur Neutralachse symmetrisch sind, werden daher auf der Zugseite zerrissen.



Beste Querschnittsformen für gußeiserne Träger sind sowohl auf theoretischem Wege als durch Versuche ermittelt worden. Sie stimmen jedoch im einzelnen nicht mit einander überein. Das Gemeinsame aber besteht darin, daß die Flansche, welche ausgedehnt wird, 4- bis 6mal mehr Querschnitt erhält als die Flansche, die zusammengedrückt wird. Beistehende Figur enthält mittlere Verhältniszahlen. Die Neutralachse teilt die ganze Höhe in zwei Teile, die sich verhalten wie 1 : 2. Dadurch verkürzen sich die äußersten Fasern auf der Druckseite doppelt so stark, als sie sich auf der Zugseite ausdehnen, wie es mit Rücksicht auf die Grenzen der Elasticität für Verkürzung und Ausdehnung sein soll.

Die Dicke der Mittelrippe solcher Träger darf nicht unter eine gewisse Grenze hinabgehen. So soll sein:

die kleinste zulässige Dicke . .	2	2,5	3	3,5 cm
bei einer Balkenlänge von . .	4	5,0	6	8,0 m.



d) Um aus einem Baumstamme einen Balken zu bilden, der die größtmögliche Stärke gegen Biegung besitzt, muß sich die Breite BC des Balkens zu dessen Höhe AC verhalten wie 5 : 7. Man mache zu diesem Zwecke BD = 1/3 des Durchmessers AB, errichte darauf die Senkrechte CD und ziehe die Seiten CA und CB, wodurch man Höhe und Breite des Balkens erhält.

4. **Verschiedene Formen des Aktionsmomentes.** Wirken auf einen Balken mehrere Kräfte ein, senkrecht zu seiner Längenrichtung, sei es nach derselben oder entgegengesetzter Richtung, so entsteht ein resultierendes Moment, das statt P L (S. 154) in Rechnung zu bringen ist.

Wenn eine dieser Kräfte eine Last darstellt, verteilt über den Balken, so liegt ihr Angriffspunkt im Schwerpunkt der Last. Als eine solche kann auch das Gewicht des Balkens angesehen werden.

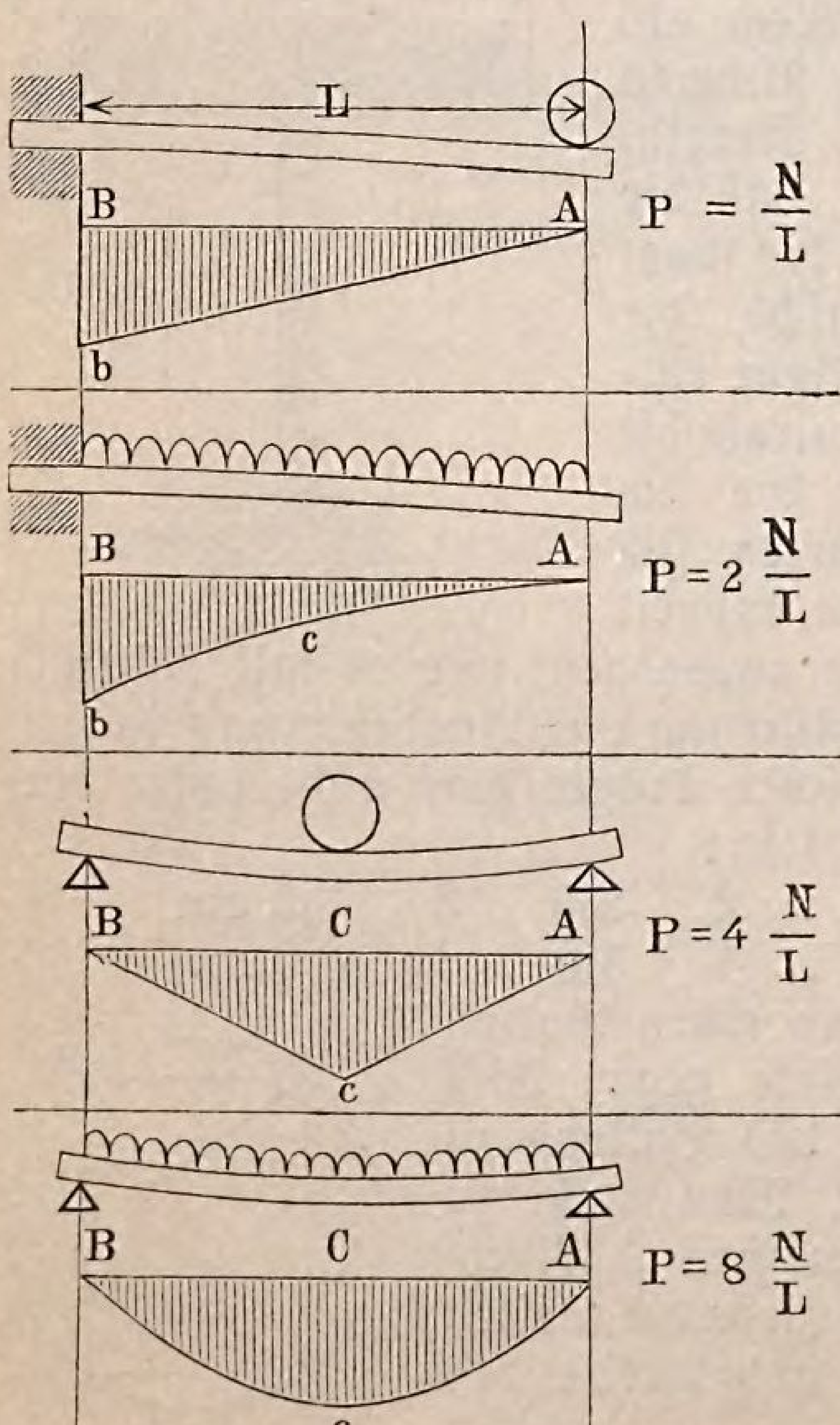
5. **Diagramm der Aktionsmomente.** Man denke sich am Balken verschiedene Einmauerungsstellen; ermittle die zugehörigen Aktionsmomente; trage sie nach einem bestimmten Maßstabe in den betreffenden Stellen senkrecht zur Längenrichtung (als Ordinaten) ab und verbinde die Endpunkte der Ordinaten, so entsteht die Momentenfläche. Der größten Ordinate entspricht die größte Spannung s. Bei prismatischen Trägern ist s an jeder Stelle proportional dem Aktionsmoment.

6. **Tragkraft eines prismatischen Balkens bei specieller Belastungsweise.** Es seien

L die Länge des Balkens,

P die auf ihm liegende Last,

N das Festigkeitsmoment, also z. B. für den rechtwinkligen Querschnitt $N = \frac{s}{6} b h^2$, für den kreisförmigen $N = \frac{\pi s}{32} d^3$ u. s. w., so ergibt sich folgende Zusammenstellung:

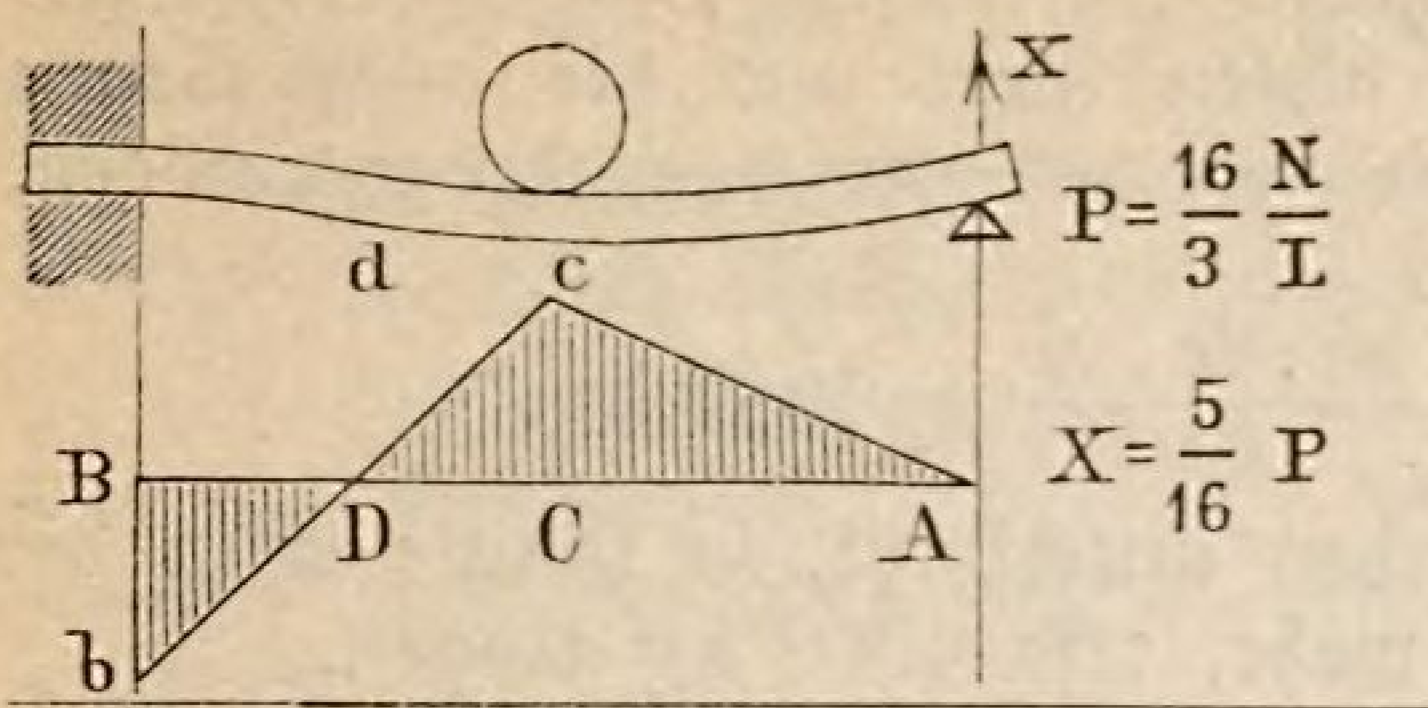


I. Das eine Ende eingemauert, das andere belastet. Größtes Moment N dargestellt durch Ordinate B b. Momentenfläche das Dreieck A B b.

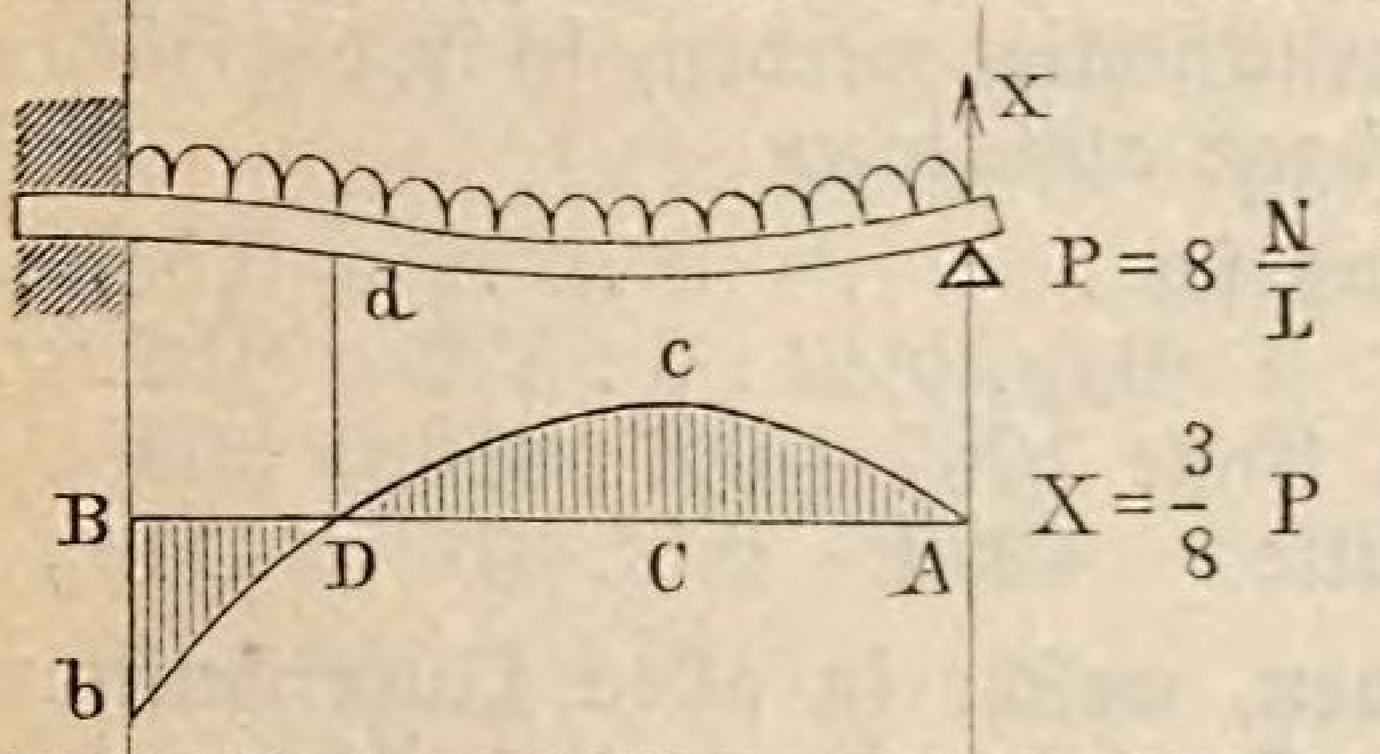
II. Das eine Ende eingemauert, die ganze Länge gleichförmig belastet. Größtes Moment N durch B b dargestellt. Momentenkurve A c b eine Parabel mit Scheitel A.

III. Beide Enden unterstützt, in der Mitte C belastet. Größtes Moment N = C c. Momentenfläche das gleichschenklige Dreieck A B c.

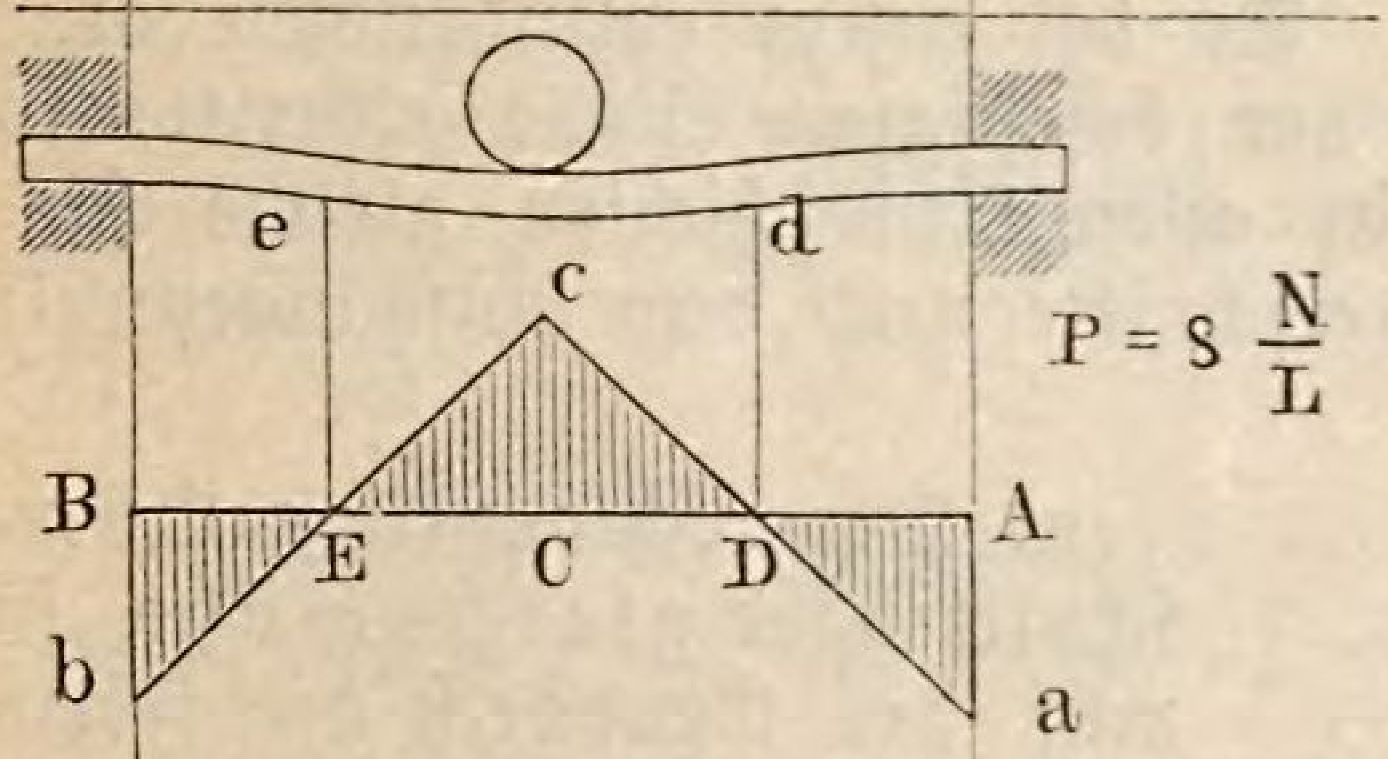
IV. Beide Enden unterstützt, Last gleichförmig über die Länge verteilt. Größtes Moment N = C c in der Mitte. Momentenkurve A c B eine Parabel, c Scheitel derselben.



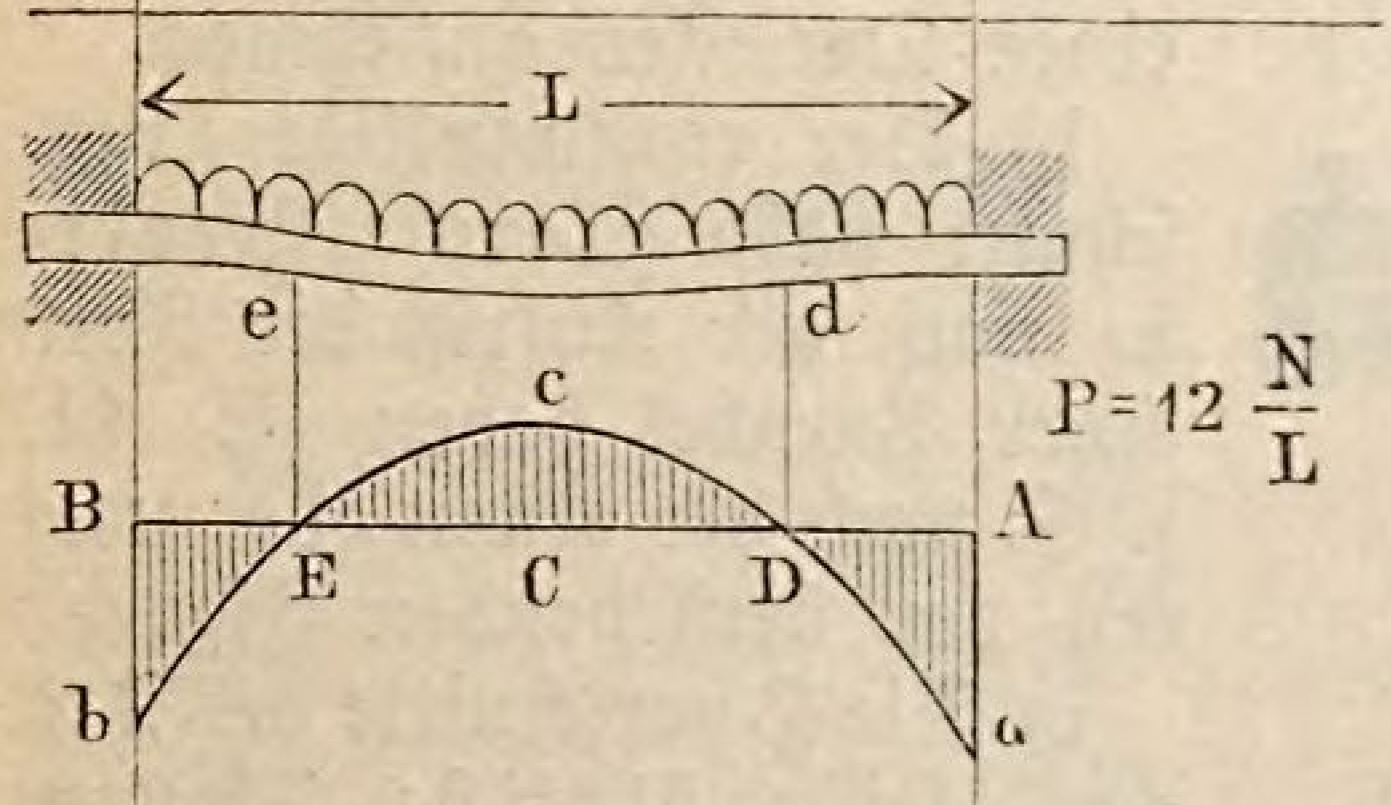
V. Am einen Ende eingemauert, am anderen unterstützt, Mitte belastet. x Druck auf die Stütze. Bb = N, $Cc = \frac{5}{6}$ N. Momentenlinien Ac, bDc geradlinig. Hohle Seite von BD unten, von DA oben. Wendepunkt d.



VI. Lagerung wie Fall V, Last gleichförmig verteilt. $AC = \frac{3}{8}$ L; CD = CA; Bb = N; $Cc = \frac{1}{2}$ N. Momentenkurve AcDb eine Parabel, c Scheitel. Hohle Seite von BD unten, von DA oben. Wendepunkt d.



VII. Beide Enden eingemauert, in der Mitte belastet. Momente Aa = Bb = Cc = N. Momentenlinie: zwei Gerade aDc, bEc. Hohle Seite von AD und BE unten, von DE oben; d und e Wendepunkte.



VIII. Beide Enden eingemauert, Last gleichförmig verteilt. Aa = Bb = N; $Cc = \frac{1}{2}$ N. Kurve aDcEb eine Parabel. AD = BE = 0,212L. Hohle Seite von AD, BE unten, von DE oben. Wendepunkte d, e.

Die Belastungen des Balkens in diesen 8 Zuständen verhalten sich, bei gleicher größter Spannung s des Materiales, wie

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
die Zahlen	1	2	4	8	$\frac{16}{3}$	8	8	12

7. **Modul der Biegungsfestigkeit und numerische Rechnungen.** Die Werte für den Bruchmodul der Biegungsfestigkeit per Quadratcentimeter sind für

Holz	450— 600 kg
Gußeisen . . .	1900—2900 „
Schmiedeisen . .	3000—4000 „

Beisp. Ein Balken von Tannenholz sei an einem Ende eingespannt, am andern belastet; wie viel trägt derselbe bei 4facher Sicherheit, wenn er 6 m lang, 30 cm breit und 32 cm hoch ist?

Es sei für den Bruch zu nehmen s = 500 kg, also bei 4facher Sicherheit s = 125 kg. Setzt man diesen Wert und die angegebenen Dimensionen in Centimetern in die Formel für das Tragvermögen, so wird

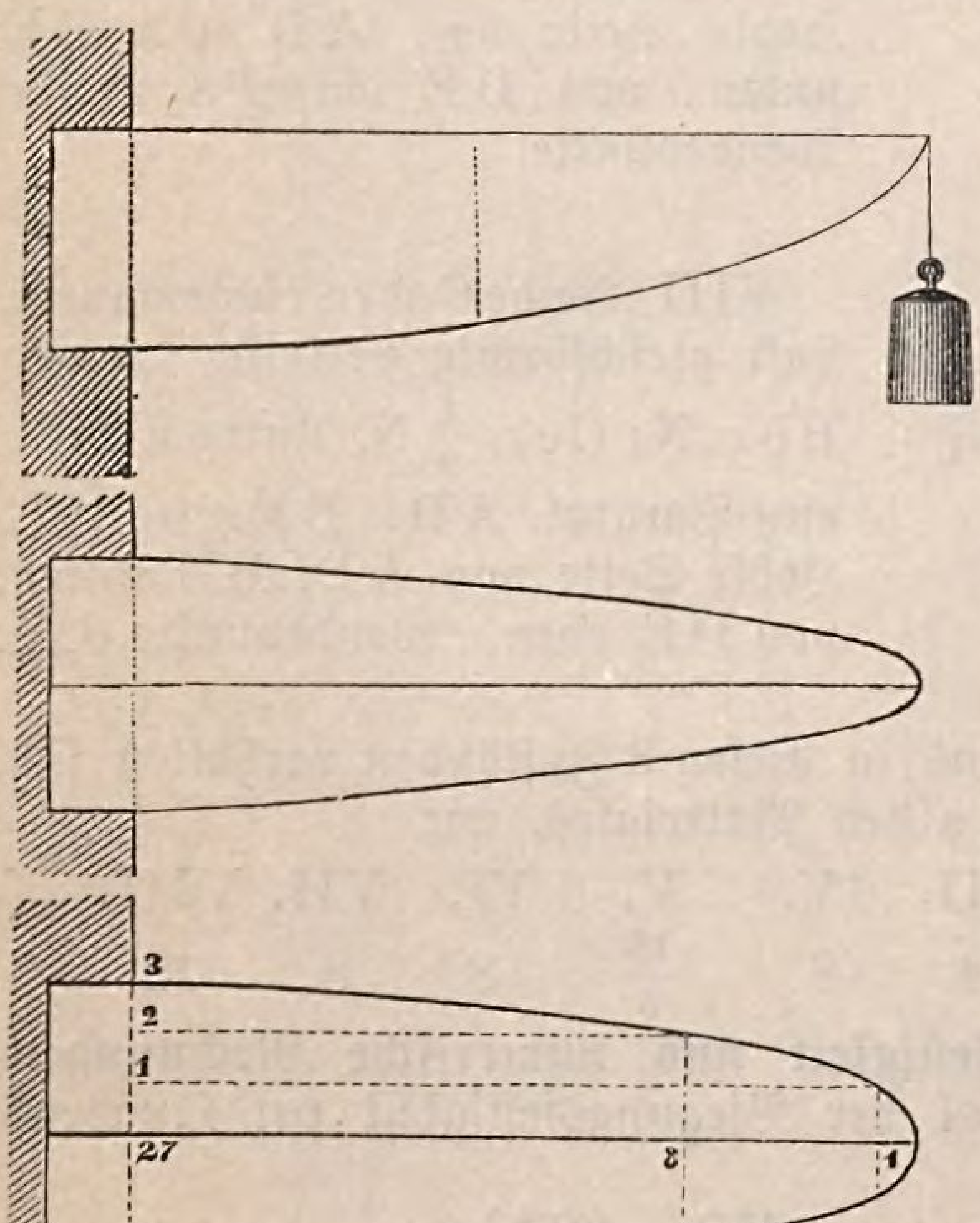
$$P = \frac{s}{6} \cdot \frac{b h^2}{L} = \frac{125}{6} \cdot \frac{30 \,.\, 32 \,.\, 32}{600} = 1067 \text{ kg.}$$

Wäre der Balken an beiden Enden unterstützt, so könnte er in der Mitte bei gleicher Sicherheit 4mal mehr, also 4268 kg tragen.

Soll das Gewicht des Balkens berücksichtigt werden, so ist die Hälfte desselben vom berechneten Tragvermögen abzuziehen.

Das specifische Gewicht des Balkens sei . . . . = 0,55,
so ist das Gewicht des Balkens . . 0,3 . 0,32 . 6 . 550 = 316 kg,
also das Tragvermögen am freien Ende 1067 − 0,5 . 316 = 909 „
„ „ „ in der Mitte 4268 − 0,5 . 316 = 4110 „

8. **Bestimmung der Trägerformen, welche in allen Querschnitten gleiche Biegungsfestigkeit darbieten.** Da bei einem cylindrischen oder prismatischen Träger der Bruch an der befestigten Stelle eintritt, so folgt, daß bei einem Träger, der in allen Querschichten gleiche Biegungsfestigkeit besitzen soll, diese Querschnitte nach dem Aufhängepunkt der Last hin abnehmen müssen.



a) Der rechtwinklige Querschnitt habe gleiche Höhe, so muß der Grundriß die Form eines Dreieckes annehmen.

b) Der rechtwinklige Querschnitt habe gleiche Breite, so muß der Aufriß die Form einer Parabel haben (S. 41), z. B. nach der ersten oder zweiten der beistehenden Figuren.

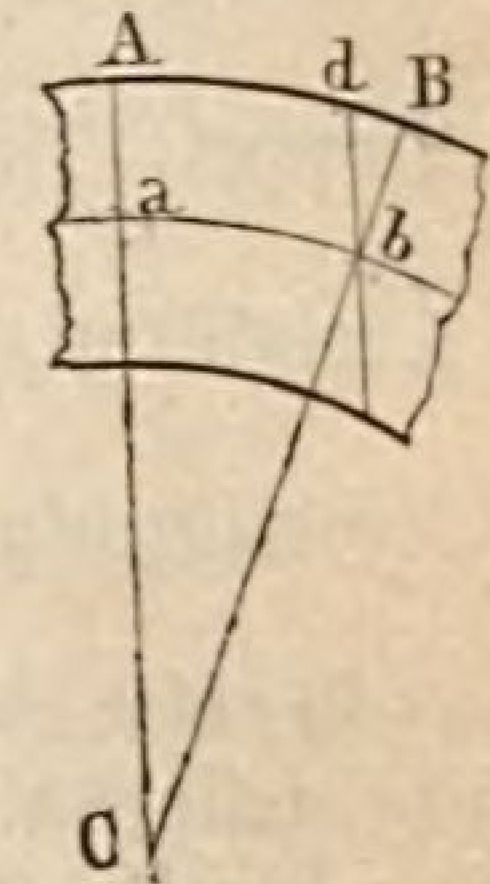
c) Die Querschnitte des Trägers seien ähnliche Figuren, d. h. das Verhältnis zwischen der Höhe und Breite sei auf allen Punkten der Länge dasselbe, so verjüngen sich Aufriß und Grundriß nach einer kubischen Parabel. Wenn bei dieser die Höhen (dritte Figur) sich wie 1 : 2 : 3 verhalten, so müssen sich die Abstände dieser Höhen vom Scheitel verhalten wie die dritten Potenzen von 1, 2, 3, also wie 1 : 8 : 27. Man erkennt daher das Konstruktionsverfahren aus der Figur.

d) Wenn ein Stab an beiden Enden unterstützt und zwischen den Stützen belastet ist, so muß er sich von der Last aus nach beiden Seiten

hin verjüngen in einer Weise, wie dies in den obigen Fällen angegeben ist.

Diese Formverhältnisse sind rein mathematische; in der Praxis werden sie durch annähernde Formen ersetzt.

9. **Elasticitätsmoment.** Es sei ab die neutrale Schicht eines gebogenen prismatischen Balkens. Man lege durch a und b zwei Querschnitte AC und BC, ferner einen Querschnitt bd, parallel zu AC. Nun sei



$z = bd$ die Entfernung der neutralen Schicht von der Oberfläche des Balkens, wo die größte Spannung s in diesem Querschnitt herrscht, und

$\rho = bC$ der Krümmungshalbmesser des sehr kurzen Bogens ab,

N, M das Festigkeits- und das Elasticitätsmoment des Balkens,

so verhält sich $dB : db = ab : aC$ oder $dB : ab = z : \rho$. Allein nach dem Gesetz (2) der Ausdehnung (S. 135) ist auch $dB : ab = s : E$ (Modul der Elasticität); daher

$$(1) \qquad \rho = E\,\frac{z}{s}.$$

Nun ist das Festigkeitsmoment (S. 153) ein Produkt aus s und einem Faktor, der mit k bezeichnet werde; daher

$$(2) \qquad N = ks.$$

Durch Multiplikation von (1) und (2) kommt

$$(3) \qquad \rho\,.\,N = kEz.$$

Die Größe kEz ist für alle Querschnitte konstant und heißt Elasticitätsmoment. Da auch $\rho\,.\,N$ konstant sein muß, so sind ρ und N verkehrt proportional: dem größten statischen Moment entspricht der kleinste Krümmungshalbmesser, also die stärkste Krümmung. Allgemein ist nun das Elasticitätsmoment

$$(4) \qquad M = kEz.$$

Für den rechtwinkligen Querschnitt ist $k = \frac{1}{6}\,bh^2$, $z = \frac{h}{2}$; daher

$$M = \frac{E}{12}\,bh^3.$$

Für den kreisförmigen wird $k = \frac{\pi}{32}\,d^3$ und $z = \frac{d}{2}$; daher

$$M = \frac{E\pi}{64}\,d^4.$$

10. **Senkung.** Es gelte die bisherige Bezeichnung. Außerdem sei

u die größte Senkung des Balkens (Ausweichung von der Richtung des Balkens im unbelasteten Zustand) und

p Last per Längeneinheit, gleichförmig über Länge L verteilt, so ist

a) Balken am einen Ende eingespannt, Last P am freien Ende:

$$u = \frac{L^3}{3M}\left(P + \frac{3}{8}pL\right). \qquad (5)$$

Der Träger senkt sich mithin durch sein eigenes Gewicht pL um 3/8 derjenigen Senkung, die er annähme, wenn dieses Gewicht am freien Ende als Last wirkte.

Führt man die Werte von M in (5) ein, so folgt

Querschnitt rechtwinklig $u = \frac{4}{E}\cdot\frac{L^3}{b\,h^3}\left(P + \frac{3}{8}pL\right)$.

Doppel-T-förmig . . $u = \frac{4}{E}\cdot\frac{L^3}{b\,h^3 - (b - b')\,h'^3}\left(P + \frac{3}{8}pL\right)$.

Kreisförmig massiv . $u = \frac{64}{3\pi E}\cdot\frac{L^3}{d^4}\left(P + \frac{3}{8}pL\right)$.

Kreisförmig hohl . . $u = \frac{64}{3\pi E}\cdot\frac{L^3}{d^4 - d'^4}\left(P + \frac{3}{8}pL\right)$.

Beisp. Wie viel wird ein Balken von Eichenholz, der an einem Ende festgehalten, am andern mit 2400 kg belastet ist, sich senken, wenn seine Breite 20 cm, seine Höhe 30 cm und seine Länge 3 m beträgt?

Senkung durch die Last von 2400 kg. Es ist

$P = 2400$ kg, $E = 120000$ kg, $L = 300$ cm.

Senkung . $u = \frac{4}{120000}\cdot\frac{300^3}{20\,.\,30^3}\cdot 2400 = 4$ cm.

Senkung durch das eigene Gewicht.

Gewicht (spec. Gew. 0,9) $3\,.\,0{,}2\,.\,0{,}3\,.\,900 = 162$ kg.

Senkung . $u = \frac{4}{120000}\cdot\frac{300^3}{20\,.\,30^3}\cdot\frac{3}{8}\,.\,162 = 0{,}10$ cm.

Totale Senkung . . . . . $4 + 0{,}10 = 4{,}10$ „

b) Balken an beiden Enden unterstützt, mit P in der Mitte belastet:

$$u = \frac{L^3}{48\,M}\cdot\left(P + \frac{5}{8}pL\right).$$

Der Träger senkt sich mithin durch sein eigenes Gewicht um 5/8 derjenigen Senkung, die er annähme, wenn dieses Gewicht in der Mitte des Balkens als Last wirkte.

Man kann die Formeln zur Berechnung der Senkung in diesem Fall aus denen des vorigen (a) ableiten, wenn man in jenen Formeln $\frac{1}{16}\left(P + \frac{5}{8}pL\right)$ statt $P + \frac{3}{8}pL$ setzt.

c) Es werde ein Träger in die 8 Zustände, wie sie auf S. 156 u. 157 angenommen wurden, versetzt; so verhalten sich die Senkungen, welche einer gleichen Spannung s entsprechen, in gleicher Reihenfolge, wie

$$1 : 3/4 : 1/4 : 5/16 : 7/48 : 81/625 : 1/8 : 3/32.$$

d) Sollen in diesen 8 Fällen die Belastungen gleich groß sein, jedoch die größte Ausdehnung (nämlich bei Zustand I) die Elasticitäts-

grenze nicht überschreiten, so ist das Verhältnis der Senkungen, in gleicher Reihenfolge, wie

$$1 : {}^3/_8 : {}^1/_{16} : {}^5/_{128} : {}^7/_{256} : {}^{81}/_{5000} : {}^1/_{64} : {}^1/_{128}.$$

11. **Versuche von Barlow mit Eichenholz.** Diese Versuche wurden mit 16 rechtwinkligen Stäben angestellt, welche aus einem Stamme geschnitten waren. Höhe und Breite des Querschnittes = 5,08 cm; Entfernung der Stützen, auf welche die Stäbe gelegt wurden = 183 cm.

Zustand des Holzes.	Senkung in der Mitte bei einer Last von 45,3 kg.	Bruchlast, in der Mitte aufgelegt.
Auf gewöhnliche Weise an der Luft getrocknet	1,175 cm	304 kg
Ausgelaugt vermittelst Dampf	1,1275	291
Ausgelaugt mit heißem Wasser	1,247	281

Aus diesen Daten soll die Spannung s der Holzfasern berechnet werden: a) für 45,3 kg Last und b) für den Bruch.

a) Das Gewicht des ersten dieser Balken ist = 3,776 kg. Folglich wird

$$P + \frac{1}{2} p L = 45{,}3 + \frac{3{,}776}{2} = 47{,}188 \text{ kg}.$$

Hier ist die Formel anzuwenden:

$$P L = 4 \frac{s}{6} b h^2,$$

worin für P der vorstehende Wert 47,188 zu setzen ist. Man erhält

$$s = \frac{6 P L}{4 b h^2} = \frac{6 \,.\, 47{,}188 \,.\, 183}{4 \,.\, 5{,}08 \,.\, 5{,}08^2} = 99 \text{ kg}.$$

Somit wird eine Faser von 1 qcm Querschnitt auf der obersten und untersten Seite des Balkens, am Aufhängepunkt der Last, mit einer Kraft s = 99 kg zusammengedrückt und ausgedehnt.

b) Es ist dieselbe Formel anzuwenden, jedoch für P zu nehmen 304 + 1,888 = 305,888 kg, also ein Wert, der 6,46mal größer ist als der obige, weshalb auch s einen 6,46mal größern Wert erhält. Es ist daher für die Bruchbelastung per 1 qcm

$$s = 99 \,.\, 6{,}46 = 639{,}5 \text{ kg}.$$

Dieser Wert liegt zwischen den Grenzen, die auf S. 133 über die Zugfestigkeit aufgeführt sind.

12. **Versuche von Morris Stirling mit einem rechtwinkligen Balken von Gußeisen.** Balkenhöhe h = 3,81 cm; Breite b = 7,62 cm; Abstand der beiden Stützen, auf welche der Balken gelegt wurde, L = 410 cm; Gewicht des Balkens p L = 87,92 kg.

Last in der Mitte . .	P = 25,4	76,2	127,0	177,7	410,2 kg.
Hierdurch bewirkte Senkung	u = 0,82	2,57	4,56	6,59 cm	Bruch.
Totale Senkung u + 2,03 cm	= 2,85	4,60	6,59	8,61	—

Zur Berechnung der Senkung eines rechtwinkligen Balkens, der an beiden Enden unterstützt und in der Mitte belastet ist, hat man

$$u = \frac{L^3}{4 E b h^3} (P + \frac{5}{8} p L).$$

Die Senkung durch das eigene Gewicht des Balkens ist u = 2,03 cm. Setzt man diesen Wert von u in die Formel und zugleich P = 0, so erhält man für den Modul E der Elasticität

$$E = \frac{L^3}{4 u b h^3} \cdot \frac{5}{8} p L = \frac{410^3 \,.\, 5 \,.\, 87{,}92}{4 \,.\, 2{,}03 \,.\, 7{,}62 \,.\, 3{,}81^3 \,.\, 8} = 1106500 \text{ kg}.$$

Dieser Wert ist etwas größer, als er sich in Tabelle S. 137 angegeben findet.

Zur Berechnung der Bruchspannung s mit Rücksicht auf das Gewicht des Balkens hat man die Formel (S. 153 und 156)

$$P + \frac{1}{2} p L = 4 \frac{s}{6} \cdot \frac{b h^2}{L}.$$

Da für den Bruch $P + \frac{1}{2} p L = 410{,}2 + \frac{87{,}92}{2} = 454{,}16$ kg, so folgt

$$s = \frac{6 L}{4 b h^2} (P + \frac{1}{2} p L) = \frac{6 \,.\, 410 \,.\, 454{,}16}{4 \,.\, 7{,}62 \,.\, 3{,}81^2} = 2525 \text{ kg}.$$

Somit hielt eine Faser von 1 qcm Querschnitt in der Mitte des Balkens, auf der konvexen Seite, einen Zug von 2525 kg aus.

Beim ersten und dritten Versuch haben die Belastungen $P + \frac{5}{8} p L$ folgende Werte:

$$25{,}4 + 54{,}95 = 80{,}35 \text{ kg}; \quad 127{,}0 + 54{,}95 = 181{,}95 \text{ kg}.$$

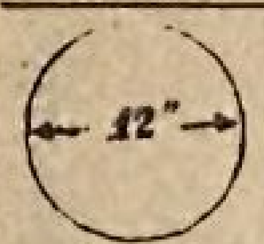
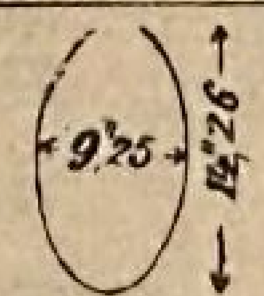
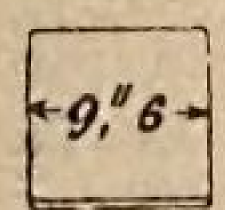
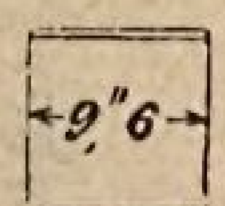
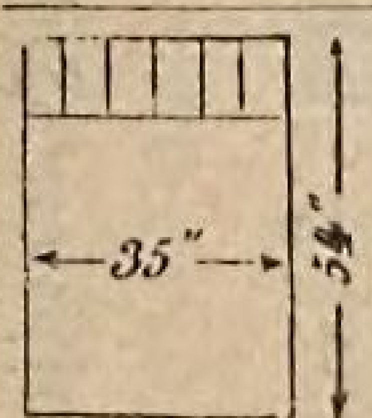
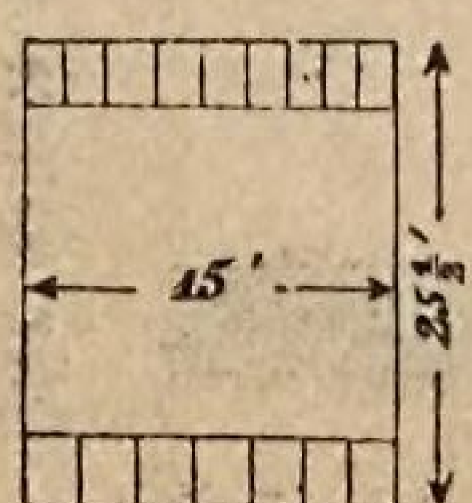
Der ersten dieser Belastungen entspricht eine Senkung = 2,85 cm. Sind daher die Senkungen den Belastungen proportional, so muß sein

$$80{,}35 \text{ kg} : 181{,}95 \text{ kg} = 2{,}85 \text{ cm} : x,$$

woraus man findet x = 6,45 cm, statt der beobachteten 6,59 cm.

13. **Versuche von Hodgkinson mit einem T-förmigen Balken von Gußeisen.** Der Balken an beiden Enden unterstützt, in der Mitte belastet. Gewicht des Balkens = 17,93 kg (Fig. S. 153 rechts unten). b = 12,7; b′ = 0,91; z = 0,84; z′ = 3,12; z″ = 0,08; L = 198,2 cm.

Vertikalrippe unten.			Vertikalrippe oben.		
Last P in der Mitte.	Senkung. Total.	Senkung. Permanent.	Last P in der Mitte.	Senkung. Total.	Senkung. Permanent.
3,18 kg	0,38 mm	— mm	6,36 kg	0,63 mm	— mm
6,36	0,81	0,025	12,72	1,65	0,07
9,54	1,17	0,050	25,44	3,40	0,12
12,72	1,62	0,100	50,88	6,85	0,38
25,44	3,30	0,125	101,80	14,70	1,47
50,88	6,93	0,508	154,00	22,70	2,56
76,30	11,35	0,888	203,80	31,00	3,93
101,80	15,70	1,470	254,00	40,20	5,97
127,00	20,60	2,360	305,00	50,40	8,38
154,00	26,15	3,300	356,00	61,20	12,40
165,50	Bruch	—	458,00	105,00	26,40
—	—	—	508,00	Bruch	—

Querschnitt der Röhren.	Blechstärke. oben	Blechstärke. unten	Entfernung der Stützpunkte.	Gewicht der Röhren.	Aufgelegtes Gewicht in der Mitte.	Senkung in der Mitte.	Bemerkungen. (S. Text auf nächster Seite.)
 Kreisförmig.	0,037″		17′	107 ℔	2704 ℔	0,65″	Bei der angegebenen Belastung oben zerdrückt.
 Elliptisch.	0,042″		17′	109 „	2100 „	0,62″	Oben zerdrückt.
 Quadratisch.	0,0757″	0,142″	17 1/2′	225 „	2108 „ 3228 „ 3788 „	0,45″ 0,80 0,90	Bei der letzten Belastung durch faltenartiges Zusammenlegen der Decke oben zerdrückt.
 Quadratisch umgekehrt.	0,142″	0,0757″	17 1/2′	225 „	3788 „ 6588 „ 7148 „	0,90″ 1,75 1,76	Bei der letzten Last oben zerdrückt, jedoch fast 2mal so stark wie oben.
 6 Zellen. Rektangulär.	24,02□″	8,80□″ 12,80 „ 17,80 „ 22,45 „	75′		79578 „ 126128 „ 148129 „ 154452 „		Dem Zusammenfallen der Decke entgegengewirkt durch die Zellen. Die drei ersten Röhren unten zerrissen, die letzte oben zerdrückt.
 8 Zellen. Conway-Brücke. 6 Zellen.	670□″	517□″	400′	130 tons	0 tons 95 „ 154 „ 201 „ 301 „	7,91″ 9,02 9,50 10,50 10,95	Diese Röhre (der Conwaybrücke) senkte sich durch das eigene Gewicht 7,91″. Die letzte Last brachte also eine Senkung von 3,04″ hervor. Die Spannung s beträgt für die letzte Last 768 kg per Quadratcentimeter, also 2/9 des Bruchmoduls.

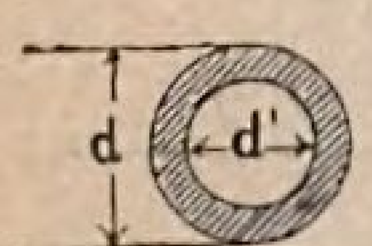
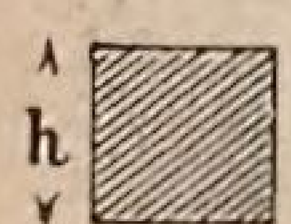
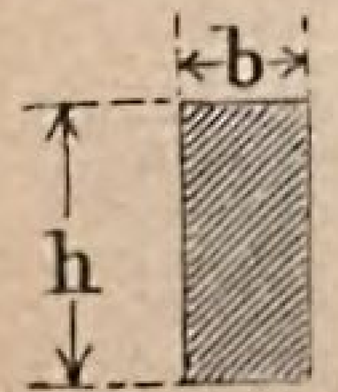
14. **Fairbairn's Versuche über die Tragfähigkeiten blecherner Röhren.** Zum Behuf der Erbauung zweier Brücken über den Menai-Kanal auf der Chester-Holyhead-Eisenbahn wurden von dem Erbauer Versuche mit verschiedenen Röhren von gewalzten und zusammengenieteten Eisenblechen in der Weise vorgenommen, daß die Röhren an beiden Enden unterstützt und in der Mitte belastet wurden. Vorstehende Tabelle gibt die wichtigsten Resultate derselben, sowie auch Versuche mit der Brücke selbst (in englischen Maßen) an.

42. Torsionsfestigkeit.

1. **Elasticitäts- und Festigkeitsmoment.** Wird ein prismatischer oder cylindrischer Stab verdreht, so nehmen die Längenfasern, welche ursprünglich geradlinig waren, eine schraubenförmig gewundene Form an. Dadurch werden die äußern Fasern verstreckt und die innern verkürzt. Es gibt also eine cylindrische Schicht im Stab, deren Fasern nur gebogen, nicht aber verlängert oder verkürzt werden. Diese Schicht könnte man die neutrale Schicht nennen. Bei einer cylindrischen Welle ist ihr Halbmesser 0,707 vom Halbmesser der Welle. Es sei

P die Kraft, welche den Stab verdreht,
R die Länge des Hebelarms, senkrecht zur Länge des Stabes, an dessen Ende die Kraft P wirkt,
L die Länge der Welle,
a die Anzahl Grade, um welche der Stab verdreht wird,
s die größte Spannung, welche im Material an der Oberfläche des Stabes per Einheit des Querschnittes eintritt und
E der Modul der Elasticität des Materials.

Das äußere statische Moment, welches die Drehung bewirkt, ist PR. Diesem widersteht in jedem Querschnitt des Stabes eine Summe von statischen Momenten. Bei Ermittlung dieser letztern Widerstandsmomente kann man nun entweder die Spannung des Materials oder den Modul der Elasticität mit der Größe der Verdrehung in Rechnung bringen. Der erstere Ausdruck heißt Festigkeits-, der letztere Elasticitätsmoment. Man erhält für die beistehenden Querschnitte:

	Festigkeitsmoment.	Elasticitätsmoment.
	$PR = \frac{s\pi}{16} \cdot \frac{d^4 - d'^4}{d}$;	$PR = \frac{E\pi^2}{14400} (d^4 - d'^4) \frac{a}{L}$.
	$PR = \frac{s}{3\sqrt{2}} \cdot h^3$;	$PR = \frac{E\pi}{2700} \cdot h^4 \cdot \frac{a}{L}$.
	$PR = \frac{s}{6} \cdot bh\sqrt{b^2+h^2}$;	$PR = \frac{E\pi}{5400} \cdot bh(b^2+h^2) \cdot \frac{a}{L}$.

Für einen massiven Cylinder ist $d' = 0$ zu nehmen.

2. **Bruch- und Elasticitätsmodul** per 1 qcm Querschnitt.

	Bruchwert von s.	Elasticitätsmodul E.
Gußeisen	2400—3200 kg	900000 kg
Schmiedeisen . .	3600—4800	2000000
Stahl	5500—7500	2500000
Eichenholz . . .	300—350	120000

Beisp. 1. Um wie viel Grade verdreht sich eine schmiedeiserne cylindrische Welle von 10 cm Durchmesser und 5 m Länge, wenn sie am Umfang eines Zahnrades von 70 cm Halbmesser, das am einen Ende der Welle angebracht ist, eine Kraft von 1200 kg überträgt?

Aus der ersten Formel rechts erhält man als Drehwinkel für d' = o

$$a = \frac{14400\,PRL}{\pi^2 \,.\, Ed^4} = \frac{14400 \,.\, 1200 \,.\, 70 \,.\, 500}{3{,}14 \,.\, 3{,}14 \,.\, 2000000 \,.\, 10000} = 3{,}06^0.$$

Das eine Ende der Welle dreht sich mithin um 3,06 Grade, bevor das andere sich zu bewegen beginnt.

Beisp. 2. Wie groß wird die Spannung dieser Welle an der Oberfläche derselben?

Hier wird nach dem Werte von s gefragt. Es folgt aus der ersten Formel links für d' = o:

$$s = \frac{16\,PR}{\pi d^3} = \frac{16 \,.\, 1200 \,.\, 70}{3{,}14 \,.\, 1000} = 428 \text{ kg},$$

d. h. es wird eine Schicht von 1 qcm Querschnitt auf der Oberfläche der Welle verstreckt mit einer Kraft von 428 kg. Das Material dieser Welle, am Umfang derselben gedacht, ist daher auf cirka $^1/_{10}$ der Bruchfestigkeit in Anspruch genommen.

43. Zusammengesetzte Festigkeit.

Ein Körper werde auf zwei verschiedene Arten von Festigkeiten, z. B. auf absolute und Biegungsfestigkeit, auf Biegungs- und Torsionsfestigkeit ꝛc., zugleich in Anspruch genommen. Es seien s und $s_,$ die entsprechenden specifischen Spannungen des Materials in einem und demselben Querschnitt, so entsteht eine mittlere Spannung, welche die Resultante ist aus s und $s_,$.

Beisp. 1. Ein rechtwinkliger Balken sei am einen Ende eingemauert; am andern Ende wirken zwei Kräfte auf ihn: die eine in der Längenrichtung, welche ihn verstreckt, und die andere senkrecht zur Längenrichtung, welche ihn biegt. Die der ersten Kraft entsprechende Spannung sei per 1 qcm = 600 kg, diejenige größte Spannung, welche der Biegung entspricht und zwar auf der konvexen Seite an der Einmauerungsstelle = 800 kg, so ist an der Einmauerungsstelle:

größter Zug per 1 qcm = 600 + 800 = 1400 kg,
größter Druck „ = 600 − 800 = − 200 kg.

Beisp. 2. Ein Niet sei auf absolute Festigkeit und auf Schnittfestigkeit in Anspruch genommen. Die entsprechenden specifischen Span-

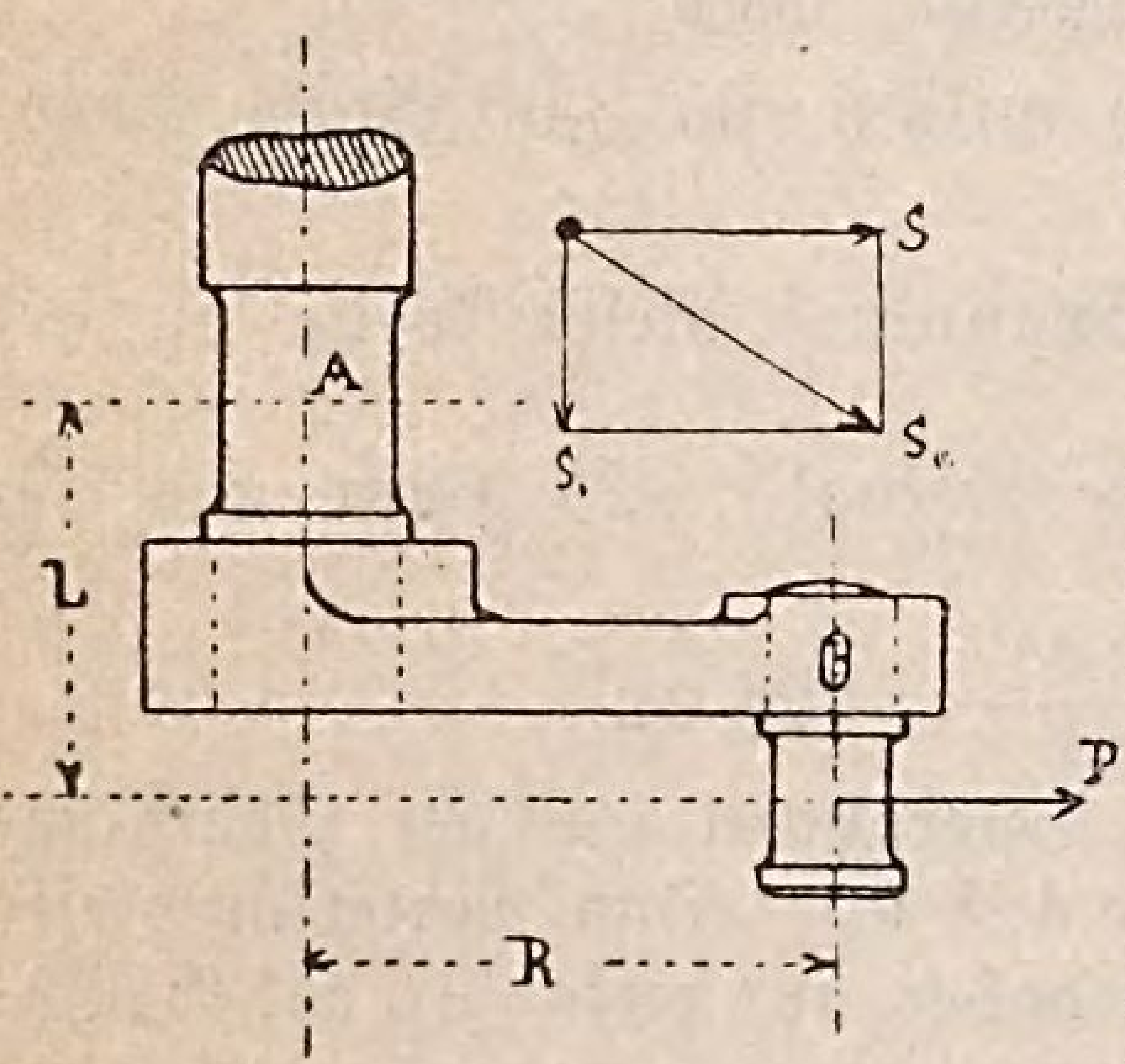
nungen seien 500 und 600 kg. Da diese Kräfte senkrecht auf einander stehen, so ist an jeder Stelle des Nietenquerschnittes:

$$\text{Resultierende Spannung } \sqrt{500^2 + 600^2} = 781 \text{ kg.}$$

Beisp. 3. Dreht sich die Kurbel einer Dampfmaschinenwelle, so wird diese durch den Dampfdruck, der auf den Kurbelzapfen wirkt, verdreht und zugleich verbogen. Wie ist der Durchmesser der Welle gegen beide Einwirkungen zu bestimmen?

Es seien: P der größte Dampfdruck, R die Kurbellänge, L der Abstand der Mitte des Kurbelzapfens von der Mitte des Lagerhalses (in der Wellenrichtung gemessen) und d der Durchmesser dieses Halses, so gelten für Biegung und Torsion die Gleichungen

$$(1)\quad PL = \frac{s\pi}{32} d^3; \quad PR = \frac{s_{,}\pi}{16} d^3;$$



hieraus folgt durch Division

$$(2)\qquad s : s_{,} = 2L : R.$$

Sind daher L und R bekannt, so erhält man das Verhältnis beider Spannungen zu einander. Die Resultante aus s und $s_{,}$ sei $s_{,,}$, so ist

$$(3)\qquad s_{,,}^2 = s^2 + s_{,}^2.$$

Man nehme P = 8000 kg; $s_{,,}$ = 500 kg; L = 30 cm; R = 35 cm; so wird nach (2)

$$s_{,} = s \cdot \frac{R}{2L} = s \cdot \frac{35}{60} = 0{,}583\ s$$

und nach (3)

$$500^2 = (0{,}583\ s)^2 + s^2; \qquad s = 432 \text{ kg}$$

folglich mittelst Gleichung (1)

$$d^3 = \frac{32\,PL}{\pi s} = \frac{32\ .\ 8000\ .\ 30}{3{,}14\ .\ 432} = 5662; \quad d = 17{,}8 \text{ cm.}$$

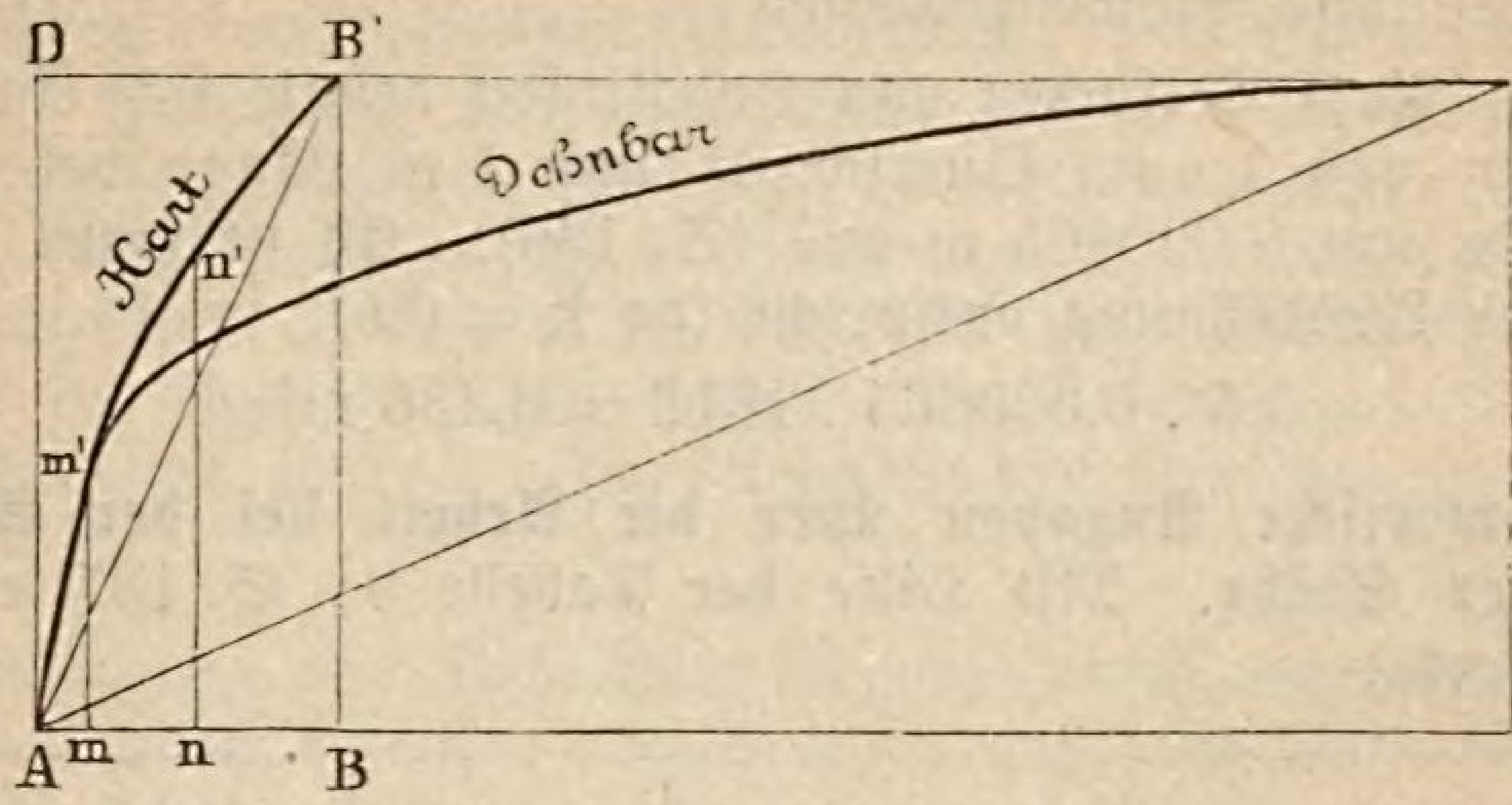
44. Arbeitsfestigkeit der Materialien.

Wirkt eine äußere Arbeitsgröße auf einen Körper ein, so entwickeln die Kohäsionskräfte, welche die kleinsten Teile des Körpers zusammenhalten, gewisse Arbeiten. Diese machen zusammen die Reaktionsarbeit aus, während die äußere Arbeit Aktionsarbeit genannt wird. Die Fähigkeit des Körpers, Reaktionsarbeit zu leisten, heißt Arbeitsvermögen oder Arbeitsfestigkeit.

1. **Arbeit zur Ausdehnung eines Körpers.** Ein prismatischer Stab werde ausgedehnt. Man trage die Verlängerungen als Abscissen Am, An, . ., die entsprechenden Widerstände als Ordinaten mm′, nn′, . . auf und verbinde die Punkte A, m′, n′, . . stetig mit

einander, so stellen die Flächen A m m′, A n n′, . . die Arbeiten vor, welche die Widerstände verrichten mußten, um diese Ausdehnungen anzunehmen.

Ist A B die Ausdehnung bis zum Bruche und B B′ der Widerstand beim Bruche, so ist die Fläche A B B′ m′ das Maß für das gesamte Arbeitsvermögen des Stabes.



Ist A m die Ausdehnung bis zur Grenze der Elasticität, so wird die Linie A m′ gerade, weil bis dahin die Kräfte zu den Ausdehnungen proportional bleiben. Ueber diese Grenze hinaus wachsen für Holz und Metalle die Ausdehnungen stärker als die Kräfte. Mithin wird die Kurve m′ n′ B′ ihre hohle Seite der Geraden A B zukehren und die Fläche A B B′ m′ zwischen dem eingeschriebenen Dreieck A B B′ und dem umschriebenen Rechteck A B B′ D liegen.

Man erkennt, daß das Arbeitsvermögen groß wird, wenn Festigkeit und Dehnbarkeit groß sind. Bei einer und derselben Materialgattung steigt der Wert des Materials mit dem Arbeitsvermögen; nach diesem wird daher auch die Qualität des Materials taxiert. Es seien

Δl die Ausdehnung des Stabes auf die Länge l,
F, V Querschnitt und Volumen des Stabes,
s die Spannung des Materials per Flächeneinheit,
k das Verhältnis zwischen der Fläche A B B′ m′ und ihrem umschriebenen Rechteck, so ist $An = \Delta l$, $nn' = Fs$; folglich für die Fläche A n n′

(1) $$\text{Arbeit} = k \,.\, \Delta l \,.\, Fs.$$

Diejenige Arbeit, welche die Volumeneinheit leistet, heißt Arbeitsmodul, auch spec. Arbeitsvermögen. Dividiert man (1) durch F und l, so erhält man

(2) $$\text{Arbeitsmodul} = k \frac{\Delta l}{l} s.$$

Das Gesetz (1) gilt ebenso für Verkürzung wie für Ausdehnung. Ist also ein Stab auf absolute oder absolut rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommen, so findet sich die Arbeitsgröße (2) in jeder Volumeneinheit vor. Daher für Zug und Druck im prismatischen Stabe

$$\text{Gesamtarbeit} = k \frac{\Delta l}{l} s \,.\, V.$$

Bis zur Grenze der Elasticität ist k = 0,5 und $\Delta l : l = s : E$, wo E den Modul der Elasticität bezeichnet. Daher für diese Grenze

$$(3) \qquad \text{Arbeitsmodul} = \frac{1}{2} \frac{s^2}{E}.$$

2. **Werte des Koefficienten k.** Diese Werte sind:
für elastische Materialien, wie Stahl, bis zum Bruche k = 0,55 bis 0,60,
für dehnbare Stoffe, wie weiches Eisen „ „ „ k = 0,65 „ 0,85.

Beisp. Nach Versuchen von Hodgkinson dehnte sich ein Stab von Schmiedeisen von 1 qcm Querschnitt und 1 m Länge bei einer Kraft von 1312 kg um 0,000665 m aus (S. 136). Es ist somit die Arbeit, welche dieser Ausdehnung entspricht (da k = 0,5),

$$0{,}5 \,.\, 0{,}000665 \,.\, 1312 = 0{,}436 \text{ mkg}.$$

3. **Numerische Angaben über die Arbeit bei der Ausdehnung prismatischer Stäbe.** Mit Hilfe der Tabelle 9, S. 137 ergeben sich folgende Werte:

	Faktor k.	Arbeit, enthalten in 100 Kubikcentimetern bis zur Elasticitätsgr.	bis zum Bruche.
		mkg	mkg
Eiche	0,55	0,19	1,3
Nadelholz	0,55	0,24	1,5
Leder	0,50	—	21
Gußeisen	0,65	0,16	10
Schmiedeisen, schwach dehnbar	0,70	0,55	63
„ mäßig dehnbar	0,75	0,52	324
„ stark dehnbar	0,80	0,50	720
Gußstahl, gehämmert	0,60	6,00	36
Gußstahlachsen von Krupp	0,60	—	630
Deltametall	0,80	2,58	598
Kanonenmetall	0,80	0,06	276

Bis zur Grenze der Elasticität ist Gußstahl, bis zum Bruche dagegen das dehnbare Schmiedeisen das beste Material. Dieses dehnbare Schmiedeisen hat ein 64mal größeres Arbeitsvermögen als das Gußeisen und ein 20mal größeres als der gehämmerte Gußstahl.

4. **Arbeit beim Biegen und Verdrehen.** Bei diesen Vorgängen verteilt sich die Arbeit ungleichförmig über die Masse des Stabes. Es sei

P die Kraft, welche die äußere Arbeit verrichtet, beim verbogenen Stab senkrecht zur Längenrichtung, beim verdrehten in der Richtung der Drehung, P proportional zur größten Spannung s gedacht,
u der Weg, welchen der Angriffspunkt von P beschreibt,

so wird, unter Beibehaltung der übrigen Bezeichnung,

$$\text{Arbeit zum Biegen und Verdrehen} = k P u,$$

oder indem man die Werte von P und u einführt, innerhalb der Elasticitätsgrenze

$$\text{Arbeit zum Biegen einfacher Formen} = \frac{1}{9}\, k\, \frac{s^2}{E}\, V,$$

$$\text{Arbeit zum Verdrehen eines Cylinders} = \frac{5}{4}\, k\, \frac{s^2}{E}\, V.$$

5. **Langsame und plötzliche Einwirkung.** Das Bisherige gilt nur, wenn sich die Spannung über den Körper so verteilen kann, wie dies bei Ableitung der statischen Formeln vorausgesetzt wird. Erfolgt die Einwirkung schnell und heftig, in Form von Schlägen, Stößen 2c., so bricht der getroffene Teil, oder es entstehen lokale Beschädigungen oder Vibrationen der kleinsten Teile, welche den Molekularzustand in kurzer Zeit umbilden und lockern. Im folgenden sind langsame Einwirkungen vorausgesetzt.

6. **Schwächung des Arbeitsvermögens durch Spannungswechsel.** Wird ein Stab durch eine Kraft ausgedehnt und läßt diese Kraft sodann nach, so zieht sich der Stab wieder zusammen, jedoch nicht bis auf die ursprüngliche Länge. Würde die ursprüngliche Länge wieder hergestellt, d. h. wäre der Stab vollkommen elastisch, so gäben die Molekularkräfte bei Wiederherstellung der Form die gleiche Arbeit ab, welche vorher auf sie verwendet wurde. Allein wegen der unvollkommenen Elasticität wird die Arbeit der Molekularkräfte während der zweiten Periode kleiner als während der ersten. Mithin hat der Stab durch diesen Vorgang einen, wenn auch kleinen, Teil des Arbeitsvermögens verloren. Dieser Teil ist verhältnismäßig groß, wenn die Spannung die Grenze der Elasticität überschreitet und äußerst klein innerhalb dieser Grenze. Allein es entsteht im letztern Fall doch ein Verlust, selbst wenn eine äußere permanente Formänderung nicht bemerkbar ist. Durch das fortwährende Arbeiten gehen nämlich Aenderungen im Innern vor sich, welche eine neue Lagerung der kleinsten Teile herbeiführen und so das Arbeitsvermögen schwächen, bis zuletzt der Stab bei mäßiger Anspannung bricht.

Ein prismatischer Stab mache regelmäßig wiederkehrende Spannungswechsel durch; die Spannung steige von s_1 auf s und sinke wieder auf s_1. Ferner sei

a der Arbeitsverlust, veranlaßt durch den ersten Spannungswechsel in der Zeiteinheit,

A der Arbeitsverlust, herbeigeführt durch n Spannungswechsel, wovon jeder eine Zeit t dauert,

so ist nach Formel (3) $\frac{1}{2}\frac{s^2}{E} - \frac{1}{2}\frac{s_1^2}{E}$ die auf den Stab in der Zeiteinheit verwendete äußere Arbeit. Davon geht beim ersten Wechsel der Betrag

$$a = \frac{b}{2}\,\frac{s^2 - s_1^2}{E} \tag{4}$$

verloren, wo b eine sehr kleine konstante Größe bezeichnet.

Man mache nun Versuche mit derselben Spannung, wovon die erste z. B. 1 Sekunde, die zweite 1 Stunde, die dritte 1 Jahr dauert, so wird a im ersten Fall klein, im zweiten größer, im dritten noch größer ausfallen. Der Arbeitsverlust wächst daher mit der Zeit t, doch nur für kleine Zeiten proportional mit t, für größere Zeiten jedoch langsamer. Wir nehmen an, proportional mit f(t). Daher geht für die Zeit t der Ausdruck (4) über in

$$\frac{b}{2} \frac{s^2 - s_1^2}{E} f(t).$$

Nimmt man an, die auf einander folgenden Spannungswechsel verursachen je gleiche Arbeitsverluste, so erhält man für n Wechsel

$$A = \frac{b}{2} n \frac{s^2 - s_1^2}{E} f(t).$$

Es ist nun f(t) ein Ausdruck, der durch Versuche zu ermitteln ist. Für Schmiedeisen und Stahl kann man annehmen $f(t) = \log n (1 + t)$. Verwandelt man diese natürlichen Logarithmen in briggische, so wird $f(t) = 2{,}303 \log (1 + t)$.

Die Zeiteinheit kann sein 1 Sekunde, 1 Minute, 1 Stunde 2c. Wir nehmen als solche eine Stunde an, so erhält man für Schmiedeisen $\frac{1}{2} b = 0{,}0022$. Daher wird die letzte Gleichung

$$(5) \qquad A = 0{,}0022\, n \frac{s^2 - s_1^2}{E} \log (1 + t).$$

Beisp. 1. Eine hydraulische Presse, welche zum Pressen von Papier verwendet werde, arbeite 10 Jahre und mache täglich 30 Spannungen durch; diese steigen von 0 bis 700 kg und verbleiben auf diesem Betrage 5 Minuten lang. Wie viel vom Arbeitsvermögen der vier schmiedeisernen Stangen wird verbraucht, wenn das Jahr zu 300 Arbeitstagen angenommen wird?

Es ist $s_1 = 0$; $s = 700$; $t = {}^5/_{60}$; $\log (1 + t) = 0{,}03476$; $E = 1800000$; $n = 10 \,.\, 300 \,.\, 30 = 90000$; folglich nach (5)

$$A = 0{,}0022 \cdot 90000 \cdot \frac{490000}{1800000} \cdot 0{,}03476 = 1{,}88 \text{ mkg}.$$

Das Material muß also pro Cubikcentimeter etwas mehr als 1,88 mkg Arbeit aushalten können, wenn es nicht schon vor der angegebenen Zeit brechen soll.

Beisp. 2. Eine cyl. Welle von Schmiedeisen drehe sich vormittags und nachmittags während je 6 Stunden und erhalte eine konstante Spannung von 300 kg. Wie lange kann sie arbeiten, wenn ihr Arbeitsvermögen 3 mkg beträgt?

Die Welle macht täglich zwei Spannungswechsel durch, welche je 6 Stunden dauern, so daß $t = 6$ und $\log (1 + t) = 0{,}8451$ wird. Nimmt man noch $s_1 = 0$; $s = 300$ und $A = 3$ an, so wird nach (5)

$$3 = 0{,}0022\, n \cdot \frac{90000}{1800000} \cdot 0{,}8451; \qquad n = 32270.$$

Daher Anzahl Tage, welche die Welle anhält 32270 : 2 = 16135;
und Anzahl Jahre (zu 300 Tagen) . . . 16135 : 300 = 53,8.

Beisp. 3. Eine liegende Achse von Schmiedeisen mache eine Drehung in 1 Sekunde. Sie werde durch eine Last gebogen und zugleich verdreht. Die größte Biegungsspannung betrage 200, die Torsionsspannung 220 kg. Die Welle arbeite vormittags 5,5 und nachmittags 5,5 Stunden und ruhe mittags 1,5 Stunden, also nachts 11,5 Stunden. Wie lange hält sie aus bei 4,5 mkg Arbeitsvermögen?

Die Achse wird auf der untern konvexen Seite verstreckt, auf der obern konkaven verkürzt. Unten und oben machen sich daher zwei Spannungen geltend, 200 kg in der Längenrichtung und 220 kg in der Querrichtung, was eine resultierende Spannung $\sqrt{200^2 + 220^2} = 300$ kg gibt. Macht die Welle eine Viertelsdrehung, so nimmt die Spannung der tiefsten Stelle von 300 auf 220 ab, steigt dann während der zweiten Viertelsdrehung von 220 auf 300, nimmt von da während des dritten Viertels ab von 300 auf 220 und steigt wieder während des letzten Viertels auf 300 kg. In Gl. (5) ist daher $s = 300$ und $s_1 = 220$. Während die Achse still steht, hört die Torsionsspannung auf und es verbleibt nur die Biegungsspannung. So entsteht während der Mittagsstunde ein Spannungswechsel von 1,5 Stunden Dauer, über Nacht ein solcher von 11,5 Stunden. Im Jahr arbeite die Achse 300 Tage; also bleibt sie 65 Tage abgestellt und macht daher ebenso viele Wechsel mit der Spannung 220 kg durch. Wie viel Arbeitsvermögen wird nun per Jahr verbraucht?

a) Während der Bewegung. Da bei jeder Drehung der Achse 2 Spannungswechsel entstehen, so ist $t = 0,5 : 3600 = 0,0001388$ Stunden und $\log(1 + t) = 0,00006$. Ferner dreht sich die Welle in der Stunde 3600mal, also im Jahr $n = 2 . 3600 . 11 . 300$mal und da

$$s^2 - s_1^2 = 300^2 - 220^2 = 41600,$$

so wird nach (5) an Arbeitsvermögen aufgezehrt

$$A_1 = 0,0022 \cdot 2 \cdot 3600 \cdot 11 \cdot 300 \cdot \frac{41600}{1800000} \cdot 0,00006 = 0,0755.$$

b) Ueber Mittag. Es ist $t = 1,5$; $\log(1 + t) = 0,3979$ und da die Biegungsspannung = 200 und $n = 300$, so wird der Arbeitsverlust

$$A_2 = 0,0022 \cdot 300 \cdot \frac{40000}{1800000} \cdot 0,3979 = 0,0058.$$

c) Ueber Nacht. Es ist $t = 11,5$; $\log(1 + t) = 1,0607$; Biegungsspannung und Anzahl Wechsel wie unter (b); folglich

$$A_3 = 0,0022 \cdot 300 \cdot \frac{40000}{1800000} \cdot 1,0607 = 0,0156.$$

d) Während 65 Tagen. Je ein Wechsel dauert 24 Stunden; daher $t = 24$; $\log(1 + t) = 1,4$; $n = 65$ und Spannung 200; folglich

$$A_4 = 0,0022 \cdot 65 \cdot \frac{40000}{1800000} \cdot 1,4 = 0,0044.$$

Die Summe der drei letzten Verluste ist = 0,0258.

Diese Summe muß als Maximalwert aufgefaßt werden, indem vorausgesetzt ist, daß immer eine und dieselbe Stelle auf der Oberfläche

der Achse die größte Druck- oder Zugsspannung auszuhalten habe. Es läßt sich aber auch denken, daß diese Stellen in gleichem Querschnitt gleichförmig mit einander abwechseln. In diesem Falle leidet die Achse am wenigsten. Es verhält sich nun der minimale Arbeitsverbrauch zum maximalen wie $2^2 : \pi^2$ oder wie 4 : 9,87. Der minimale Verbrauch ist daher 4 . 0,0258 : 9,87 = 0,0104. Der wahrscheinlichste Wert aber ist das Mittel aus Maximum und Minimum, beträgt daher

$$\frac{0,0258 + 0,0104}{2} = 0,0181.$$

Es verhält sich mithin der Arbeitsverbrauch während des Stillstandes zu dem während der Bewegung wie 181 : 755 oder wie 24 : 100.

Die Summe beider Arbeitsverluste pro Jahr ist = 0,0936 mkg. Da nun das Arbeitsvermögen der Achse 4,5 mkg beträgt, so ist die Dauer der Achse höchstens

$$4,5 : 0,0936 = 48,1 \text{ Jahre.}$$

Aus diesem Beispiel erkennt man, daß der Einfluß des belasteten Zustandes während des Stillstandes sehr groß sein muß bei Lokomotivachsen, Wagenfedern, Drahtseilen (die zur Kraftübertragung dienen) 2c.

Beisp. 4. Wöhler machte Dauerversuche mit Stäben von Eisen und Stahl. Einer der Stäbe war aus einer schmiedeisernen Lokomotivachse (der Gesellschaft Phönix von 1857) kalt ausgeschnitten. Der Stab wurde in der Festigkeitsmaschine belastet und kontinuierlich gedreht; er machte also bei jeder Drehung zwei Spannungswechsel durch und zwar bei den Grenzspannungen $s_1 = o$ und $s = 1316$ kg und hielt 19,2 Millionen Drehungen, also 38,4 Millionen Wechsel aus, bis er brach. Das Arbeitsvermögen betrug 5,6 mkg; der Stab machte cirka 60 Umdrehungen in der Minute. Wie lange hätte er aushalten sollen nach dem Gesetze (5)?

Es ist t = 0,5 : 3600; log (1 + t) = 0,000051. Daher nach (5)

$$5,6 = 0,0022\, n \cdot \frac{1316 \,.\, 1316}{1\,800\,000} \cdot 0,000051;\; n = 45\,200\,000.$$

Der Stab hätte daher 45 statt 38 Millionen Spannungswechsel aushalten sollen.

Konstruktionslehre.

45. Seile und Ketten.

1. **Hanfseile.** Sie bestehen aus drei bis vier Litzen, die aus einzelnen Schnüren oder Fäden zusammengesetzt sind. Die Drehung der Schnüre zu Litzen ist entgegengesetzt derjenigen der Litzen. Zu stärkern Tauen werden Seile zusammengedreht. Die Festigkeit wird berechnet nach der Formel P = Fs. Für eine Belastung s = 127 kg per 1 qcm Querschnitt erhält man daher

$$P = 100 d^2.$$

d Durchmesser und P Belastung. Daraus folgt:

Durchm.	Last.	Durchm.	Last.	Durchm.	Last.	Durchm.	Last.
cm	kg	cm	kg	cm	kg	cm	kg
0,5	25	1,8	324	3,6	1296	5,4	2916
0,6	36	2,0	400	3,8	1444	5,6	3136
0,7	49	2,2	484	4,0	1600	5,8	3364
0,8	64	2,4	576	4,2	1764	6,0	3600
0,9	81	2,6	676	4,4	1936	6,2	3844
1,0	100	2,8	784	4,6	2116	6,4	4096
1,2	144	3,0	900	4,8	2304	6,6	4356
1,4	196	3,2	1024	5,0	2500	6,8	4624
1,6	256	3,4	1156	5,2	2704	7,0	4900

2. **Drahtseile.** Die Litzen entstehen durch Zusammendrehen von 3 bis 6 gleich starken Drähten um eine Hanfseele herum; durch das Zusammendrehen von 4 bis 8 Litzen werden die Drahtseile gebildet. Die Drehung ist nötig, wenn sich das Seil über eine Trommel, Welle ꝛc. zu legen hat, weil nur so eine gleichmäßige Spannung der einzelnen Drähte erzielt wird. Hierbei erhalten die Drähte in den Litzen eine Ablenkung von der Längenrichtung von 8 bis 15° und die Litzen in den Seilen eine solche nach entgegengesetzter Richtung von 10 bis 25°. Dagegen ist entweder gar keine oder nur eine schwache Drehung nötig, wenn das Seil keine solche Krümmungen zu machen hat.

Die Drehung schwächt die Tragkraft des Seiles etwas wegen der Ablenkung zur Achsenrichtung und der Biegung der Drähte.

Die Belastung der Drahtseile, welche keine Spannungswechsel auszuhalten haben, nimmt man höchstens 1400 kg per 1 qcm an.

Beisp. Wenn die Dicke des Drahtes 0,3 cm und die Anzahl der Drähte = 36 ist, wie stark kann das Seil gespannt werden, wenn die Belastung der Drähte per 1 qcm Querschnitt 1200 kg betragen soll?

Querschnitt aller Drähte . . . . 36 . 0,0707 = 2,54 qcm,
Belastung bei 1200 kg per Quadratcentimeter 1200 . 2,54 = 3048 kg.

3. **Ketten.** Wird die Kette gespannt, so verlängert sich dieselbe, allein nicht nur wegen der Ausdehnung des Eisens, sondern weil jedes Glied eine gestrecktere Form annimmt. Dieses Verstrecken beruht auf einer Aenderung in den Biegungsverhältnissen. Nimmt man auf diese letztern keine Rücksicht, so kann man sich die Kette aus zwei parallel laufenden runden Stäben von gleichem Durchmesser bestehend denken. In der Formel P = Fs bezeichnet alsdann F den Querschnitt beider Stäbe.

Nimmt man die zulässige Spannung s per 1 qcm an für Ketten ohne Stege zu 700 kg, für solche mit Stegen zu 850 kg, so erhält man folgende Tabelle:

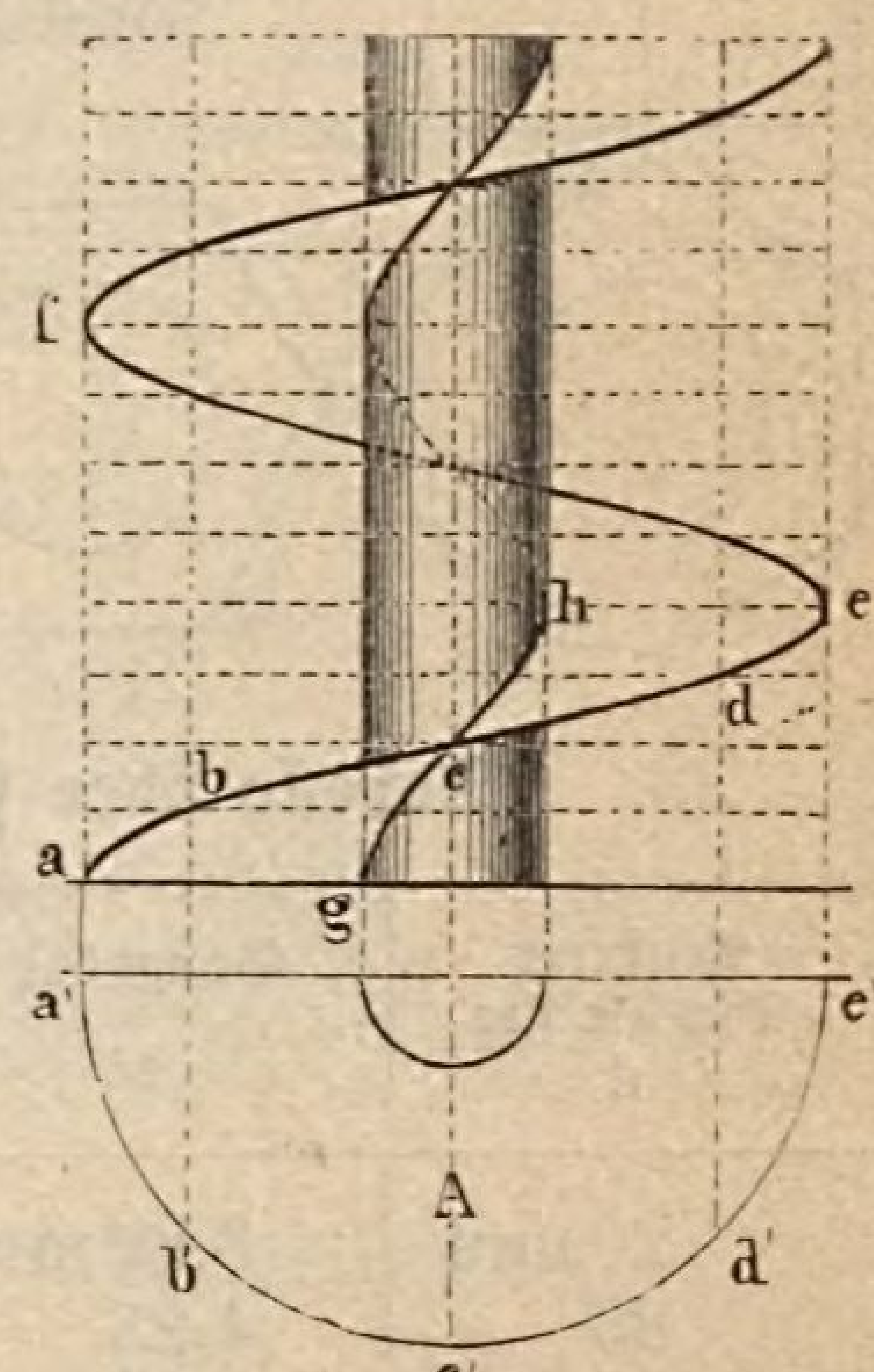
Ketten ohne Stege.			Ketten mit Stegen.		
Durchmesser.	Festigkeit.	Gewicht von 1 m Länge.	Durchmesser.	Festigkeit.	Gewicht von 1 m Länge.
0,4 cm	176 kg	0,35 kg	1,6 cm	3418 kg	6,14 kg
0,5	275	0,55	1,7	3858	6,94
0,6	396	0,79	1,8	4325	7,78
0,7	539	1,08	1,9	4819	8,66
0,8	704	1,41	2,0	5340	9;60
0,9	891	1,78	2,1	5887	10,58
1,0	1100	2,20	2,2	6461	11,62
1,1	1331	2,66	2,3	7062	12,70
1,2	1584	3,17	2,4	7690	13,82
1,3	1859	3,72	2,5	8344	15,00
1,4	2156	4,31	2,6	9025	16,22
1,5	2475	4,95	2,7	9722	17,50
1,6	2816	5,63	2,8	10466	18,81
1,7	3278	6,55	2,9	11227	20,18
1,8	3564	7,13	3,0	12015	21,60
1,9	3971	7,94	3,2	13670	24,58
2,0	4400	8,80	3,4	15432	27,74
2,1	4851	9,72	3,6	17300	31,12

46. Eiserne Schrauben.

Die Schrauben werden verwendet, um Teile zusammenzuhalten, jedoch mit loser Verbindung, die gehoben werden kann, ohne das Ver-

bindungsmittel zu schädigen, wie dies z. B. bei den Nieten der Fall ist; ferner zum Zusammendrücken wie bei den Pressen; zum Stellen und Richten, zum Uebertragen einer drehenden Bewegung in eine fortschreitende u. s. w. Je nach dem Zwecke wird das Gewinde ein scharfes (dreikantiges) oder ein flaches (vierkantiges), ein eingängiges oder mehrgängiges.

1. **Schraubenlinie und Schraubenfläche.** Bewegt sich ein Punkt auf einem Cylindermantel so, daß er sich gleichförmig um den Cylinder herumdreht und gleichförmig parallel zur Achse fortschreitet, so beschreibt er eine gewöhnliche Schraubenlinie. Gelangt der bewegliche Punkt, während er sich um den Cylinder herumdreht, nach und nach an die gleich weit aus einander gelegenen Mantellinien a′, b′, c′, . . ., so muß er parallel zur Achse die entsprechenden Punkte a, b, c, . . ., die um gleich viel ansteigen, erreichen. Eine Windung a e f heißt Schraubengang und der Abstand a f desselben Höhe eines Ganges. Teilt man daher den Grundkreis A in acht gleiche Teile, so ist der Punkt b um $^1/_8$, c um $^2/_8$, d um $^3/_8$, e um $^4/_8$ der Ganghöhe höher gelegen als a.



Schneidet eine gerade Linie senkrecht oder schief die Achse eines Cylinders und bewegt sie sich dabei so, daß sie sich um die Achse dreht und zugleich längs der Achse fortschreitet, so beschreibt sie eine Schraubenfläche. Die drei- und vierkantigen Gewinde der gewöhnlichen Schrauben (Spindel und Mutter) erhalten solche Schraubenflächen.

Eine Schraubenfläche für ein flaches Gewinde ist in vorstehender Figur dargestellt. Die äußere Begrenzung bildet die Schraubenlinie a e f, die innere die Schraubenlinie g e h.

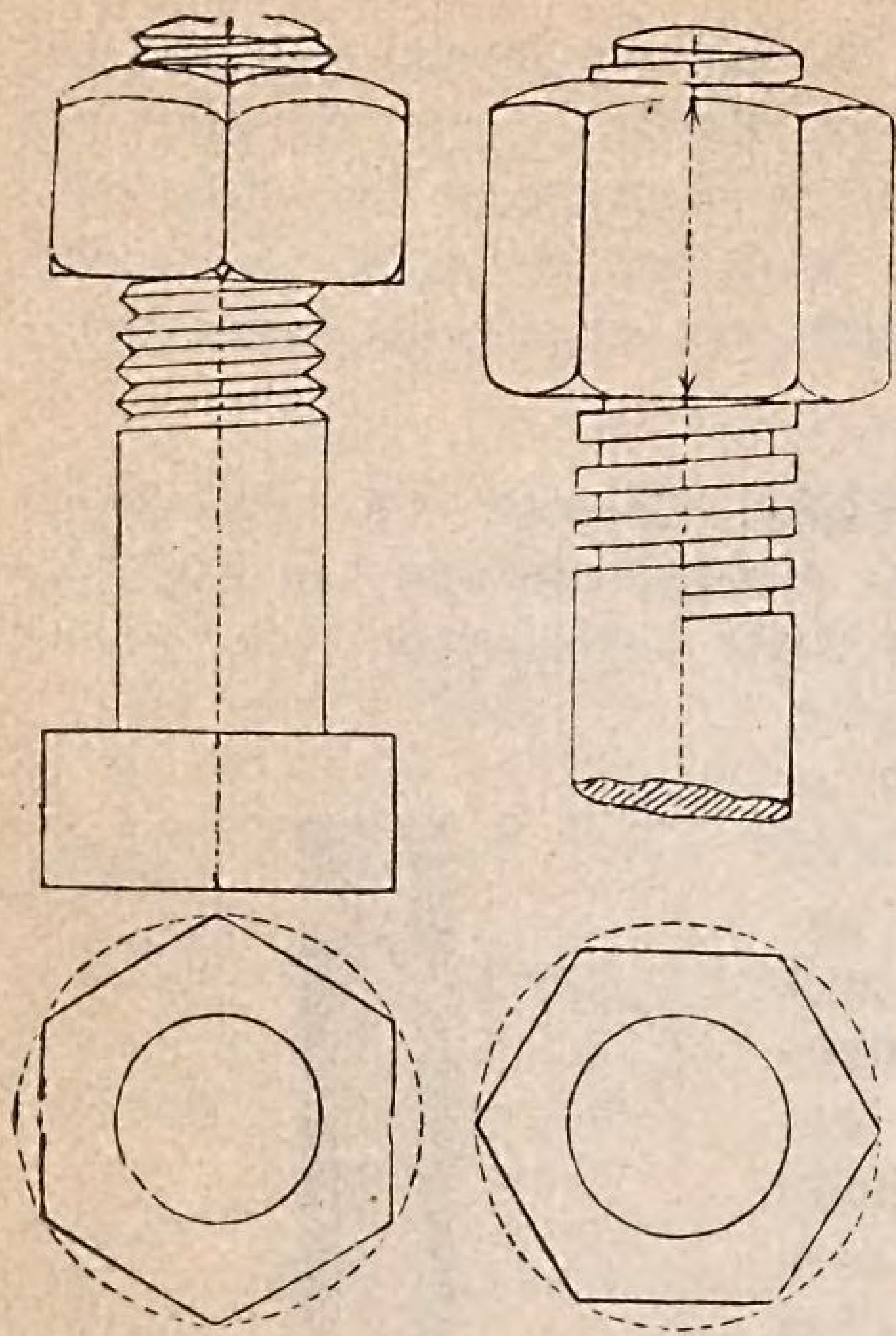
2. **Bezeichnung.** Im folgenden seien

d, d_1 äußerer und innerer Durchmesser der Spindel,
e, t Höhe und Tiefe des Ganges beim eingängigen Gewinde und
P Zug oder Druck längs der Spindel.

3. **Flaches Gewinde.** Die Ganghöhe e zerfällt in zwei gleiche Teile, die Tiefe ist sehr annähernd die Hälfte von e. Armengaud nimmt für Centimeter

$$e = 0{,}2 + 0{,}09\,d; \quad t = \frac{9}{19}\,e.$$

Die Gewindteile bilden Körper, welche am Fuße festgehalten und in einem Abstand $0{,}5\,t = 0{,}25\,e$ in der Richtung der Spindel durch die Kraft P gebogen werden. Damit sie ebenso viel Festigkeit dar-



bieten wie die Spindel, bedürfe es einer Anzahl n von Gewinden. In der Formel (S. 154)

$$P = \frac{s}{6} \cdot \frac{b\,h^2}{L}$$

über die Biegungsfestigkeit eines solchen Körpers ist daher zu nehmen: $b = d_1 \pi n$, $h = 0{,}5\,e$ und $L = 0{,}25\,e$; daher wird die Festigkeit der Gewinde

$$P = \frac{s}{6} \cdot d_1 \pi n e.$$

Setzt man diesen Wert gleich der Zugfestigkeit $\frac{d_1^2 \pi}{4} s_1$ der Spindel, so folgt, wenn die Festigkeitskoefficienten s und s_1 als gleich angenommen werden:

$$n e = \frac{3}{2} d_1.$$

Allein dieser Wert n e ist nichts anderes als die Höhe der Schraubenmutter.

Tabelle über flache Gewinde, nach Armengaud.

Aeußerer Durchmesser d	Ganghöhe e	Gangtiefe t	Höhe der Mutter.	Zulässiger Zug P
20 mm	3,80 mm	1,80 mm	45,6 mm	324 kg
25	4,25	2,02	51,0	506
30	4,70	2,23	56,4	729
35	5,15	2,45	61,8	992
40	5,60	2,66	67,2	1296
45	6,05	2,87	72,6	1640
50	6,50	3,19	78,0	2025
55	6,95	3,30	83,4	2450
60	7,40	3,51	88,8	2916
65	7,85	3,73	94,2	3422
70	8,30	3,94	99,6	3969
75	8,75	4,16	105,0	4556
80	9,20	4,37	110,4	5184
85	9,65	4,58	115,8	5852
90	10,10	4,80	121,2	6561
95	10,55	5,01	126,6	7300
100	11,00	5,22	132,0	8100
105	11,45	5,44	137,4	8930
110	11,90	5,65	142,8	9801
115	12,35	5,87	148,2	10712
120	12,80	6,08	158,6	11664

Die Belastung P einer Schraube soll nach Armengaud und Redtenbacher sein

$$P = 0{,}81\ d^2, \text{ woraus } d = \frac{10}{9}\sqrt{P},$$

was einer Beanspruchung von annähernd 130 kg per 1 qcm Querschnitt entspricht.

4. **Dreikantiges Gewinde.** Ueber Form und Einteilung bestehen eine Menge Systeme. Am meisten verbreitet sind die von Whitworth, Sellers, Bodmer, Armengaud u. a.

a) Whitworth-System. Die Form der Gewinde zeigt folgender Schnitt Fig. 1. Es ist der Einschnitt ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Winkel von 55° an der Spitze B. Man ziehe BD senkrecht auf AC, so wird BD zur ideellen Tiefe des Gewindes, während die wirkliche t nur $^2/_3$ von jener ist. Da $BD = DC \operatorname{cotg} 27\frac{1}{2}{}^0$, so wird $BD = \frac{1}{2}e \,.\, 1{,}92 = 0{,}96\,e$ und daher

$$t = 0{,}64\,e; \quad d_1 = d - 1{,}28\,e.$$

Fig. 1.

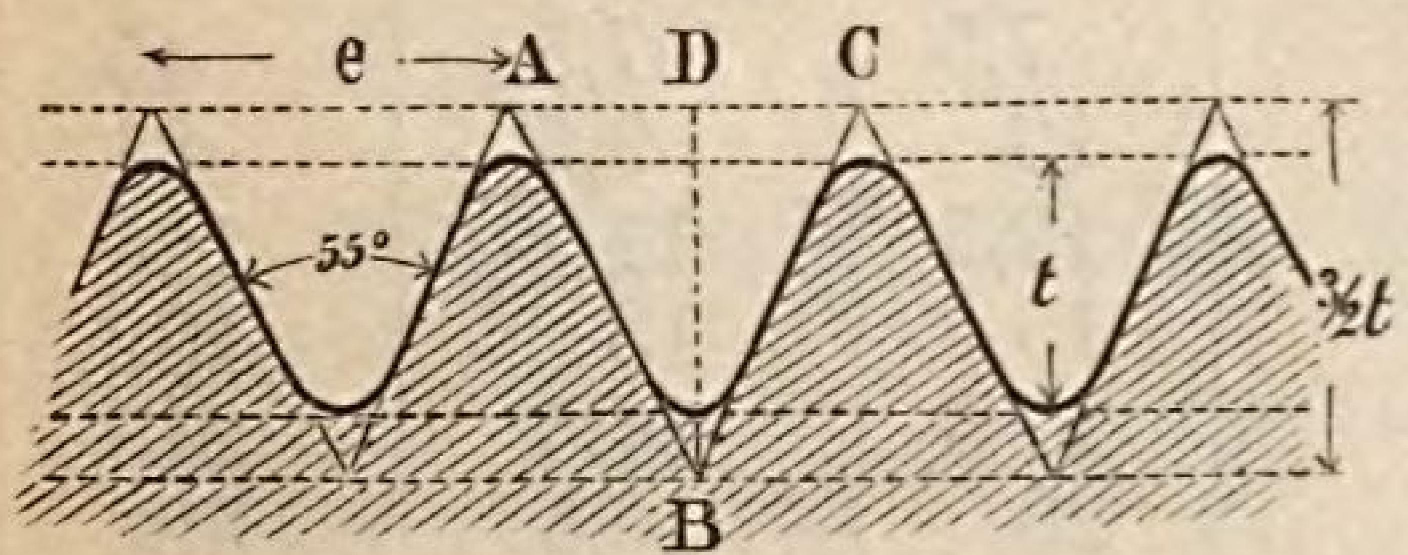


Fig. 2.

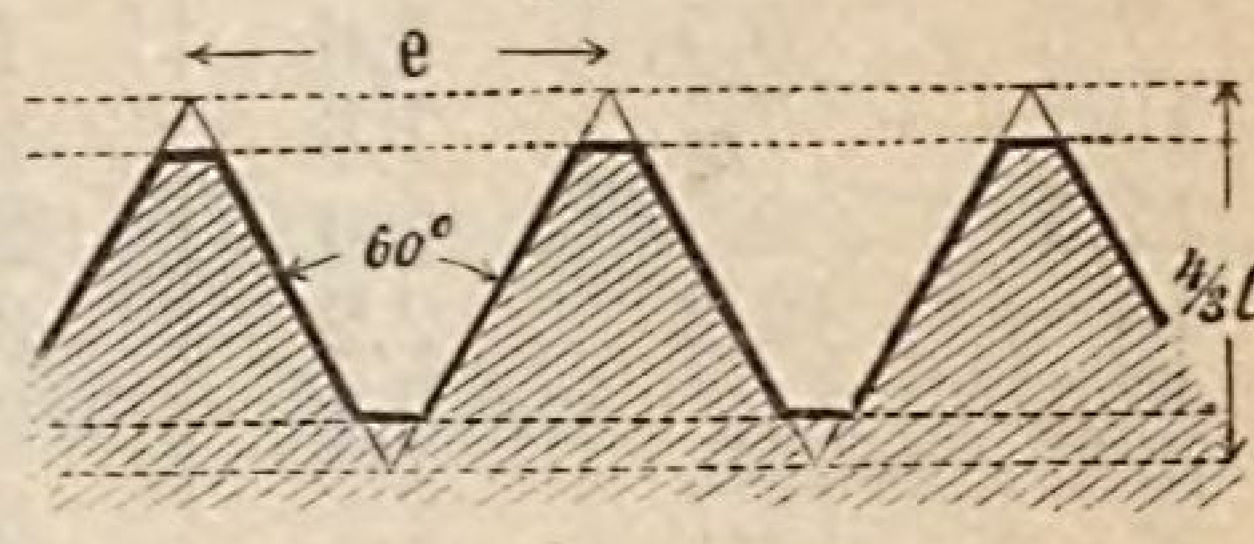


Tabelle über dreikantige Gewinde, nach Whitworth.

Nr. des Gewindes.	Dicke der Schraube. Engl. Zolle.	Dicke der Schraube. Milli-meter.	Anzahl der Gewinde auf 1 engl. Zoll Länge.	Anzahl der Gewinde auf eine Länge gleich der Spindeldicke.	Nr. des Gewindes.	Dicke der Schraube. Engl. Zolle.	Dicke der Schraube. Milli-meter.	Anzahl der Gewinde auf 1 engl. Zoll Länge.	Anzahl der Gewinde auf eine Länge gleich der Spindeldicke.
1	$^1/_4$	6,35	20	5	15	$1^3/_4$	44,45	5	$8^3/_4$
2	$^5/_{16}$	7,93	18	$5^5/_8$	16	$1^7/_8$	47,62	$4^1/_2$	$8^7/_{16}$
3	$^3/_8$	9,52	16	6	17	2	50,82	$4^1/_2$	9
4	$^7/_{16}$	11,11	14	$6^1/_8$	18	$2^1/_4$	57,17	4	9
5	$^1/_2$	12,70	12	6	19	$2^1/_2$	63,52	4	10
6	$^5/_8$	15,87	11	$6^7/_8$	20	$2^3/_4$	69,87	$3^1/_2$	$9^5/_8$
7	$^3/_4$	19,04	10	$7^1/_2$	21	3	76,20	$3^1/_2$	$10^1/_2$
8	$^7/_8$	22,22	9	$7^7/_8$	22	$3^1/_4$	82,55	$3^1/_4$	$10^9/_{16}$
9	1	25,40	8	8	23	$3^1/_2$	88,90	$3^1/_4$	$11^3/_8$
10	$1^1/_8$	28,57	7	$7^7/_8$	24	$3^3/_4$	95,25	3	$11^1/_4$
11	$1^1/_4$	31,75	7	$8^3/_4$	25	4	101,60	3	12
12	$1^3/_8$	34,92	6	$8^1/_4$	26	$4^1/_4$	107,95	$2^7/_8$	$12^7/_{32}$
13	$1^1/_2$	38,10	6	9	27	$4^1/_2$	114,30	$2^7/_8$	$12^{15}/_{16}$
14	$1^5/_8$	41,27	5	$8^1/_8$	28	$4^3/_4$	120,65	$2^3/_4$	$13^1/_{16}$

b) System Sellers. Der amerikanische Werkzeugfabrikant Sellers nahm, wie Fig. 2 auf S. 177 zeigt, als Grundform der Gewinddurchschnitte ein gleichseitiges Dreieck, stumpfte dasselbe geradlinig ab, so daß die wirkliche Tiefe $^3/_4$ der ideellen wird. Daher

$$t = 0{,}65\,e; \quad d_1 = d - 1{,}3\,e.$$

Der Zusammenhang zwischen Ganghöhe und Spindeldurchmesser ist für Millimeter gegeben durch die Formel

$$e = 1{,}208 \sqrt{16 + d} - 4{,}43.$$

c) System Armengaud. Dasselbe ist behandelt in der „Publication industrielle“ von 1857. Er gibt dafür folgende Tabelle an:

Aeußerer Durchm.	Innerer Durchm.	Ganghöhe.	Aeußerer Durchm. der 6seitigen Mutter.	Höhe der Mutter.	Kopfhöhe der Schrauben.	Zulässiger Zug.
mm	mm	mm	mm	mm	mm	kg
5	3,2	1,4	13,7	5	6	20
7,5	5,5	1,6	17	7,5	7,5	45
10	7,7	1,8	22	10	9,5	81
12,5	9,9	2,0	26	12,5	11	126
15	12,2	2,2	30	15	13	182
17,5	14,5	2,4	35	17,5	14,5	248
20	16,7	2,6	38	20	16,5	324
22,5	19,1	2,8	42	22,5	18	410
25	21,2	3,0	46	25	20	506
30	25,7	3,4	54	30	23,5	729
35	30,2	3,8	62	35	27	992
40	34,7	4,2	70	40	30,5	1296
45	39,2	4,6	78	45	34	1640
50	43,7	5,0	86	50	37,5	2025
55	48,1	5,4	94	55	41	2450
60	52,4	5,8	102	60	44,5	2916
65	56,8	6,2	110	65	48	3422
70	61,1	6,6	118	70	51,5	3969
75	65,5	7,0	126	75	55	4556
80	69,9	7,4	134	80	58,5	5184
85	74,4	7,8	142	85	62	5852

Die Ganghöhe ist berechnet nach der Formel $e = 1 + 0{,}08\,d$, die sehr einfach ist, allein für Durchmesser von 10 mm an abwärts zu große Ganghöhen liefert. Er nimmt nach Whitworth die Tiefe $= 0{,}64\,e$ an, legt jedoch ein scharfes Dreieck zu Grunde, während Whitworth die Gewinde stark abrundet. Dadurch erhält Armengaud einen Gewindewinkel von 76°, wodurch die Reibung der Spindel in der Mutter sehr vermehrt wird.

d) System Bodmer. Die Durchmesser schreiten in bequemen Intervallen vor, wie folgende Zusammenstellung zeigt.

Durchmesser der Bohrer.	Anzahl Schraubengänge auf 25 mm Länge.	Durchmesser der Bohrer.	Anzahl Schraubengänge auf 25 mm Länge.	Durchmesser der Bohrer.	Anzahl Schraubengänge auf 25 mm Länge.
3 mm	50	9 mm	20	22 mm	10
3,5	50	10	20	24	9
4	50	11	20	26	9
4,5	50	12	17	28	8
5	30	13	17	30	8
5,5	30	14	14,5	32	7
6	30	15	14,5	34	7
6,5	25	16	12,5	38	6
7	25	18	12,5	42	6
8	25	20	10	46	5
				50	5

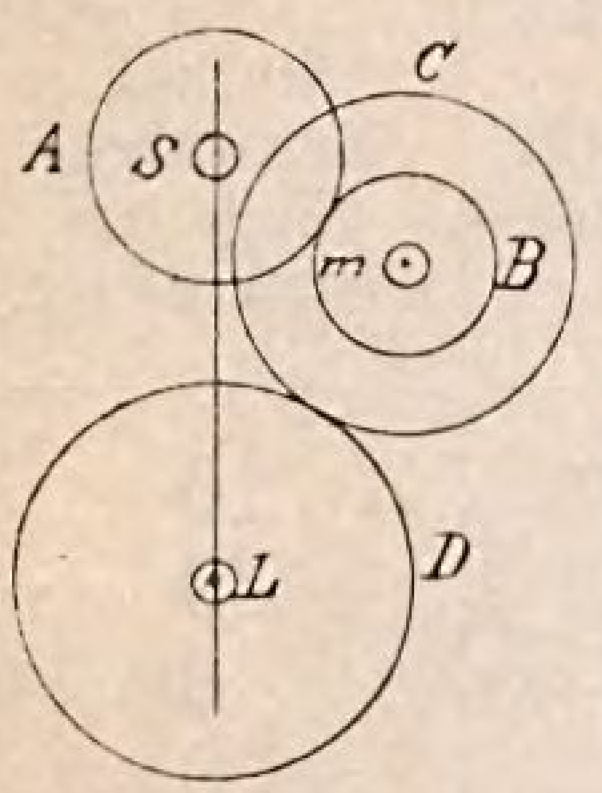
5. **Schlüsselweite, Höhe der Mutter und des Bolzenkopfes.** Für Millimeter ist:

	Schlüsselweite.	Mutterhöhe.	Kopfhöhe.
Nach Whitworth . .	3,8 + 1,5 d	d	$\frac{7}{8}$ d
„ Sellers . . .	3,17 + 1,5 d		
„ Armengaud . .	4 + 1,5 d	d	0,5 d
„ Reuleaux . .	4 + 1,5 d	d	0,7 d.

6. **Das Gewindschneiden.** Die Drehbank hat eine Spindel S, welche von der Transmission aus angetrieben wird, und eine Leitspindel L, welche ihren Antrieb von der Spindel aus mittelst Rädern erhält.

Auf der Spindel wird die cylindrische Stange, in welche ein Gewinde eingeschnitten werden soll, befestigt. Diese Stange macht also gleich viel Umgänge wie die Spindel. Auf der Leitspindel sitzt eine Schraubenmutter, welche den Supportfix mitnimmt, an welchem der Drehstahl befestigt ist. Der Drehstahl schreitet daher mit gleicher Geschwindigkeit vor wie die Schraubenmutter der Leitspindel, also um die Ganghöhe der Leitspindel, wenn diese sich einmal dreht. Machen daher Spindel und Leitspindel gleich viel Drehungen, so wird ein Gewinde geschnitten, dessen Ganghöhe gleich ist der Ganghöhe der Leitspindelschraube. Macht die Spindel gleichzeitig 2mal mehr Umgänge als die Leitspindel, so wird die Ganghöhe des zu schneidenden Gewindes 2mal kleiner als diejenige der Leitspindel. Macht ferner die Spindel 2 Umgänge, während die Leitspindel deren 3 macht, so gehen 2 Ganghöhen der Spindel auf 3 Ganghöhen der Leitspindel, oder die Ganghöhe des zu schneidenden Gewindes ist 1½mal größer als die der Leitspindel.

Man erkennt hieraus, daß die Ganghöhen der beiden Gewinde sich umgekehrt verhalten wie die Zahl der Umgänge, welche die Spindeln gleichzeitig machen.



Die Uebertragung der Bewegung vom Spindelrad A auf das Leitspindelrad D kann nun erfolgen durch ein oder durch zwei Transporträder. Die Transporträder sitzen auf einem Stift m, welcher parallel zu der Spindel liegt. Bei einem Transportrad greift dasselbe in die Räder A und D zugleich und ändert an der Tourenzahl dieser Räder nichts. Bei zwei Transporträdern greift A in B und C in D. Dabei nennt man die Räder A und C die treibenden, B und D die getriebenen Räder. Mit einer passenden Auswahl von Rädern können die verschiedensten Uebersetzungen von der Spindel auf die Leitspindel erzielt werden, wie die folgenden Beispiele zeigen werden.

I. Ein Transportrad in Anwendung.

1. Die Ganghöhe der Leitspindel sei 12/16 engl. Zoll, diejenige des zu schneidenden Gewindes soll 7/16 engl. Zoll betragen.

Es verhalten sich die Ganghöhen von Spindel und Leitspindel wie 7 : 12; also die Tourenzahlen dieser Achsen wie 12 : 7; somit die Anzahl Zähne des Spindelrades zur Anzahl Zähne des Leitrades wie 7 : 12. Diese Zähnezahlen können also sein:
14 und 24; 21 und 36; 28 und 48; 35 und 60; 42 und 72 u. s. w. Die Anzahl Zähne des Transportrades ist beliebig.

2. Die Ganghöhe der Leitspindel sei wieder 12/16 engl. Zoll, diejenige des neuen Gewindes soll 9 mm betragen.

Es sind	12 engl. Zoll	= 304,8 mm; daher
	1 „ „	= 25,4 „
	12/16 „ „	= 19,05 „

Die Ganghöhen der Spindel- und Leitspindelschrauben verhalten sich daher wie 9 : 19,05 oder wie 900 : 1905; also auch die Anzahl Zähne des Spindelrades zur Anzahl Zähne des Leitspindelrades wie 900 : 1905. Diese Zahlen sind teilbar durch 3 und 5; das Verhältnis wird 60 : 127. Folglich erhält das Rad an der Spindel 60 und das an der Leitspindel 127 Zähne.

II. Zwei Transporträder in Anwendung.

3. Die Leitspindel mache $1^1/_2$ Umgänge auf 1 engl. Zoll Vorrücken des Stahles; die Ganghöhe des neuen Gewindes soll $^1/_2$ engl. Zoll ausmachen.

Die Ganghöhe der Leitspindelschraube ist $^2/_3$ engl. Zoll; folglich verhalten sich die Ganghöhen des neuen Gewindes und desjenigen der Leitspindel wie $^1/_2$: $^2/_3$, oder indem man diese Zahlen mit 6 multipliziert, wie 3 : 4 und die Tourenzahlen beider Spindeln wie 4 : 3. Also müßten bei einem Transportrad je 3 treibende Zähne auf 4 getriebene kommen.

Man multipliziere 3 und 4 mit einer größern Zahl, die sich in möglichst viele Faktoren zerlegen läßt, z. B. mit 600, so entsteht das Verhältnis 1800 : 2400 und betrachte 1800 als das Produkt aus den Zähnezahlen der treibenden Räder A und C, und 2400 als Produkt aus den Zähnezahlen der getriebenen Räder B und D. Nun ist z. B.

$$1800 = 20 \,.\, 90 = 30 \,.\, 60 = 36 \,.\, 50 = 40 \,.\, 45, \text{ u. s. w.}$$
$$2400 = 24 \,.\, 100 = 25 \,.\, 96 = 30 \,.\, 80 = 48 \,.\, 50, \text{ „ „ „}$$

Nimmt man nun für die treibenden Räder die Zähnezahlen 20 und 90, so können für die getriebenen Räder die Zähnezahlen 24 und 100 gewählt werden. Dann greift z. B. Rad A mit 20 Zähnen in Rad B mit 24 Zähnen und Rad C mit 90 Zähnen in Rad D mit 100 Zähnen.

Es können aber auch die treibenden Räder mit 20 und 90 Zähnen in Verbindung kommen mit getriebenen Rädern, welche 25 und 96, oder 30 und 80, oder 48 und 50 Zähne haben.

Ebenso können die treibenden Räder mit 30 und 60, mit 36 und 50, mit 40 und 45 Zähnen versehen werden und in Verbindung kommen mit getriebenen Rädern, welche 24 und 100; 25 und 96; 30 und 80; 48 und 50 Zähne haben.

Man kann auch die treibenden Räder, ebenso die getriebenen Räder mit einander vertauschen.

Oben wurden die Glieder des Verhältnisses 3 : 4 mit 600 multipliziert; man könnte auch mit 500, 550, 650, 700 ꝛc. multiplizieren und mit der Zerlegung und Zusammenstellung in gleicher Weise verfahren.

4. Die Leitspindel habe auf 2 m Länge 135 Gewinde; man soll damit ein Gewinde schneiden mit 6 mm Ganghöhe.

Es sind 2 m = 2000 mm; daher die Ganghöhen des Leitspindelgewindes = 2000/135 mm. Die Ganghöhen verhalten sich daher wie 6 : 2000/135. Multipliziert man die Glieder dieses Verhältnisses mit 135, so geht es über in 810 : 2000.

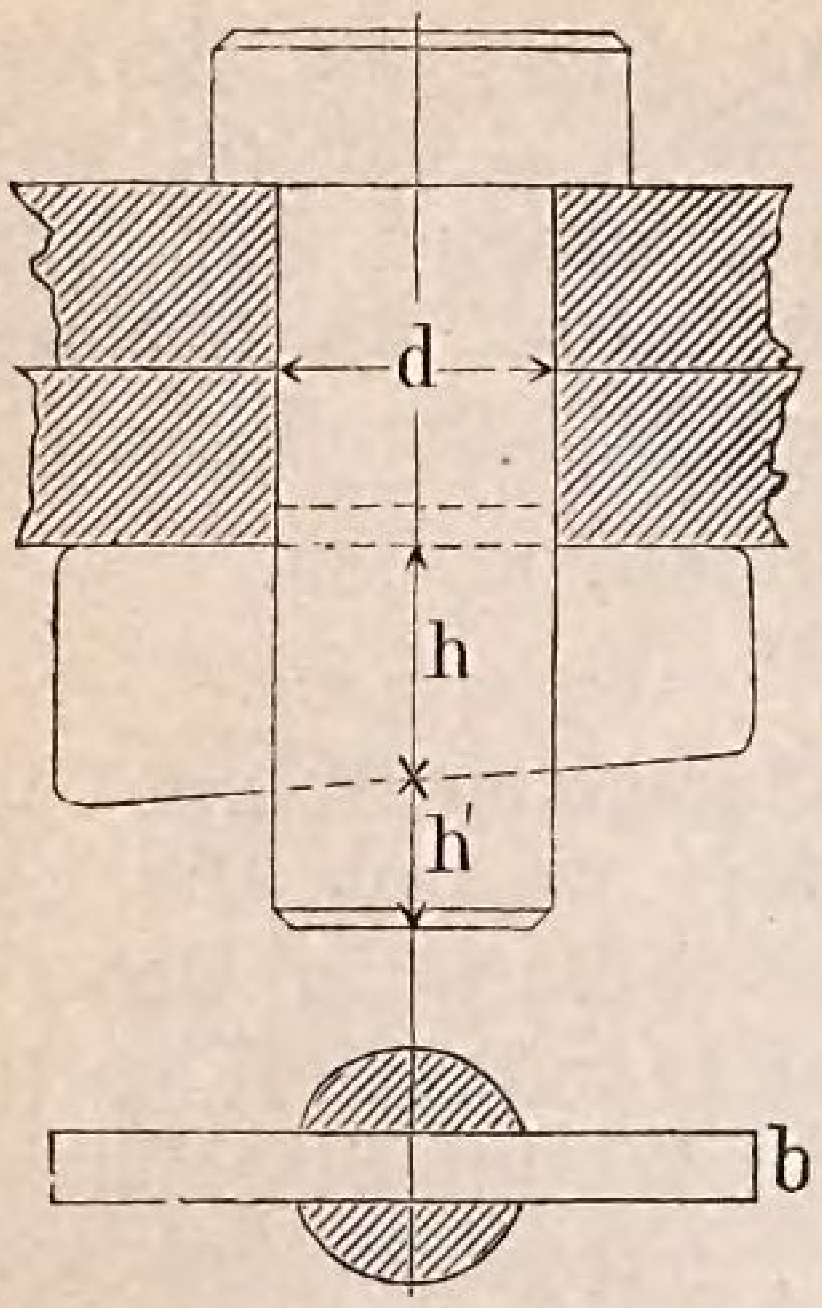
Hier stellt nun 810 das Produkt der Zähnezahlen der treibenden, 2000 das Produkt der Zähnezahlen der getriebenen Räder dar. Damit diese Zähnezahlen genügend groß werden, multipliziere man die Glieder des Verhältnisses 810 : 2000 mit 2 und zerlege sodann die Produkte in Faktoren, so erhält man

$$2 \,.\, 810 = 18 \,.\, 90 = 27 \,.\, 60 = 30 \,.\, 54 = 36 \,.\, 45$$
$$2 \,.\, 2000 = 32 \,.\, 125 = 40 \,.\, 100 = 50 \,.\, 80 = 20 \,.\, 100$$

dann sind die Faktoren der obern Reihe die Zähnezahlen der treibenden, die der untern Reihe die Zähnezahlen der getriebenen Räder. Man erhält daher 4 . 4 oder 16 Zusammenstellungen von Rädern, unter denen man eine auswählt, deren Zähnezahlen sich in der Sammlung der Räder vorfinden.

47. Keile.

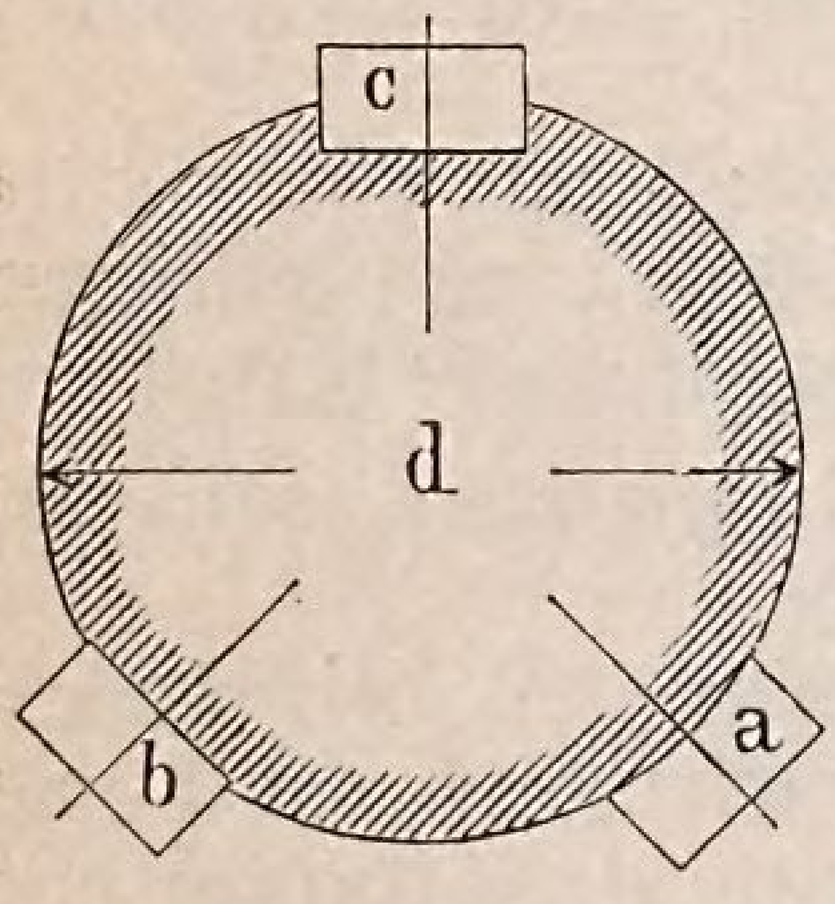
Sie werden zwischen zwei feste Teile eingetrieben, um diese zusammenzuhalten. Man unterscheidet Hochkeile und Flachkeile.



1. **Hochkeile.** Sie kommen zur Verwendung bei Bolzen, Gestängen &c. Die nebenstehende Figur zeigt einen Keil, der durch einen Bolzen geht. Beim Durchgang wird der Bolzen geschwächt. Es soll also die Dicke b nicht groß sein. Der Keil wird auf Abscheren in Anspruch genommen. Soll er so viel Widerstand bieten wie der Bolzen, so muß die Schnittfläche 2b . h gleich sein dem Bolzenquerschnitt an der geschwächten Stelle. Endlich soll die Länge h' des Bolzens über den Keil hinaus genügend sein, daß ein Ausschlitzen des Bolzens nicht erfolgt. Man kann in diesem Fall nehmen:

Dicke des Keiles . . $b = 0{,}3\,d$; Anzug des Keiles 1 : 30,
Mittlere Höhe desselben $h = 0{,}8\,d$; Bolzenlänge . $h' = 0{,}3\,d$.

2. **Flachkeile.** Sie werden angewendet zum Befestigen der Räder, Rollen, Kupplungen, Kurbeln, Hebel &c. auf Wellen. Man unterscheidet: Keile mit cylindrischer Auflage (a), flacher Auflage (b) und mit Versenkung (c). Letztere allein bieten große Sicherheit. Die Breite der Keile ist konstant, die Höhe hat Anzug von 1 : 130 bis 1 : 80. Beim Eintreiben erleiden sie einen Druck den breiten Flächen entlang, beim Arbeiten dagegen sind sie auf Abscheren in Anspruch genommen. Eine Berechnung ihrer Querschnittsdimensionen, gegründet auf die Festigkeitslehre, gibt zu kleine Dimensionen.



Man kann für Maschinenteile, welche alle Arbeit der Welle übertragen, nehmen:

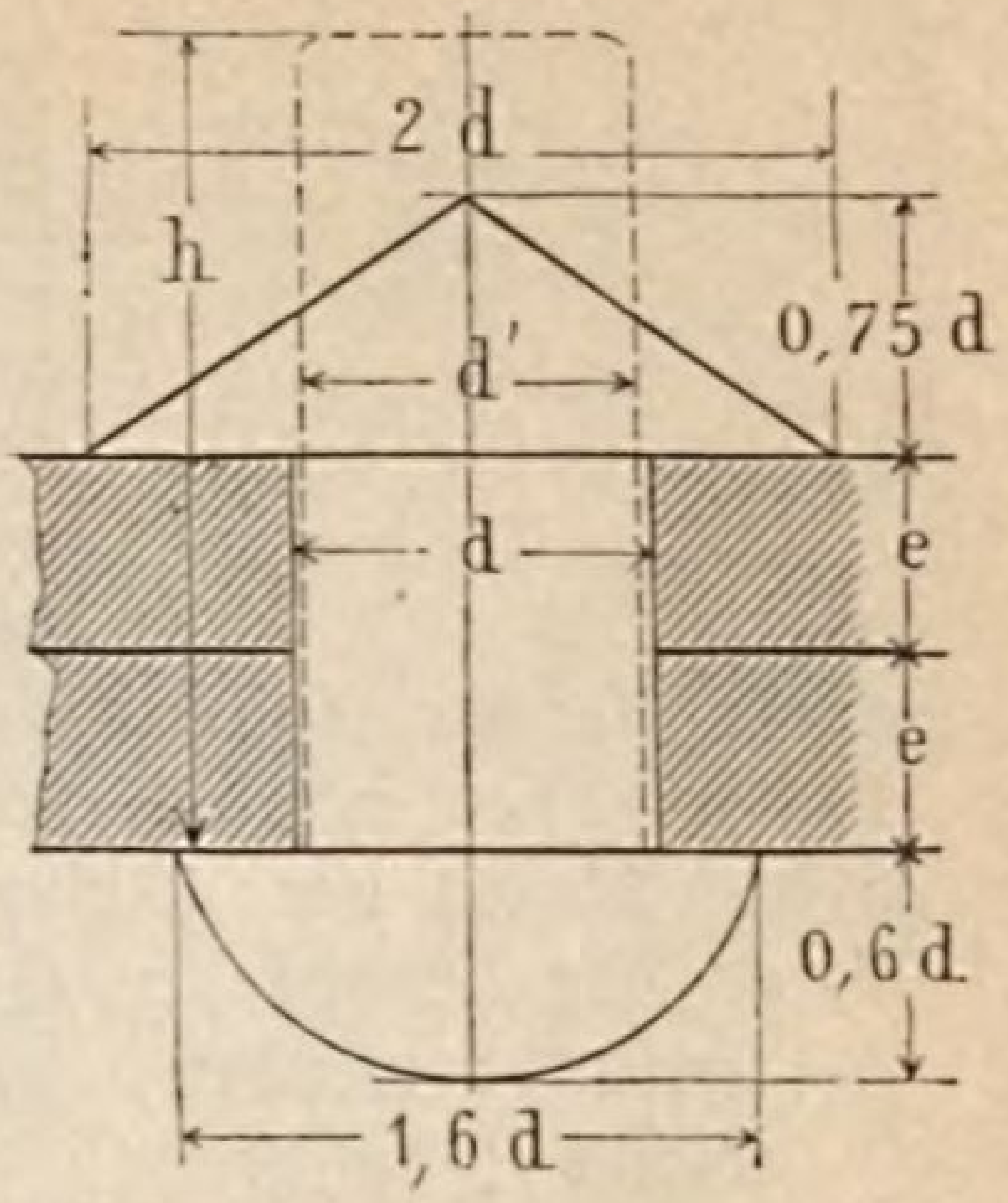
Breite des Keiles . . $= \frac{1}{4}\,d + 0{,}3$ cm.

Mittlere Dicke desselben $= \frac{1}{8}\,d + 0{,}3$ „

48. Vernietung.

1. **Nietlöcher.** Sie werden gebohrt oder gestanzt. Das Stanzen schwächt bei der einfachen Nietreihe das Blech bis auf 20 Prozent. Zudem kommt es vor, daß die Löcher der über einander gelegten Bleche nicht zusammenpassen. Das dadurch nötige Ausreiben, resp. Erweitern der Löcher bringt einen neuen Festigkeitsverlust.

2. **Nieten.** Sie bestehen aus Kopf und Bolzen. Nachdem das Niet eingeschoben, wird ihm entweder von Hand oder mittelst Maschine ein zweiter Kopf angeschmiedet. Der Bolzen ist schwach konisch und sein mittlerer Durchmesser 3 bis 5 Prozent kleiner als der des Zapfens.



Die Länge des Bolzens ist so zu wählen, daß der zweite Kopf eine genügende Sicherheit gewährt, namentlich sollen die Ränder, welche über den Bolzenkern hervortreten, nicht abgeschert werden können. Die Verhältnisse der Dimensionen unter einander sind in beistehender Figur dargestellt. Es seien

d, d' der Durchmesser des Nietloches und des Nietbolzens,

h die Länge des Bolzens und

e die Blechdicke, so erhält man unter der Voraussetzung, daß das Volumen des Bolzens sich nicht ändere,

$$\frac{h}{d'} = \left(\frac{d}{d'} + 2\,\frac{e}{d'}\right)\left(\frac{d}{d'}\right)^2.$$

Die Bedeutung dieser Regel ergibt sich aus folgenden zwei Beispielen. Es sei in beiden $d = 1{,}05\,d'$; dagegen im ersten $d = e$, im zweiten $d = 2{,}5\,e$; so wird

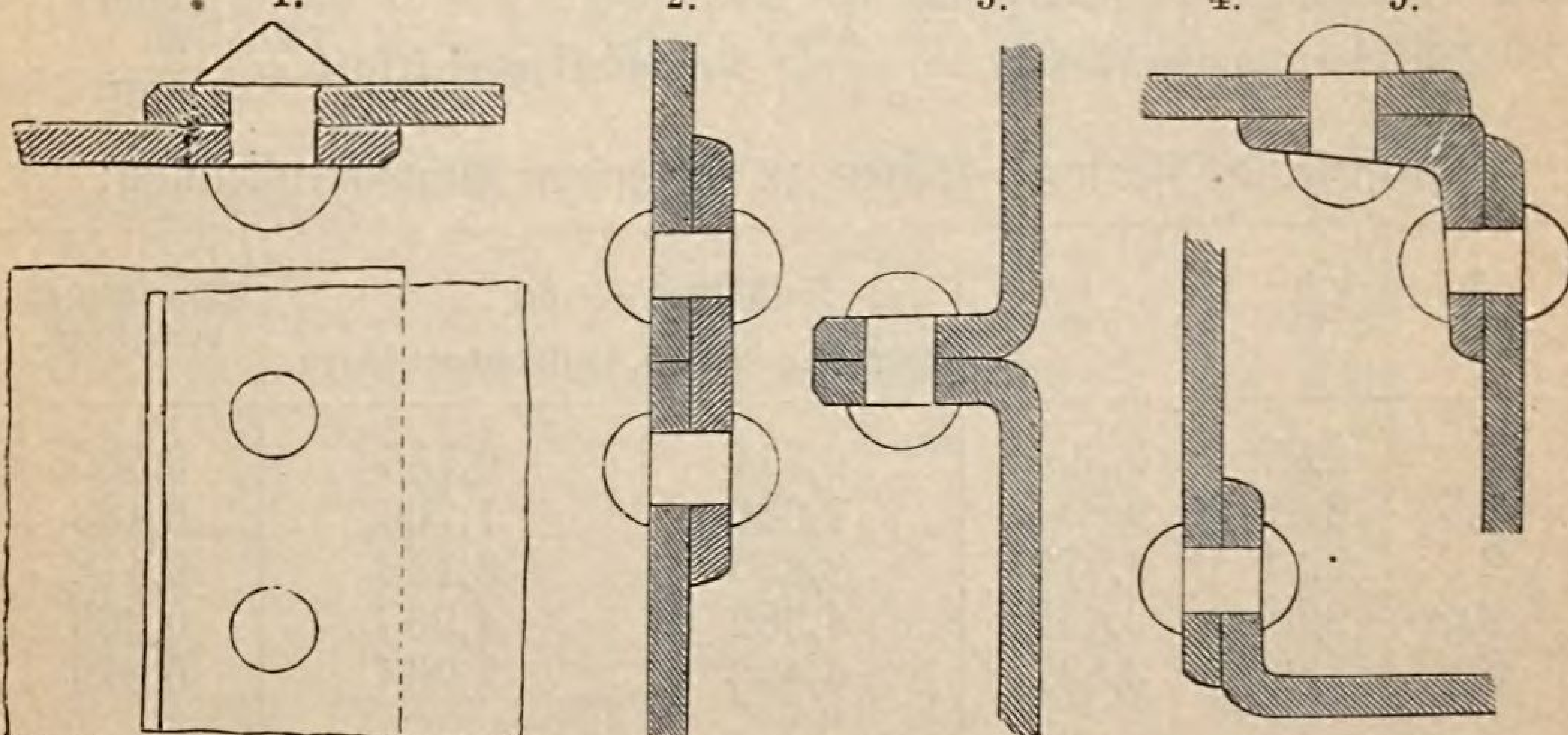
im ersten $\frac{h}{d'} = (1{,}05 + 2\,.\,1{,}05)\;1{,}05^2 = 3{,}47,$

im zweiten $\frac{h}{d'} = \left(1{,}05 + 2\,.\,\frac{1{,}05}{2{,}5}\right)\;1{,}05^2 = 2{,}08.$

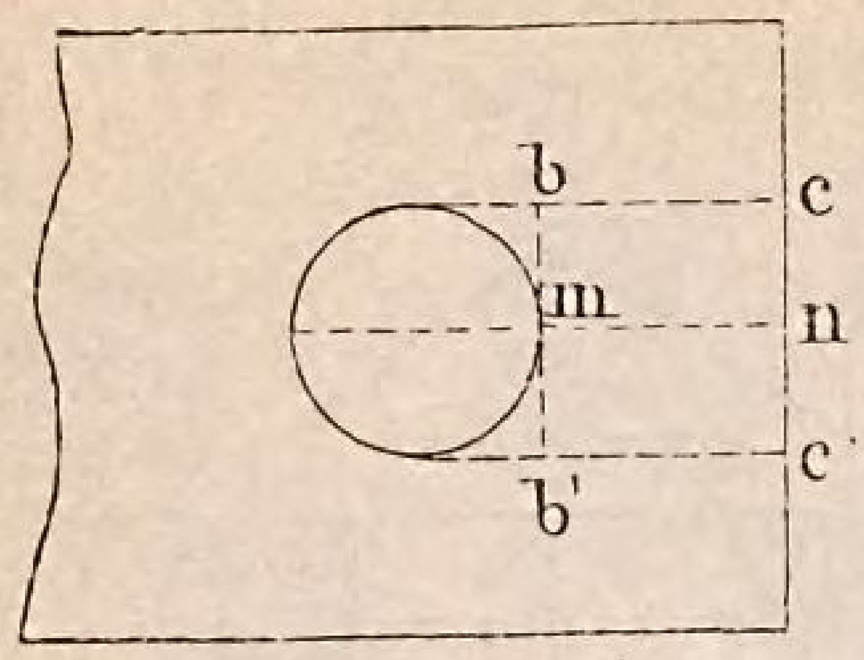
Im einen Fall wird der Bolzen 3,47-, im andern nur 2,08mal so lang als dick.

3. **Verbindungsarten.** Die Verbindung zweier Bleche in gerader Richtung kann erfolgen: durch Uebereinanderlegen (Fig. 1); durch Aneinanderstoßen und Ueberdecken mittelst eines Blattes (2) oder auch zweier Blätter zu beiden Seiten der Bleche; durch Umborden (3) ꝛc.; ferner die Verbindung in abgelenkter Richtung: durch Ueberdecken (4), durch Winkeleisen (5) ꝛc.

1. 2. 3. 4. 5.



Bei Gefäßen sind die Nieten in einer oder zwei parallelen Reihen angebracht, z. B. bei Dampfkesseln in einer Reihe um den Mantel herum und in zweien der Achse entlang.



4. Festigkeit bei der einfachen Nietreihe. Der Bruch kann erfolgen: durch Zerreißen der Bleche zwischen den Nieten; durch Abscheren der Nieten und durch Ausschneiden des Bleches gegen den Rand hin. Das letztere tritt ein, indem das Blechstück b c c′ b′ durch das Niet weggedrückt wird. Es gelte die bisherige Bezeichnung; außerdem seien

a der kleinste Abstand zwischen zwei benachbarten Nietlöchern,
$l = mn$ der Abstand der Nieten bis zum Rand,
s der Modul der Zugfestigkeit des Bleches,
s′, s″ der Modul der Schnittfestigkeit für Nieten und Blech, so kann verlangt werden, daß alle Querschnitte gleiche Sicherheit gewähren; daher

$$a e s = \frac{d^2 \pi}{4} s' \text{ und } 2 l e s'' = \frac{d^2 \pi}{4} s'.$$

In der Regel kann man die beiden specifischen Schnittfestigkeiten gleich annehmen. Daher folgt aus der zweiten dieser Gleichungen

$$\frac{l}{e} = 0{,}393 \left(\frac{d}{e}\right)^2.$$

Bei gebohrten Löchern kann man $s' = 0{,}9 s$ und bei gestanzten $s' = s$ annehmen. Daher ergibt sich aus der ersten der obigen Gleichungen:

$$\text{für gebohrte Löcher . . } \frac{a}{e} = \frac{\pi}{4{,}4} \left(\frac{d}{e}\right)^2,$$

$$\text{für gestanzte Löcher . . } \frac{a}{e} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{e}\right)^2.$$

Mithin kommen die Nieten bei gestanzten Löchern im Verhältnis von 4 : 4,4 weiter aus einander als bei gebohrten Löchern, ohne daß die Festigkeit der Blechstücke zwischen den Nieten größer wird. Es fällt also nur die Schwächung des Bleches für gebohrte Nietlöcher in Betracht. Der Querschnitt reduciert sich auf eine Breite $a + d$ um d; daher

$$\text{Schwächungsverhältnis} = \frac{d}{a + d}; \text{ Festigkeitsverhältnis} = \frac{a}{a + d}.$$

Vorstehende Formeln führen zu folgender Zusammenstellung:

$\frac{d}{e}$	$\frac{h}{d'}$	$\frac{l}{e}$	Verhältnis $\frac{a}{e}$ bei gebohrten Löchern.	Verhältnis $\frac{a}{e}$ bei gestanzten Löchern.	Schwächungsverhältnis.
1	3,47	0,393	0,714	0,785	0,580
1,5	2,69	0,884	1,606	1,766	0,483
2	2,31	1,572	2,856	3,152	0,412
2,5	2,08	2,450	4,382	4,906	0,363
3	1,93	3,537	6,426	7,065	0,319

Hiernach ergibt sich z. B. bei der Vernietung, wo der Durchmesser des Loches 2mal größer ist als die Blechdicke, folgendes: der ursprüngliche Nietbolzen muß 2,31mal länger sein als dick; das Loch hat einen Ab-

stand vom Rand gleich dem 1,572fachen der Blechdicke; gebohrte Löcher stehen unter einander ab um 2,856, gestanzte um 3,152mal der Blechdicke; das Blech wird über die Naht geschwächt um 41,2 Prozent, so daß noch 58,8 Prozent der ursprünglichen Festigkeit übrig bleiben.

Die obern Horizontalreihen enthalten dünne Nieten, die nahe an einander liegen; die untern Reihen dagegen dicke Nieten, die weit von einander abstehen. Die erstern gewähren Dichtheit (für Reservoirs, für Wasser und Gas), aber wenig Festigkeit; die letztern Festigkeit (Brücken ꝛc.), aber wenig Dichtheit. Die Nietung bei Dampfkesseln soll dicht und fest sein.

Redtenbacher empfiehlt als Verhältnis zwischen d zu e: für Dichtheit 1,5 : 1; für Festigkeit 2,5 : 1 und für Dampfkessel 2 : 1.

Nach Lemaitre kann für Gefäßnietungen angenommen werden:

für Nieten bis 8 mm Dicke . . . $d = 2e + 2$ mm,
für Nieten über 8 mm Dicke . . . $d = e + 10$ „

Hiernach erhält man:

für die Blechdicke $e =$	3	5	7	9	11	13	15 mm,
Lochweite . . $d =$	8	12	16	19	21	23	25 „
Abstand . . . $a =$	16,7	22,6	28,4	31,5	31,5	32,0	32,7 „
Teilung . . $a + d =$	24,7	34,6	44,4	50,5	52,5	55,0	57,7 „

5. **Festigkeit bei der doppelten Nietreihe.** Es sei wieder a der Abstand zweier benachbarter Nietlöcher einer Reihe, so ist die Festigkeit zweier Nieten gleich derjenigen des Bleches vom Querschnitt $a e$. Daher für gebohrte Löcher $a e s = \frac{d^2 \pi}{2} s'$. Nimmt man $s' = 0{,}8\, s$, so ergibt sich

für die Blechdicke . . . . $e =$	1	1	1	1
und die entsprechenden Durchmesser $d =$	1,5	1,75	2	2,5
der Abstand zweier Nieten . . . $a =$	2,83	3,85	5,02	7,85
und das Schwächungsverhältnis $\frac{d}{a+d} =$	0,35	0,31	0,28	0,24

6. **Versuche von Fairbairn über die Festigkeit der Blechverbindungen,** per 1 qcm:

Festigkeit des Bleches . .	4065	4133	3583	3593	3563 kg
Nietenwiderstand					
bei einfacher Nietreihe .	3290	2633	3129	2894	3116 „
bei doppelter Nietreihe .	3765	3353	3936	3875	3875 „

Mittel aus den drei Zahlenreihen 3867, 3012 und 3761 „

Hieraus folgt, daß die Festigkeit der Verbindung mit einfacher Nietreihe 0,77 und die mit doppelter Nietreihe 0,97 von der Festigkeit des Bleches beträgt. Also geht an Festigkeit des Bleches verloren: bei der einfachen Reihe 0,23, bei der doppelten Reihe 0,03, während nach dem Vorstehenden bei Nieten, die doppelt so dick sind als das Blech, sollten verloren gehen: bei der einfachen Reihe 0,41, bei der doppelten 0,28. Diese Erscheinung erklärt sich dadurch, daß die Bleche von den Nieten stark gegen einander gedrückt werden, daß also zwischen den Blechen Reibung entsteht, welche die Festigkeit der Verbindung erhöht, bei der einfachen Reihe um 0,18, bei der doppelten um 0,25 der Festigkeit des Bleches.

49. Federn.

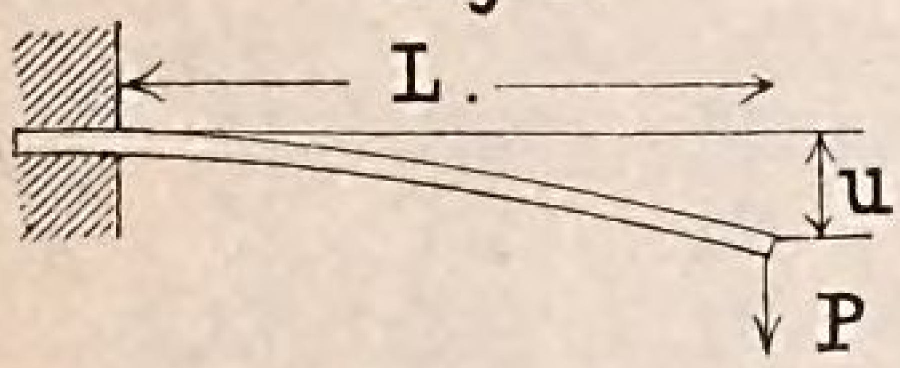
Die Federn sind am einen Ende festgehalten. Es bezeichne:

P den Druck auf das andere Ende der Feder,
u die unter diesem Druck entstehende Ausweichung der Feder, in der Richtung von P gemessen,
s die größte im Material entstehende Spannung,
E den Modul der Elasticität des Materials und
L die Länge der Feder.

I. Biegungsfedern.

1. **Einfache Rechtecksfeder.** Es sei h die Dicke und b die Breite des Querschnittes, dieser über die ganze Länge gleich gedacht, so ist nach S. 154 die Tragkraft

Fig. 1.



$$(1) \qquad P = \frac{s}{6} \frac{b\,h^2}{L}$$

und nach S. 160 die Senkung

$$u = \frac{4\,L^3}{E\,b\,h^3} \,.\, P.$$

Multipliziert man beide Gleichungen, so folgt als Wert der Senkung

$$(2) \qquad u = \frac{2}{3} \cdot \frac{s}{E} \cdot \frac{L^2}{h} \,.$$

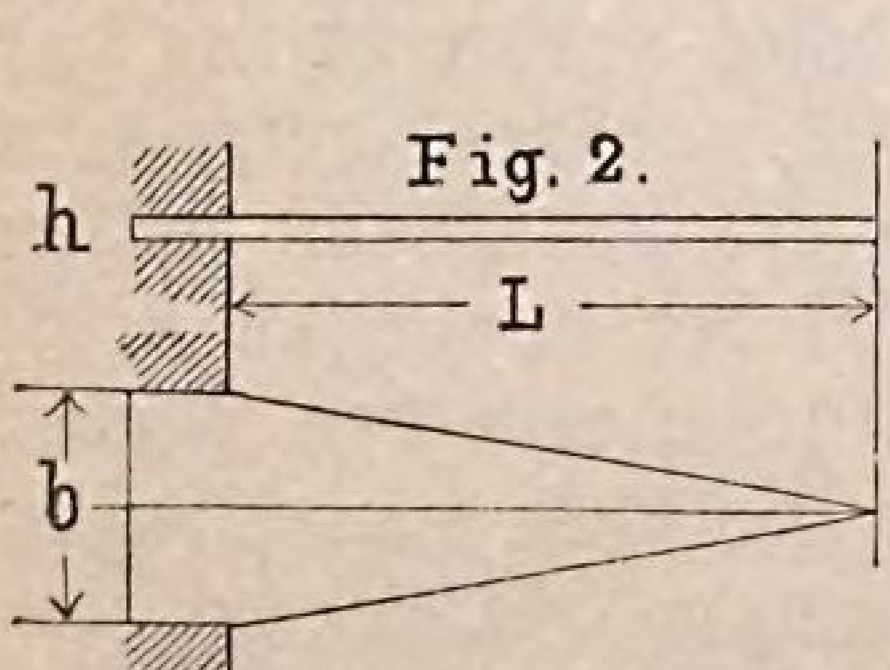
Beisp. Es sei für eine Feder aus Stahl b = 6 cm, h = 0,5 cm, L = 40 cm, s = 1200 kg und da E = 2400000 kg angenommen werden kann, so wird

$$P = \frac{1200}{6} \cdot \frac{6\,.\,0{,}25}{40} = 7{,}5 \text{ kg}; \quad u = \frac{2}{3} \cdot \frac{1200}{2400000} \cdot \frac{1600}{0{,}5} = \frac{16}{15} \text{ cm}.$$

Bei diesen Annahmen senkt sich die Feder wenig, sie ist starr. Um sie weicher zu machen, nehme man die Dicke kleiner; allein dann wird auch die Tragkraft kleiner.

2. **Zusammengesetzte Rechtecksfeder.** Sie besteht aus mehreren rechtwinkligen Blättern von gleicher Länge, Dicke und Breite. Ihre Tragkraft ist gleich der Tragkraft eines Blattes, multipliziert mit der Anzahl Blätter und die Senkung des Ganzen gleich der Senkung eines Blattes. Bei jeder Belastung nehmen diese Blätter eine gleiche Krümmung an, d. h. sie schließen sich in jeder Lage an einander an, was für eine zusammengesetzte Feder wesentlich ist.

Fig. 2.



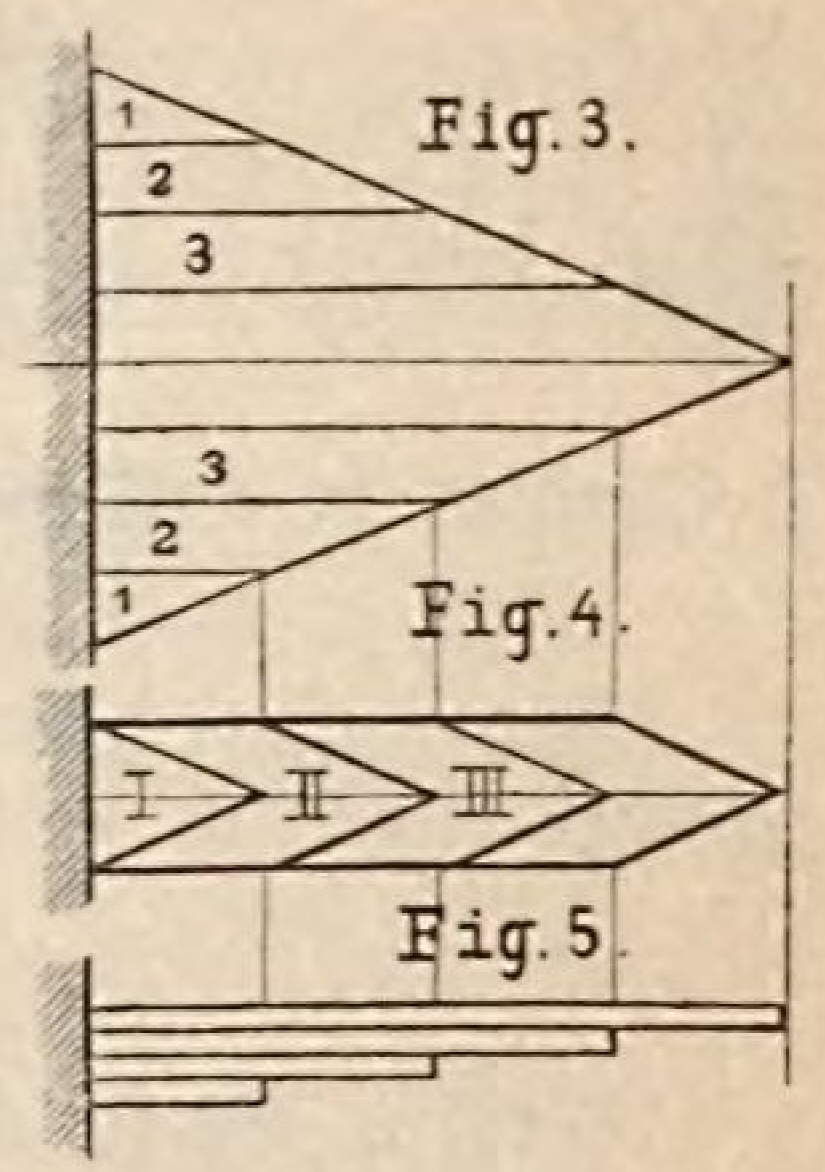
3. **Einfache Dreiecksfeder.** Die Dicke sei der ganzen Länge nach dieselbe, während der Grundriß ein Dreieck bilde (S. 158), so bietet die Feder in allen Querschnitten die gleiche Tragkraft, es bleibt auch die Spannung s auf der konvexen Seite der ganzen Länge nach dieselbe; folglich wird die Biegung kreisförmig und die Senkung

$$(3) \qquad u = \frac{s}{E} \cdot \frac{L^2}{h},$$

mithin anderthalbmal größer als bei der Rechteckfeder.

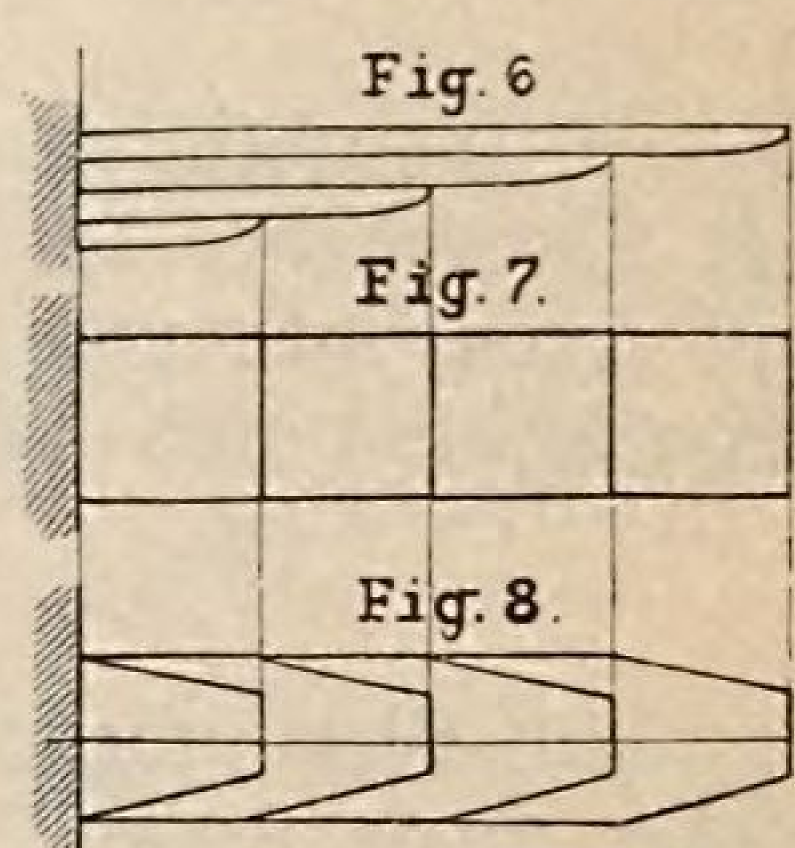
Die Tragkraft wird nach Formel (1) berechnet.

4. **Zusammengesetzte Dreieckfeder.** Es sei Fig. 3 der Grundriß einer einfachen Dreieckfeder mit der Breite b an der befestigten Stelle und gleichförmiger Dicke, so kann nach (1) die Tragkraft und nach (3) die Senkung derselben berechnet werden. Um daraus eine Feder, z. B. aus 4 Blättern bestehend, zu erhalten, zerlege man die Breite b, von der Mitte aus, in 4 gleich breite Längenstreifen und lege sie zusammen, wie dies die Figuren 4 und 5 andeuten, nämlich die äußersten Streifen 1, 1 nach I, die folgenden 2, 2 nach II und die dritten 3, 3 nach III. Die so entstandene zusammengesetzte Feder hat die gleiche Tragkraft, Senkung und kreisförmige Krümmung, wie die einfache Feder der Fig. 3.



5. **Einfache Parabelfeder.** Man nehme die Breite des Federblattes konstant, verjünge jedoch die Dicke desselben nach einer Parabel (S. 158), so entsteht eine Feder, bei welcher die Spannung s auf der konvexen Seite der ganzen Länge nach gleichen Wert behält; daher wird deren Krümmung kreisförmig. Diese Feder ersetzt die einfache Dreieckfeder. Es kann daher ihre Tragkraft nach (1) und ihre Senkung nach (3) berechnet werden.

6. **Zusammengesetzte Parabelfeder.** Bei der zusammengesetzten Dreieckfeder, Fig. 4, denke man sich die Blattteile, soweit sie sich über ein Dreieck ausdehnen, ersetzt durch Blattteile von gleicher Länge und Breite, verjünge jedoch die Dicke nach der Parabel, so entsteht eine Feder, Fig. 6 u. 7, welche die genannte Dreieckfeder ersetzt.

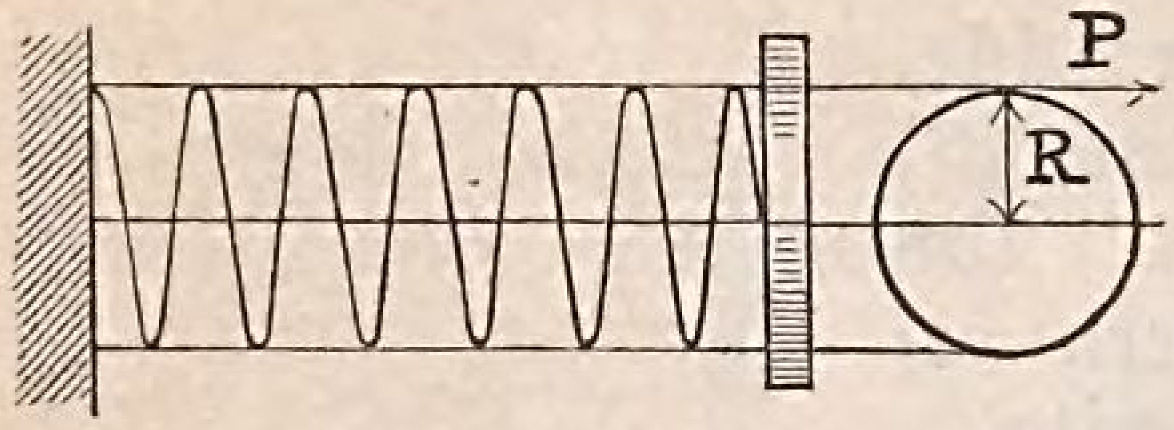


Man kann auch die Dreiecke der Fig. 4 ersetzen durch Trapeze, Fig. 8. In diesem Falle müssen Breite und Dicke dieser Blattteile zugleich abnehmen und zwar in der Weise, daß die Tragkraft in jedem Querschnitt eines Trapezes die gleiche bleibt wie an der Befestigungsstelle. Sind l, b, h Länge, Breite und Dicke eines Trapezes an der Wurzel, l′, b′, h′ dasselbe an einer vorgerückteren Stelle, so muß folgende Proportion erfüllt werden:

$$l : l' = b h^2 : b' h'^2.$$

7. **Gewundene Feder mit kreisförmigem Querschnitt.** Diese Feder entsteht, wenn ein Draht um einen Cylinder schraubenförmig aufgewickelt wird, so daß die Höhe eines Schraubenganges konstant bleibt, jedoch größer ist, als die Drahtdicke.

Es sei L die Länge und d die Dicke des Drahtes; die mittlere Schraubenlinie liege in einem Cylindermantel vom Halbmesser R. Es werde das eine Ende der Feder festgehalten, das andere mit der Kraft P, senkrecht zur Cylinderachse, am Hebelsarm R gedreht und zwar um einen Weg u, bis die Spannung auf der konvexen Seite den Wert s erhält, so wird



(4) $$PR = \frac{\pi s}{32} d^3,$$

(5) $$u = 2 \frac{s}{E} \cdot \frac{LR}{d}.$$

Es beschreibe, unter Einwirkung von P, der Radius R einen Winkel von a Graden, so entsteht die Proportion

(6) $$a : 360 = u : 2R\pi.$$

Setzt man den Wert von u aus (6) in (5), so wird der Drehwinkel

$$a = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{s}{E} \frac{L}{d}.$$

Beisp. Es sei d = 1 cm, L = 180 cm, R = 3 cm und für Stahl s = 1000 kg, E = 2400000, so wird

$$a = \frac{360}{3{,}14} \cdot \frac{1000}{2400000} \cdot \frac{180}{1} = 8{,}6^0; \quad P = \frac{3{,}14 \,.\, 1000 \,.\, 1}{3 \,.\, 32} = 32{,}7 \text{ kg}.$$

8. **Gewundene Feder mit rechtwinkligem Querschnitt.** Es sei der Querschnitt der Feder unter Ziffer 7 rechtwinklig, mit der Breite b und der Dicke h, letztere Dimension senkrecht zur Cylinderachse gedacht, so wird

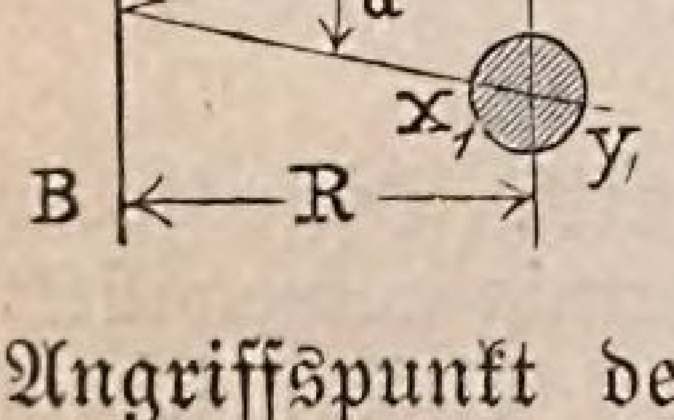
$$PR = \frac{s}{6} b h^2 \quad \text{und} \quad a = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{s}{E} \cdot \frac{L}{h}.$$

II. Torsionsfedern.

9. **Geradlinige Feder mit kreisförmigem Querschnitt.** Es sei d der Durchmesser des Cylinders, PR das statische Moment, welches ihn am einen Ende verdreht, bis der Drehwinkel auf a Grade steigt, so ist nach S. 164 und nach Formel (5), S. 195

$$PR = \frac{\pi s}{16} d^3 \quad \text{und} \quad a = \frac{900}{\pi} \cdot \frac{s}{E} \cdot \frac{L}{d}.$$

10. **Gewundene Feder mit kreisförmigem Querschnitt.** Bei der Feder unter Ziffer 7 wirke die Kraft P parallel zur Cylinderachse, so erfolgt eine Verlängerung oder Verkürzung der Achsenlänge AB der Spirale und zwar dadurch, daß ein Querschnitt aus der Lage xy in die Lage x′ y′ übergeht, wodurch der Radius R für eine Windung einen Winkel α beschreibe. Hat die Feder n Windungen, so ist die gesamte Verdrehung $= n\alpha$. Denkt man sich α als Bogen beschrieben mit einem Halbmesser = 1, so macht der Angriffspunkt der Kraft P einen Weg $R \,.\, n\alpha = u$. Behufs Berechnung der Tragkraft und Senkung ergibt sich aus den Formeln über



Torsionsfestigkeit eines Stabes mit cylindrischem Querschnitt, wenn a Grade durch α ausgedrückt wird,

$$P = \frac{\pi s}{32} \cdot \frac{d^3}{R} \quad \text{und} \quad u = 5 \frac{s}{E} \frac{LR}{d}.$$

50. Tragwellen oder Achsen.

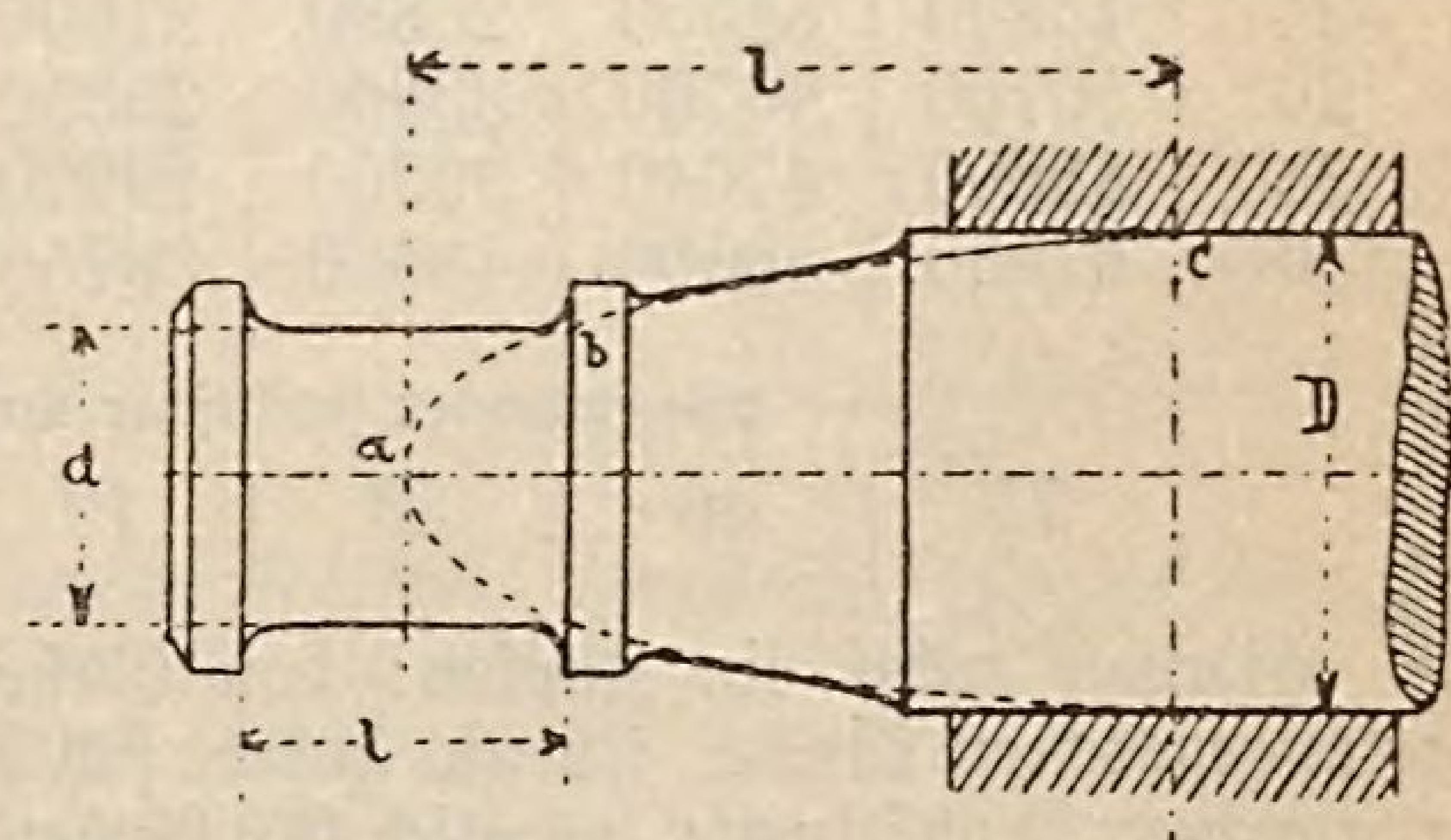
Diese Wellen sind vorherrschend auf Biegungsfestigkeit in Anspruch genommen und werden auch Achsen genannt.

1. **Zapfenstärke.** Der Druck, womit ein Wellzapfen in sein Lager gepreßt wird, senkrecht zur Längenrichtung des Zapfens, verteilt sich bei richtiger Aufstellung des Lagers gleichförmig über seine Länge; der Gesamtdruck kann also in der Mitte des Zapfens wirksam gedacht werden. Es seien

P der Druck des Zapfens in das Lager,
d, l Durchmesser und Länge des Zapfens,

so ist 0,5 l der Hebelsarm, an welchem die Kraft P wirkt, um den Zapfen zunächst der Welle abzubrechen. Folglich hat man, wenn s die größte Spannung des Materials bezeichnet:

$$P \cdot \frac{l}{2} = \frac{\pi s}{32} d^3, \text{ woraus } d^2 = \frac{16}{\pi} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{P}{s}.$$



Zapfen, die sich langsam drehen, macht man ungefähr so lang als dick, Zapfen mit mäßiger Geschwindigkeit 1,2—1,5 und Zapfen mit großer Geschwindigkeit 2—5mal so lang als dick. Durch die Verlängerung des Zapfens wird erreicht, daß der specifische Druck abnimmt, daß die Zapfen sich also nicht so schnell abnützen und sich nicht o leicht erhitzen. Allein lange Zapfen werden auch entsprechend dicker und absorbieren daher mehr Arbeit durch Reibung. In jedem gegebenen Falle wählt man nun das Verhältnis l : d, setzt diesen Wert sowie den für s in die letzte Formel, so kann d berechnet werden.

Nimmt man den Modul s für Gußeisen = 230 kg, für Schmiedeisen = 382 kg und für Stahl = 585 kg per 1 qcm Querschnitt, so folgt aus obiger Formel für

Gußeisen.	Schmiedeisen.	Stahl.
$P = 45\, d^2 \left(\frac{d}{l}\right)$,	$P = 75\, d^2 \left(\frac{d}{l}\right)$,	$P = 115\, d^2 \left(\frac{d}{l}\right)$.

Zapfen, welche nach diesen Regeln konstruiert werden, brechen **nie** durch Abscheren an der Welle.

Mit Hilfe dieser Formeln ist folgende Tabelle berechnet.

Tabelle über die Stärke schmiedeiserner Wellzapfen.

Durchmesser. cm	Den Verhältnissen der Länge zum Durchmesser des Zapfens 1	1,25	1,5	2	2,5	3	4
	entspricht folgende Belastung in kg:						
3	675	540	450	337	270	225	169
4	1200	960	800	600	480	400	300
5	1875	1500	1260	937	750	625	469
6	2700	2160	1800	1350	1080	900	675
7	3675	2940	2250	1837	1470	1225	919
8	5056	4045	3371	2528	2022	1685	1264
9	6399	5119	4266	3200	2559	2133	1600
10	7500	6000	5000	3750	3000	2500	1875
12	10800	8640	7200	5400	4320	3600	2700
14	14700	11760	9800	7350	5880	4900	3675
16	19200	15360	12800	9600	7680	6400	4800
18	24300	19440	16200	12150	9720	8100	6075
20	30000	24000	20000	15000	12000	10000	7500
22	36300	29040	24200	18150	14520	12100	9075
24	43200	34560	28800	21600	17280	14400	10800
26	50700	40560	33800	25350	20280	16900	12675
28	58800	47040	39200	29900	23520	19600	14700
30	67500	54000	45000	33750	27000	22500	16875
	und folgender specifischer Druck P:dl im Lager						
	75	48	33	19	12	8,3	4,7

Hiervon trägt ein Zapfen: von Gußeisen $^3/_5$ und von Stahl $^3/_2$ der angegebenen Werte. Ebenso ändert sich der specifische Druck im Lager in gleichem Verhältnisse, nämlich für Gußeisen, Schmiedeisen und Stahl wie 45 : 75 : 112. Um die vorstehende Tabelle auch für Gußeisen und Stahl zu gebrauchen, muß man bei gleicher Zapfendicke für Gußeisen den Druck größer, für Stahl kleiner denken.

Beisp. Wie stark müssen die Zapfen einer gußeisernen Wasserradwelle sein, wenn das Gewicht des Rades samt der Welle 14000 kg beträgt und dieser Druck sich gleichförmig auf beide Zapfen verteilt?

Es ist der Druck auf einen Zapfen = 7000 kg. Für l : d = 1 wird

$$P = 7000 \cdot \frac{5}{3} = 11666; \text{ wofür } d = 14 \text{ cm.}$$

2. **Achsenstärke.** Die Achse (s. letzte Figur) habe im Abstande L von der Mitte des Zapfens eine Last, z. B. ein Schwungrad, zu tragen, so daß der Druck des Zapfens auf das Lager = P werde, so ist die Dicke D

der Achse am Aufhängepunkt der Last nach Fall I, S. 156, zu berechnen mittelst

$$PL = \frac{\pi s}{32} D^3.$$

Nimmt man für Gußeisen s = 230 kg, für Schmiedeisen s = 382 kg und für Stahl s = 585 kg, so erhält man als gesuchten Durchmesser für

Gußeisen.	Schmiedeisen.	Stahl.
$D = 0{,}354 \sqrt[3]{PL}$,	$D = 0{,}30 \sqrt[3]{PL}$,	$D = 0{,}26 \sqrt[3]{PL}$.

Damit der Durchmesser D klein, die Achse also leicht ausfalle, muß die Länge L klein, die Last mithin möglichst nahe zum Lager gerückt werden.

Von dem Radkopf aus mit dem Durchmesser D kann sich die Achse nach der Mitte des Zapfens hin nach einer kubischen Parabel c b a mit Punkt a als Scheitel verjüngen. Diese Form ist als Grundform zu betrachten, an welche sich die wirkliche anschließt (S. 158).

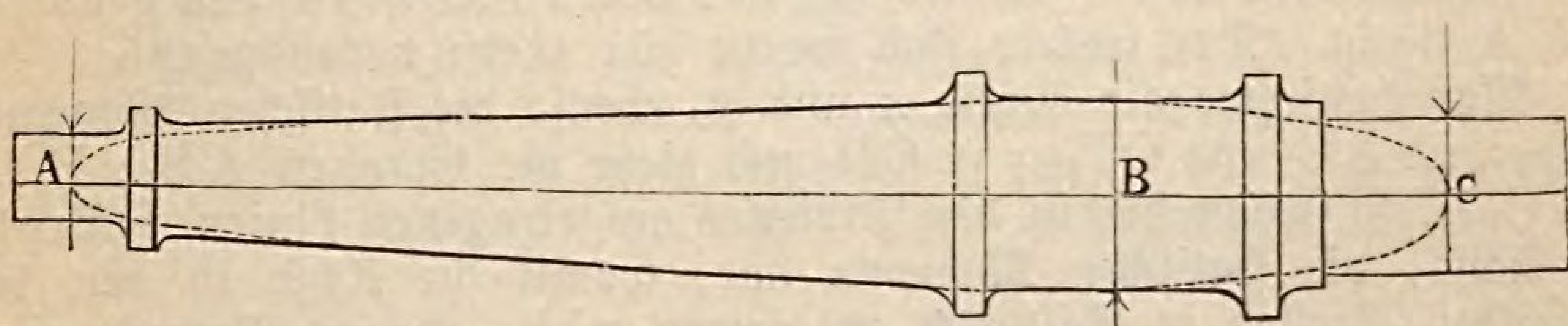
Beisp. Bei der Achse, S. 59, wird der Zapfen A mit 2992 kg in das Lager gedrückt. Der Abstand L von Mitte der Schwungradnabe bis zur Mitte des Zapfens ist 30 cm; folglich für Gußeisen und l = 1,25d:

Durchmesser D der Achse . . $0{,}354 \sqrt[3]{2992 \,.\, 30} = 15{,}84$ cm,

Druck auf einen schmiedeisernen Zapfen $2992 \,.\, \frac{5}{3} = 4987$ kg,

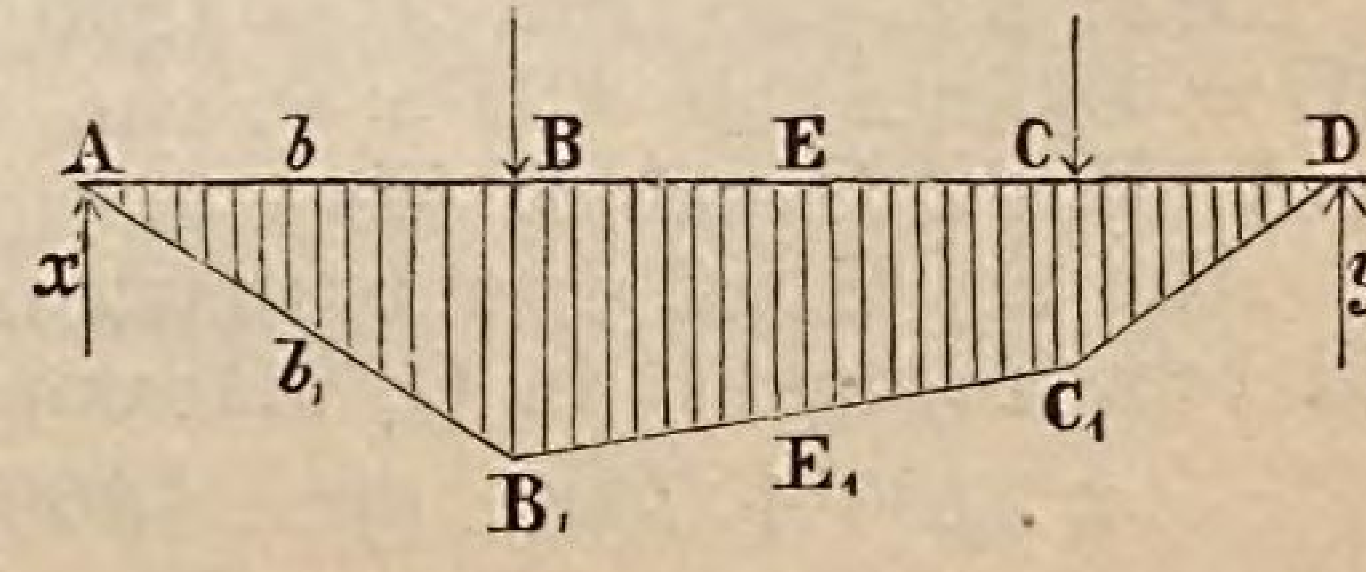
folglich Durchmesser des Zapfens (Tab. S. 190) d = 9 cm.

3. **Achse mit einer Last außerhalb der Lager.** Es seien in A und B die Zapfen, in C die Last, so kann man sich denken, die Achse werde in C und A abwärts, in B aufwärts gedrückt. Daher wird man die



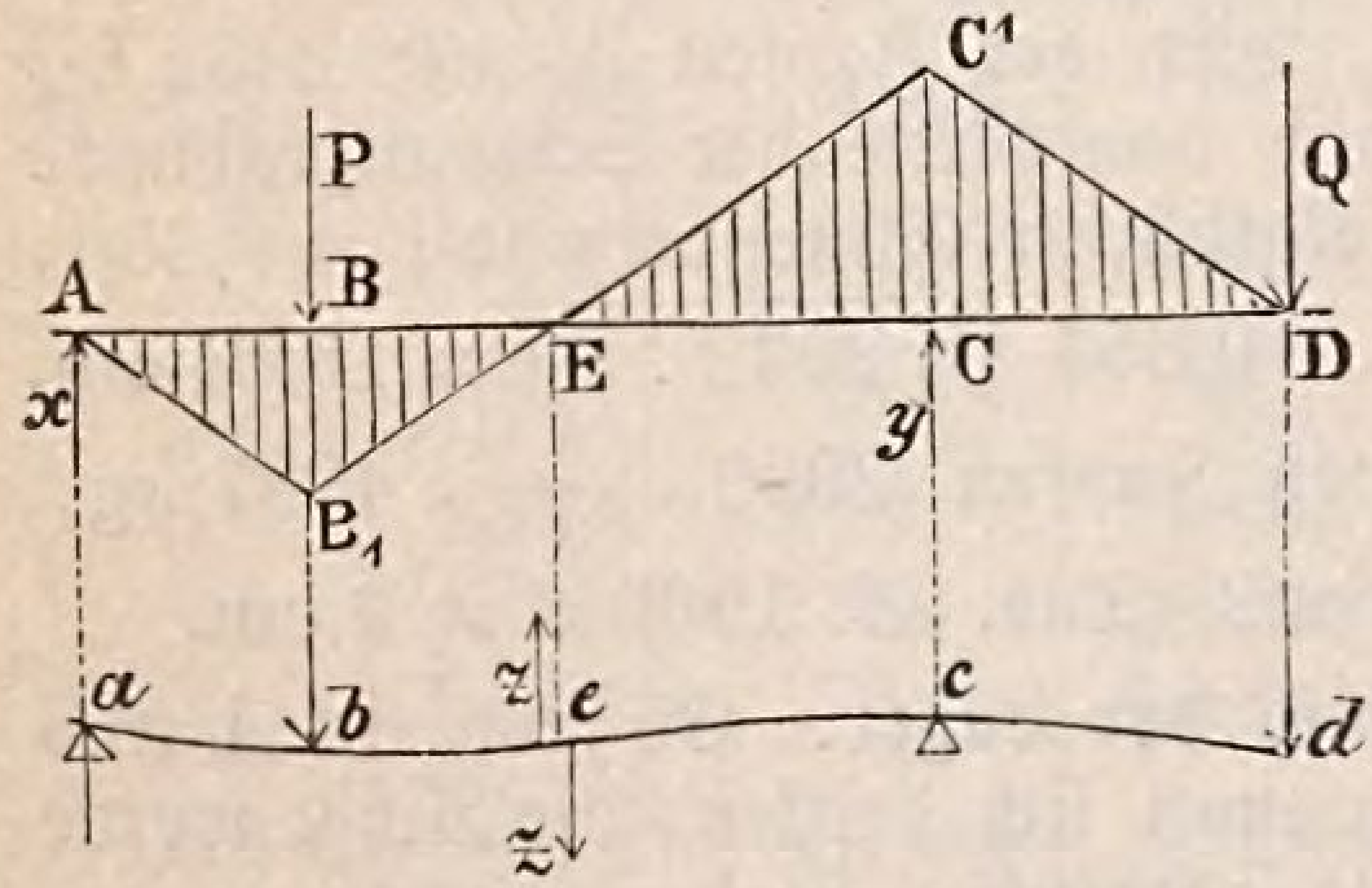
Dicke in B nach einer der letzten Formeln berechnen, sodann von hier aus nach beiden Zapfenmitten die Grundform (kubische Parabel) einzeichnen und die wirkliche Form anschließen, d. h. in B und A Lagerzapfen und in C einen Kopf zum Befestigen der Last (Rad rc.) anbringen. Man bemerkt, daß der Durchmesser der Zapfen und des Radkopfes gerade durch die Dicke des parabolischen Körpers an der betreffenden Stelle bedingt ist.

4. **Achse mit zwei Lasten zwischen den Lagern.** Es seien AD die Achse, B und C die Auflagestellen zweier beliebiger Lasten, x, y die Pressungen, womit die Zapfen in die Lager drücken. Man denke sich das Stück BD eingemauert und nur BA frei hervortretend, so ist die Tendenz vorhanden, das letztere Stück an der Stelle B abzubrechen mit dem statischen Moment x . AB. Man mache



BB_1 gleich diesem Moment, ziehe die Gerade AB_1, zeichne Parallelen zu BB_1 im Dreieck ABB_1, so stellt jede derselben, wie z. B. bb_1, das statische Moment dar, mit welchem die Achse verbogen wird, wenn die Einmauerung von D bis b reichen würde. Ebenso sind die Figuren DCC_1 und CBB_1C_1 zu verstehen. Daher wird die Achse von B nach A hin, ebenso von C nach D hin sich verjüngen nach der kubischen Parabel. Auf der Strecke BC wird der Durchmesser ebenfalls von B nach C hin langsam abnehmen. An irgend einer Zwischenstelle E kann dieser Durchmesser durch Rechnung gefunden werden für das statische Moment EE_1 wie für die Momente CC_1 oder BB_1. Gewöhnlich behandelt man das Stück BC als Kegel. Wenn $BB_1 = CC_1$, so wird dieser Kegel ein Cylinder.

5. **Achse mit zwei Lasten, von denen eine außerhalb der Lager liegt.** Es sei AD die Achse mit den Lasten P und Q in B und D und den Lagern in A und C. Man denke sich die Stütze in A weg, so wird sich der Balken als Hebel um C drehen. Hierbei sind 3 Fälle möglich: Wenn das Moment Q . CD größer als P . CB, so dreht sich der Hebel in D abwärts und das Lager in A muß oberhalb der Achse angebracht werden; sind die Momente gleich, so entsteht Gleichgewicht und ein Lager in A ist überflüssig; ist aber das Moment von Q kleiner als das von P, so ist ein Lager unterhalb A nötig. Der letztere Fall werde hier zuerst vorausgesetzt.



Man bestimme die Werte x und y, ebenso die statischen Momente $BB_1 = x . AB$ und $CC_1 = y . CD$ und ziehe die Geraden AB_1, B_1C_1 und C_1D, so stellen die in den Dreiecken eingetragenen Linien, senkrecht zur Achse, die statischen Momente dar, womit die Achse in den betreffenden Stellen in Anspruch genommen wird. Dieses Moment wird in E = 0, also wird die Achse in E auch nicht gebogen, d. h. die Kurve abecd, in welche die geometrische Achse des Körpers versetzt wird, hat in e einen Wendepunkt (S. 39). Daher verjüngt sich das Stück ae von b aus nach beiden Seiten hin, ebenso ed von e aus nach beiden Seiten hin je nach kubischen Parabeln. Doch soll die Achse in e wegen des Abscherens einen gewissen Querschnitt erhalten. Die abscherende Kraft z wirkt in e nach oben und unten. Es besteht am Hebel ae mit dem Drehpunkt in a Gleichgewicht, wenn z . ae = P . ab, und am Hebel ed mit dem Drehpunkt in c, wenn z . ec = Q . cd. Hieraus kann z berechnet werden.

Beisp. Es seien P = 1800 kg, Q = 2600 kg, AB = 50 cm, BC = 120 cm und CD = 60 cm. Wie stark muß die gußeiserne Achse in A, B, E, C und D sein?

Um den Druck x zu bestimmen, denke man sich die Achse als Hebel mit dem Drehpunkt in C; alsdann besteht Gleichgewicht, wenn

$$x . 170 + 2600 . 60 = 1800 . 120, \text{ woraus } x = 353 \text{ kg.}$$

Dieser Druck, sowie der von 2600 kg in D werden, auf Gußeisen bezogen, zu 553 und 4333 kg. Daher für $l = 2d$:

Zapfendicke in A nach Tab. S. 190 . . $d = 3{,}9$ cm,
Radkopfdicke in D „ „ „ . . $d = 10{,}9$ „

Es sind ferner die statischen Momente, womit die Achse in B und C verbogen wird: $x \,.\, AB = 353 \,.\, 50$ und $Q \,.\, CD = 2600 \,.\, 60$; daher

Zapfendicke in C . . $D = 0{,}354 \sqrt[3]{2600 \,.\, 60} = 19{,}0$ cm,
Radkopfdicke in B . . $D = 0{,}354 \sqrt[3]{350 \,.\, 50} = 9{,}2$ „

Das erstere dieser Momente ist im letzten sehr annähernd 9mal enthalten, also ist auch Abstand BE in EC 9mal und somit in BC 10mal enthalten, d. h. es ist $BE = 0{,}1 \,.\, 120 = 12$ cm und $CE = 108$ cm. Damit ist die Lage der Stelle E ermittelt und man erhält, weil $AE = 62$:

$$z = 1800 \,.\, \frac{50}{62} = 1452 \text{ kg; ebenso } z = 2600 \,.\, \frac{60}{108} = 1452 \text{ kg.}$$

Wird der Modul für das Abscheren = 120 kg per 1 qcm angenommen, so muß der Querschnitt der Achse in E sein 1452 : 120 = 12,1 qcm.

Die beiden andern oben angedeuteten Fälle ergeben sich aus folgender Betrachtung. Man lasse P kleiner werden, während Q gleich bleibe, so nimmt BB_1 ab. In dem Augenblick, da $P \,.\, CB = Q \,.\, CD$ wird, verschwindet BB_1, d. h. der Punkt B_1 fällt mit B zusammen, AB_1 legt sich auf AB, E rückt nach B, so daß die ganze Momentenfläche dargestellt ist durch das Dreieck DC_1B. Der Balken wird zwischen D und B gebogen, das Stück BA aber bleibt geradlinig.

Rückt der Punkt B_1 in der Richtung von P noch weiter aufwärts, so erhält das Stück AB ein Dreieck gleich wie DCC_1, oberhalb AB gelegen und das Stück BC als Momentenfläche ein Trapez. Der Balken, in C unterhalb und in A oberhalb gestützt, erhält eine Biegung, welche auf die ganze Länge AD ihre hohle Seite nach unten kehrt.

51. Transmissionswellen.

Sie sind vorherrschend auf Torsion in Anspruch genommen und werden deshalb auch Torsionswellen genannt.

Bei massiven cylindrischen Wellen kommen folgende Formeln (S. 164) zur Anwendung:

$$(1) \quad PR = \frac{\pi s}{16} d^3; \qquad (2) \quad PR = \frac{E\pi^2}{14400} \cdot \frac{a}{L} d^4.$$

Gewöhnlich ist statt der Kraft P die Arbeit bekannt, welche die Welle überträgt. Der bezügliche Zusammenhang ist folgender. Es sei

A die Anzahl der Pferde, welche die Welle in der Sekunde fortzuleiten hat,
n die Anzahl Umdrehungen der Welle in der Minute und
v die Geschwindigkeit des Angriffspunktes der Kraft P, im Abstand R von der Achse;

so ist, wenn R in Centimetern ausgedrückt wird, wie in den Festigkeitsformeln,

Geschwindigkeitsformel . . . . $100 \,.\, 60\,v = 2\,R\pi n$,
Arbeitsformel . . . . $75\,A = Pv$.

Durch Multiplikation folgt als gesuchte Kraft

$$P = 71620 \frac{A}{Rn}. \tag{3}$$

Führt man diesen Wert von P in Formel (1), so wird

$$d^3 = \frac{364750}{s} \cdot \frac{A}{n}. \tag{4}$$

Bei Berechnung der Dicke d der Welle nach (1) oder (4) geht man von den folgenden Erwägungen aus. Lange und dünne Wellen verdrehen sich bei gegebener Spannung stark. Sinkt nun der Widerstand, den sie zu überwinden haben, plötzlich, so wickelt sich die Welle auf und veranlaßt leicht Schädigungen des Fabrikates, z. B. beim Spinnen und Weben. Man wird daher langen Wellen im allgemeinen eine schwächere Spannung geben als kurzen und bei diesen den Modul s nach dem gewünschten Grad der Sicherheit wählen.

1. **Kurze Wellen mit gegebener Spannung.** Für Werte von s, wie sie auf S. 190 angenommen sind, erhält man für

Gußeisen . $s = 230$ $PR = 45\,d^3$ $\frac{A}{n} = 0{,}00063\,d^3$

Schmiedeisen $s = 385$ $PR = 75\,d^3$ $\frac{A}{n} = 0{,}00106\,d^3$

Stahl . . . $s = 585$ $PR = 115\,d^3$ $\frac{A}{n} = 0{,}00160\,d^3$

d	Gußeisen.		Schmiedeisen.		Stahl.	
	PR	$\frac{A}{n}$	PR	$\frac{A}{n}$	PR	$\frac{A}{n}$
cm	kg-cm		kg-cm		kg-cm	
3			2025	0,029	3105	0,043
4			5300	0,068	7360	0,102
5			9375	0,131	14375	0,200
6	9720	0,136	16224	0,229	24841	0,346
7	15435	0,216	25725	0,364	39445	0,549
8	23040	0,322	42400	0,543	58880	0,819
9	32805	0,459	54675	0,773	83835	1,166
10	45000	0,630	75000	1,060	115000	1,600
12	77760	1,088	129792	1,832	198728	2,765
14	123480	1,729	205800	2,009	315560	4,390
16	184320	2,579	339200	4,342	471060	6,554
18	262440	3,672	437400	6,182	670680	9,331
20	360000	5,040	600000	8,480	920000	12,800
22	479160	6,708	798720	11,287	1224640	17,037
24	622080	8,704	1038336	14,654	1589824	23,118

Beisp. 1. Wie dick muß eine Welle sein, wenn sie am Umfang eines Rades von 35 cm Halbmesser durch eine Kraft von 2500 kg verdreht wird?

Hier ist das statische Moment PR = 2500 . 35 = 87500, daher nach Tab. Durchmesser für Schmiedeisen = 10,6 cm und dieser Durchmesser für Stahl . . . . . = 9,1 „

Beisp. 2. Welchen Effekt kann eine Welle von 7 cm übertragen, wenn sie 80 Umdrehungen per Minute macht?

Diesem Durchmesser entspricht nach der Tabelle

für Schmiedeisen $\frac{A}{n} = 0,364$; daher A = 0,364 . 80 = 29,1 Pfd.

für Stahl . . . $\frac{A}{n} = 0,549$; „ A = 0,549 . 80 = 43,9 „

2. **Lange Wellen mit schwacher Spannung.** Man nehme: für Schmiedeisen s = 210, für Stahl s = 320, so folgt

für Schmiedeisen $PR = 41\,d^3 \quad \frac{A}{n} = 0,00058\,d^3 \quad d = 12\sqrt[3]{\frac{A}{n}}$,

für Stahl . . $PR = 63\,d^3 \quad \frac{A}{n} = 0,00089\,d^3 \quad d = 10,4\sqrt[3]{\frac{A}{n}}$.

Um auch die Größe der Verdrehung zu erhalten, setze man die Werte von PR der Formeln (1) und (2) einander gleich, so folgt als Drehwinkel a, in Graden ausgedrückt

$$a = 286\,\frac{s}{E} \cdot \frac{L}{d}. \tag{5}$$

Nun nehme man: für Schmiedeisen E = 2000000, für Stahl E = 2400000 und zugleich L = 100 cm, so ergibt sich folgende Tabelle:

d	Schmiedeisen. PR	Schmiedeisen. $\frac{A}{n}$	Schmiedeisen. a	Stahl. PR	Stahl. $\frac{A}{n}$	Stahl. a
cm	kg-cm		Grade.	kg-cm		Grade.
3	1107	0,016	1,000	1701	0,024	1,525
4	2624	0,037	0,750	4032	0,057	1,144
5	5125	0,073	0,600	7875	0,111	0,915
6	8856	0,125	0,500	13608	0,192	0,763
7	11260	0,199	0,428	21609	0,306	0,654
8	20992	0,297	0,375	32256	0,456	0,572
9	29889	0,426	0,338	45927	0,649	0,508
10	41000	0,580	0,300	63000	0,890	0,459
11	54571	0,772	0,273	83853	1,185	0,416
12	70848	1,000	0,250	108864	1,532	0,381
13	90077	1,274	0,231	138411	1,955	0,351
14	112504	1,516	0,214	172872	2,449	0,327
15	138376	1,958	0,200	212625	3,004	0,305
16	167936	2,376	0,187	258048	3,645	0,286
17	201433	2,850	0,176	309519	4,373	0,156

Hiernach verdreht sich eine Welle von 6 cm Durchmesser auf 1 m Länge: von Schmiedeisen um a = 0,5 und von Stahl um a = 0,763 Grade; es macht dies auf 10 m Länge 5 und 7,63 Grade aus.

3. **Wellen mit konstanter Verdrehung.** Durch Multiplikation der Formeln (4) und (5) erhält man, wenn obige Werte von E benutzt werden,

$$\text{für Schmiedeisen} \quad . \quad . \quad d^4 = 52{,}16 \frac{A}{n} \cdot \frac{L}{a},$$

$$\text{für Stahl} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d^4 = 43{,}47 \frac{A}{n} \cdot \frac{L}{a}.$$

Nimmt man hiervon das Verhältnis L : a konstant an, z. B. so, daß auf 5 m oder 500 cm Länge 1 Grad Verdrehung kommt, und berechnet man hiernach auch die Spannung s aus (5), so ergibt sich folgende Zusammenstellung:

d	Schmiedeisen. $\frac{A}{n}$	s	Stahl. $\frac{A}{n}$	s	d	Schmiedeisen. $\frac{A}{n}$	s	Stahl. $\frac{A}{n}$	s
cm		kg		kg	cm		kg		kg
3	0,0031	42	0,0037	50	10	0,383	140	0,460	168
4	0,0098	56	0,0118	67	11	0,561	154	0,673	185
5	0,0240	70	0,0289	84	12	0,794	168	0,953	201
6	0,0498	84	0,0596	101	13	1,094	182	1,314	218
7	0,0921	98	0,1092	118	14	1,472	196	1,750	235
8	0,1571	112	0,1884	134	15	1,939	210	2,338	252
9	0,2510	126	0,3018	151	16	2,514	224	3,015	269

4. **Hohle Wellen.** Für diese sind die auf S. 164 angegebenen Formeln in Anwendung zu bringen, wobei d den äußern und d′ den innern Durchmesser bezeichnet.

5. **Wellen mit Biegung und Torsion.** Es seien s, s_1 die größten durch Torsion und Biegung hervorgerufenen Spannungen, so muß die Dicke der Welle nach dem resultierenden Modul $\sqrt{s^2 + s_1{}^2}$ berechnet werden (s. zusammengesetzte Festigkeit S. 166). Hierher gehört z. B. der Teil einer Dampfmaschinen-Welle, welcher zwischen der Kurbel und dem Schwungrad liegt, wenn dieses als Triebrolle dient.

6. **Wellenhälse.** Es sind das jene Teile der Welle, welche sich in Lagern drehen. Ihr Durchmesser soll nicht kleiner sein, als derjenige der Wellen und der specifische Druck, den sie auf das Lager ausüben, bei steigender Tourenzahl in ähnlicher Weise abnehmen wie bei Achsenzapfen (S. 189 und 191).

7. **Endzapfen.** Sie liegen am Ende einer Welle und werden in der Längenrichtung der Welle in das Lager gedrückt. Bei aufrechten Wellen sind diese Zapfen am untern Ende und tragen das Gewicht der Welle und der an ihr befestigten Teile. Es sei

r der größte Halbmesser der Reibfläche, ob sie konisch, kugelförmig oder kreisförmig sei, und

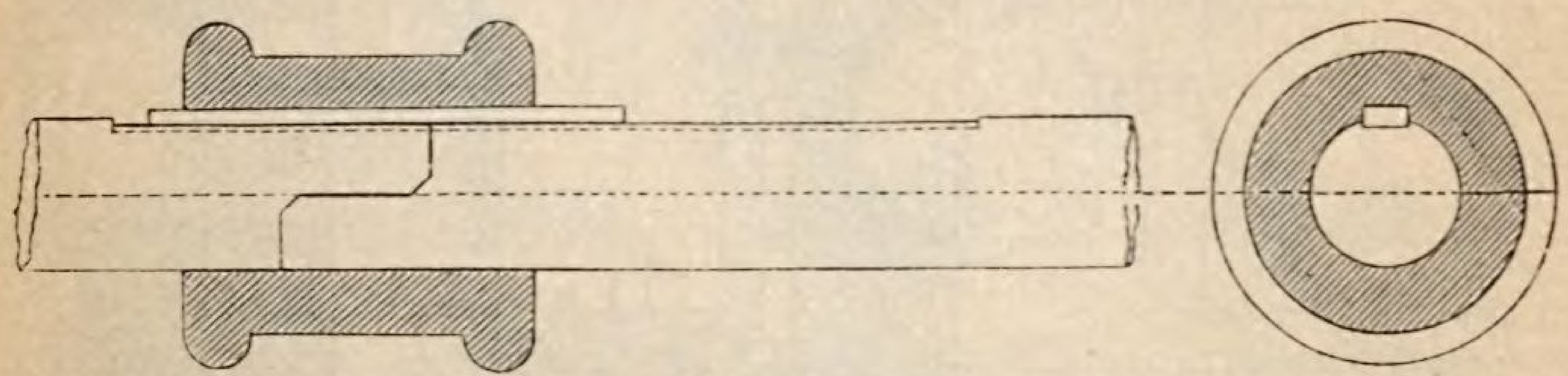
P der Längendruck der Welle gegen das Lager,

so findet man den specifischen Druck, wenn P durch $r^2\pi$ dividiert wird. Dieser specifische Druck soll mit wachsender Tourenzahl abnehmen, und bei Berührungsflächen aus Schmiedeisen, Gußeisen oder Messing per 1 qcm höchstens betragen

bei Zapfen, die sich langsam drehen . .	150–100 kg
bei Zapfen mit mittlerer Geschwindigkeit .	80– 50 „
bei Zapfen mit großer Geschwindigkeit .	30– 15 „

Bei Zapfen von harten Metallen kann dieser Druck bis 2mal größer genommen werden. Je kleiner übrigens die Durchmesser dieser Zapfen sind, um so sorgfältiger und stetiger muß geschmiert werden.

8. **Kupplungen.** Sie verbinden zwei an einander stoßende, in gerader Richtung liegende Wellenstücke. Die Kupplungen sind feste und lösbare. Bei den festen werden gewöhnlich Hülsen (Muffe) ange-



wendet. Diese sind entweder ganz, d. h. sie reichen über beide Wellenteile oder sind geteilt. Die Befestigung der Kupplung auf den Wellenstücken erfolgt durch Verkeilen, der zweiteiligen Muffe unter einander durch Verschrauben. Keile und Schrauben sind auf Abscheren in Anspruch genommen.

Die lösbaren Kupplungen (Ausrückvorrichtungen) bestehen aus zweiteiligen Hülsen, wovon die eine auf der Welle in der Längenrichtung verschiebbar ist. Das Ineinandergreifen erfolgt durch Zähne (Klauen) oder durch Reibung (Friktionskupplung).

Die Dimensionen der Muffe sind empirische. Für ganze Muffe kann man nehmen:

Länge der Hülse . . . . $= 2\,d + 2{,}5$ cm

Wanddicke derselben . . . . $= \frac{1}{3}\,d + 0{,}5$ „

52. Achsen- und Wellenlager.

Wellen und Achsen erhalten ihre gesicherte Stellung durch die Lager. Um die Reibung der Zapfen in den Lagern möglichst zu vermindern, soll die geometrische Achse der Zapfen und Hälse zusammenfallen mit

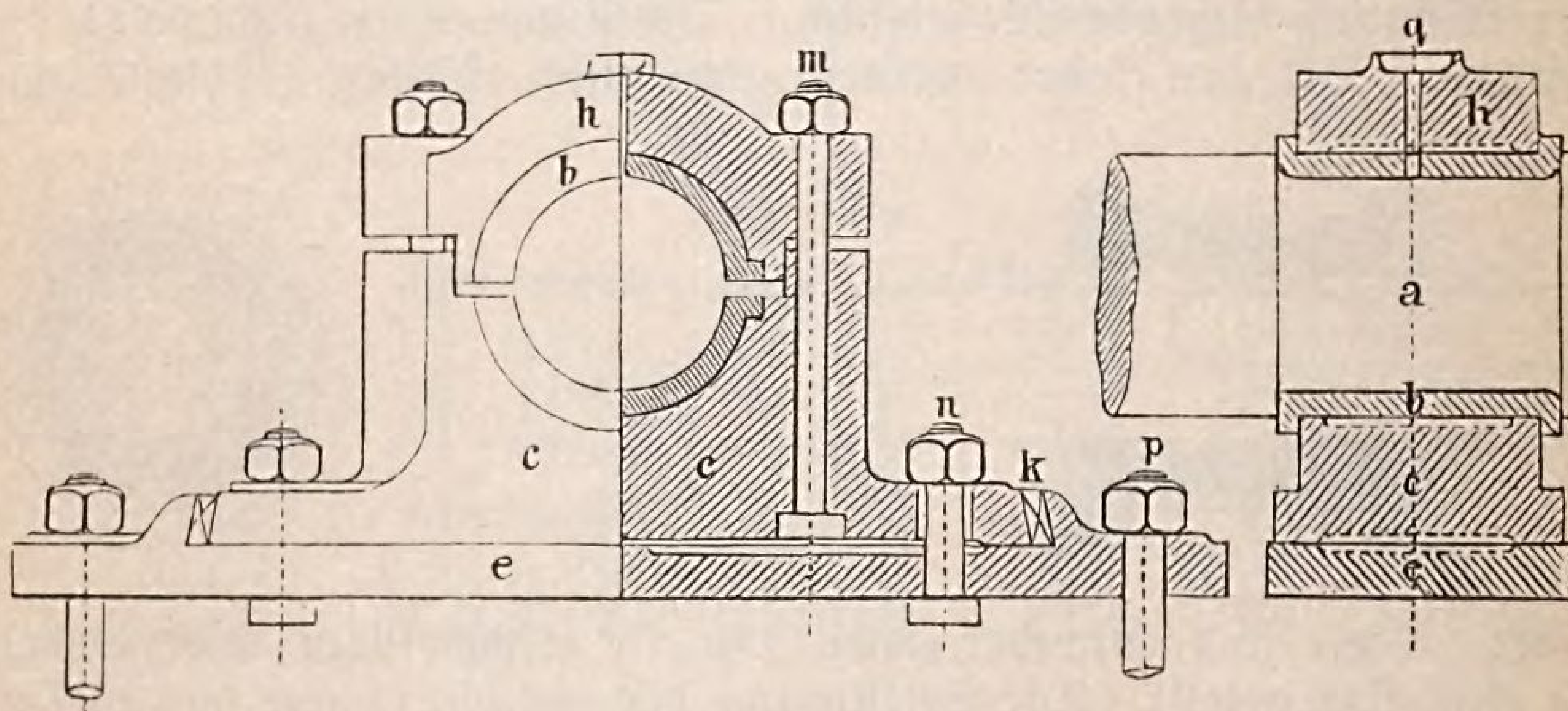
der geometrischen Achse der Lagerbohrung; zudem soll die Auflagfläche genügend groß sein, damit das angewendete Schmiermittel nicht weggedrückt wird.

Man unterscheidet Stehlager (mit Druck des Zapfens quer zur Länge), Fußlager (mit Druck in der Längenrichtung des Zapfens), Wandlager, Hänglager, Lager mit oder ohne Gestelle, Lager für cylindrische Zapfen, Kugelzapfen, Spitzzapfen 2c.

Die Dimensionen der Lager sind wesentlich empirische, d. h. sie werden meistens durch Erfahrung ermittelt und weniger durch Theorie. Gute Muster sind deshalb maßgebend.

1. Stehlager. Sie umfassen die cylindrische Oberfläche der Zapfen und Wellenhälse. In beistehender Figur sind: a Wellzapfen, b Lagerfutter, in welchen der Zapfen läuft; sie können leicht ersetzt werden,

$^1/_{10}$ der natürlichen Größe.



wenn sie abgenutzt sind; c Lagerkörper; h Lagerdeckel; bei größeren Lagern greift er wie hier in den Lagerkörper ein, um eine Verschiebung nach rechts oder links zu verhindern; m Schrauben, um Deckel und Lager zusammenzuhalten; n Schrauben zur Verbindung der Lagerplatte mit der Bodenplatte e; p Schrauben, um die Bodenplatte am Fundament zu befestigen; k Keil zum Verschieben des Lagers nach rechts oder links; q Schmierloch.

Es sei d der Durchmesser des Wellzapfens und e die Dicke der Schale, so nimmt man gewöhnlich

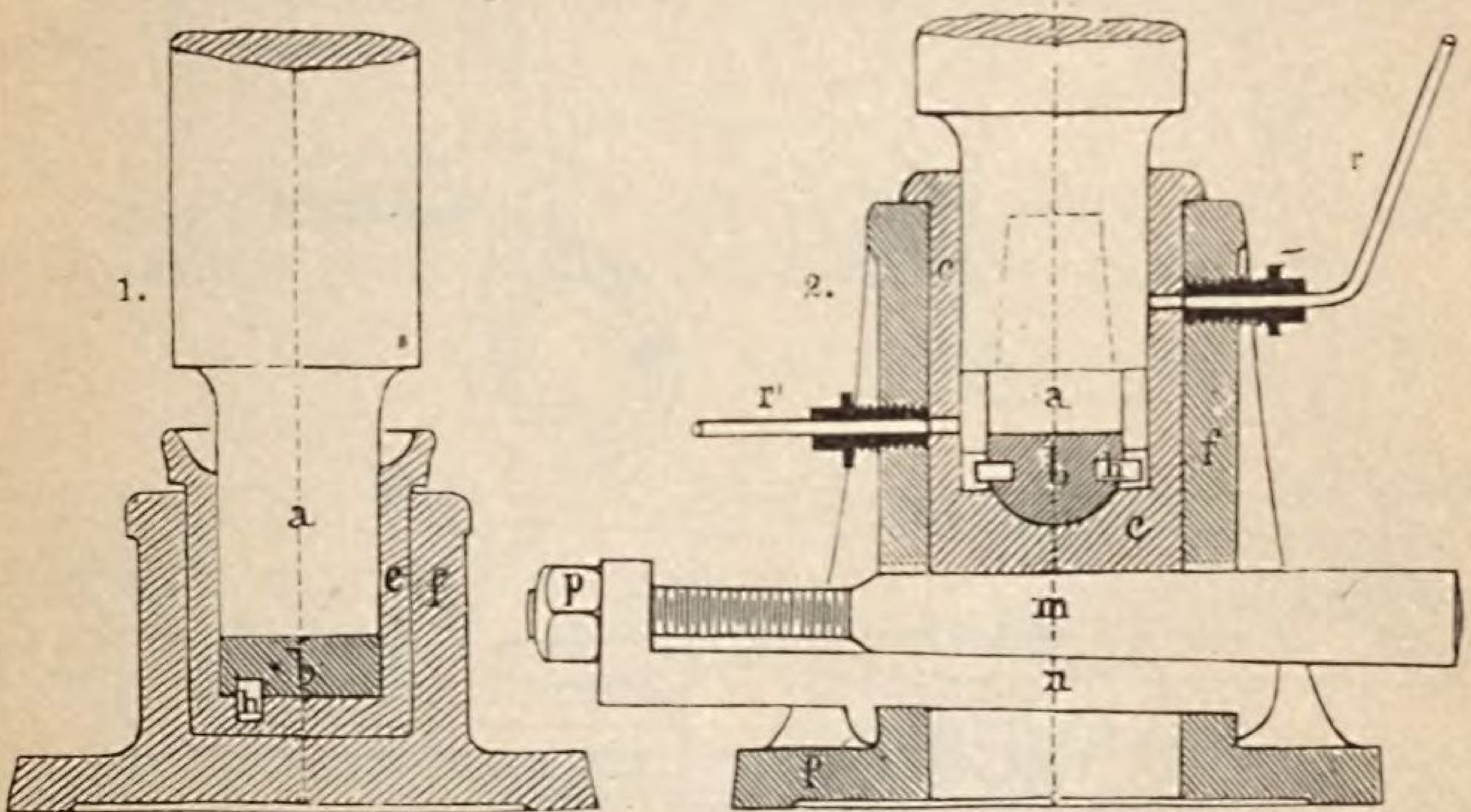
$$e = 0{,}3 + 0{,}07\ d \text{ Centimeter,}$$

für	d = 5	10	15	20	25 cm,
wird	e = 0,60	1,00	1,35	1,70	2,05 cm.

2. **Fußlager.** Die Formen dieser Lager sind sehr verschieden. Die beiden folgenden Figuren stellen zwei Hauptformen dar.

Fig. 1 ist ein Lager für gewöhnliche Transmissionswellen: a Zapfen; b Unterlage von Messing, Bronze, Gußeisen, Stahl 2c.; c Messingschale; h Stift, um die Drehung von b zu verhindern; f Lagerkörper.

Fig. 2 ist ein Lager für eine Turbinenwelle: a Zapfen von Bronze; b Unterlage von Stahl; sie ist unten kugelförmig, kann sich somit um eine horizontale Achse, welche durch die Mitte der Kugel geht, drehen, wenn die Welle oder das Lager kleine Verschiebungen annehmen; Stupf a und Platte b sollen sich in der Mitte nicht berühren, zudem sind die Berührungsflächen mit quer liegenden Oelrinnen zu versehen;



h Stift, welcher eine Drehung von b verhindert; c Metallschale, in welcher der Zapfen sich dreht; f Lagerkörper; m Keil, auf welchem die Schale c, somit auch die Welle aufliegt. Wird die Schraubenmutter p angezogen, so rutscht der Keil über die Zange n fort und treibt die Schale und die Welle in die Höhe. Hierdurch kann die Höhe der Turbine reguliert werden. r Röhrchen, um das Oel zum Zapfen zu leiten, und r′ Röhrchen, um das Oel abzuleiten.

3.

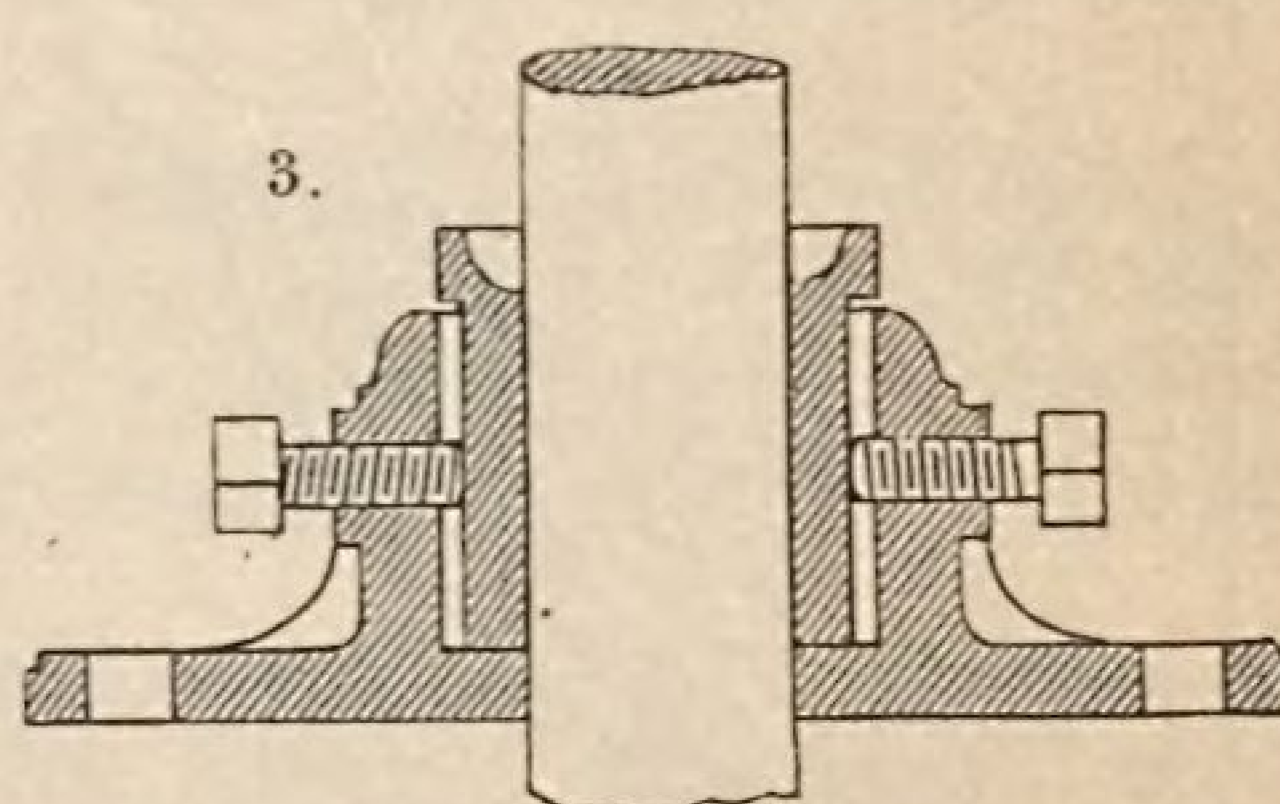
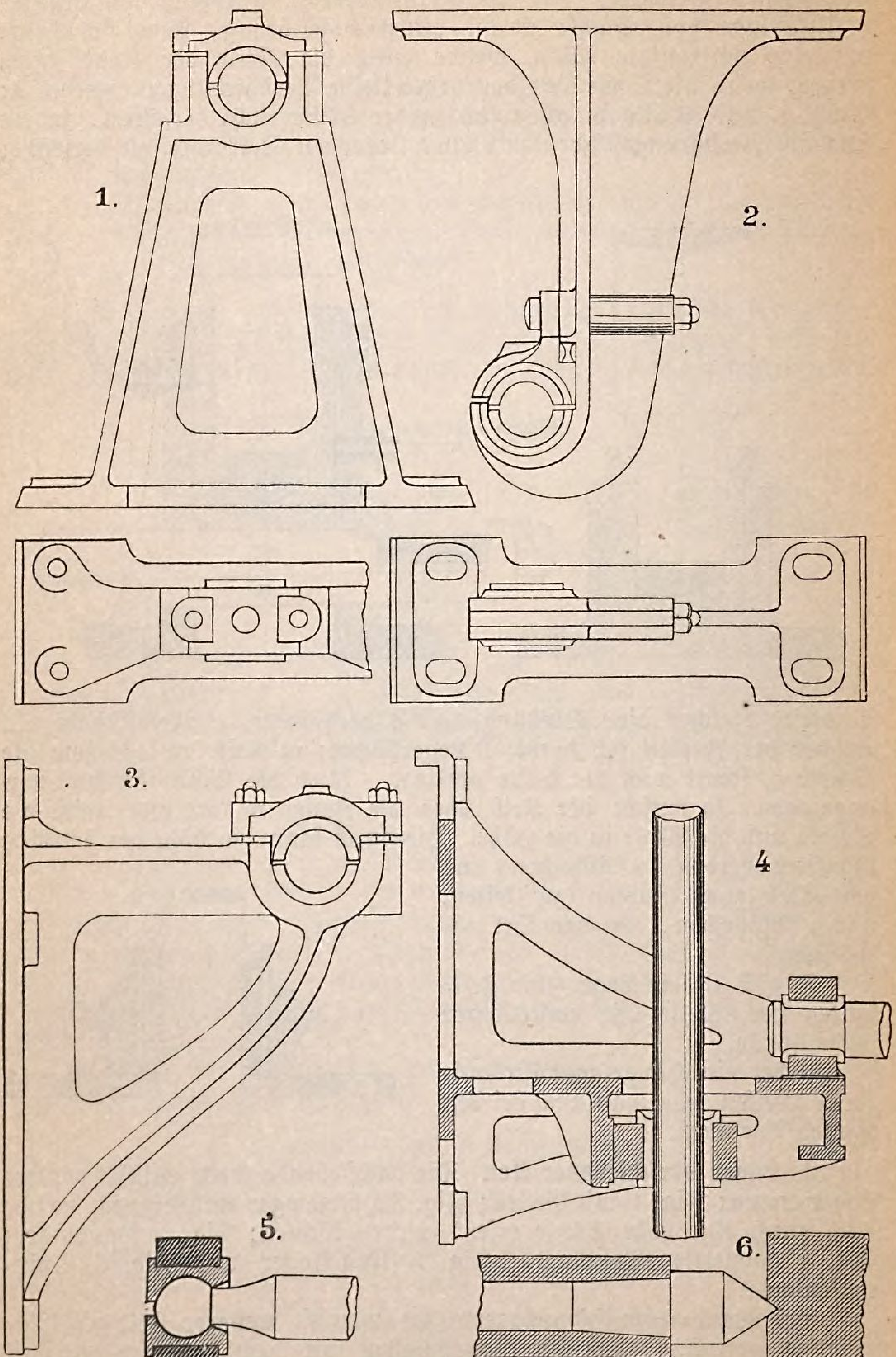


Fig. 3 ist ein Lager zum Festhalten der Welle mit verstellbarer Metallschale.

Ueber ein Hängelager für aufrechte Wellen sehe man nach bei den Girard-Turbinen.

3. **Lager verschiedener Art.** Die nachstehende Seite enthält weitere Lagerformen: Fig. 1 mit Gestell; Fig. 2 Hängelager mit Rippen, welche auch durch eine hohe Säule ersetzt werden können; Fig. 3 Wandlager; Fig. 4 doppeltes Wandlager; Fig. 5 Kugellager und Fig. 6 Spitzzapfenlager.

Bei Wand- und Hängelagern hat man in neuerer Zeit die Einrichtung getroffen, daß die Lagerschalen mit dem umgebenden Teil vertikal und horizontal verschoben und gedreht werden können.


1.
2.
3.
4
5.
6.

53. Hebel, Balancier, Kurbel.

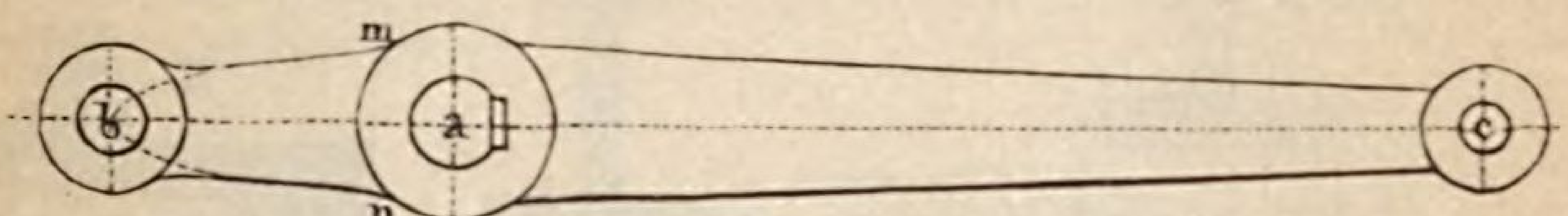
1. **Hebel.** Es seien: a die Achse, b und c die Zapfen, alle drei parallel zu einander. Mit dem Zapfen sind Stangen in Verbindung, welche in der mittleren Stellung des Hebels senkrecht zur Hebelrichtung stehen.

Die Durchmesser schmiedeiserner Zapfen sind zu berechnen nach der Formel (S. 189)

$$(1) \qquad d^2 = \frac{P}{75} \cdot \frac{l}{d}.$$

Wenn z. B. der Druck P auf die Mitte des Zapfens = 300 kg, das Verhältnis zwischen Länge und Durchmesser = 1,3, so wird

$$d^2 = \frac{300}{75} \, . \, 1{,}3 = 5{,}2; \text{ folglich } d = 2{,}3 \text{ cm}.$$



Die beiden Kräfte an den Zapfen haben eine Resultante (S. 55), gehend durch die Richtung der Achse, welche diese verbiegt. Der Durchmesser D des Achsenhalses, über dessen Mitte genommen, ist daher zu berechnen nach der Formel auf S. 191.

Wenn die Stange der Länge nach gleiche Dicke hat, so muß die Ansicht mbn derselben die Form einer gewöhnlichen Parabel (S. 158) besitzen, deren Achse ab und deren Scheitel in der Mitte von b ist, um in allen Querschnitten die gleiche Festigkeit darzubieten. Die Parabeläste ersetzt man jedoch der leichteren Bearbeitung wegen durch gerade Linien.

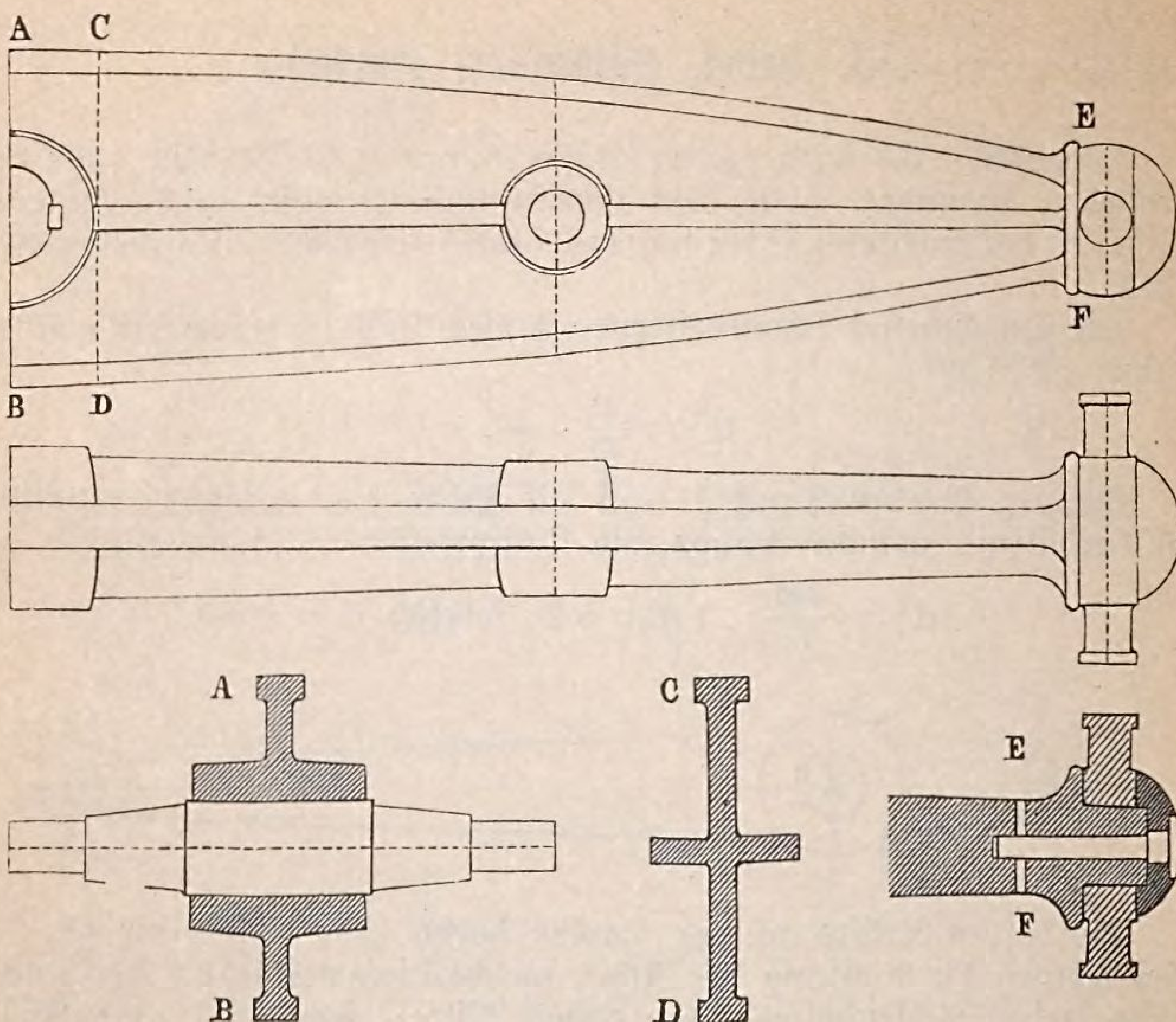
2. **Gußeiserner Balancier.** Die nachstehend angegebene Form wird häufig angewendet. AB Querschnitt durch die Achse, CD Querschnitt zunächst der Achse und EF Querschnitt durch das Kopfende, längs der Achse des Doppelzapfens. Dieser Doppelzapfen ist drehbar um einen Zapfen des Balanciers herum.

Für den Hebel und Balancier ist die Berechnung der Zapfen, der Achsen, der Höhe und Breite des Balkens dieselbe. Man kann nämlich den Querschnitt CD des Balanciers bei Berechnung seiner relativen Festigkeit sehr annähernd als Rechteck betrachten, da die Mittelrippe nur die Ausbiegung zur Seite verhindert und die obere und untere Rippe eine geringe Breite haben.

Zapfen und Achse werden berechnet wie oben beim Hebel angegeben.

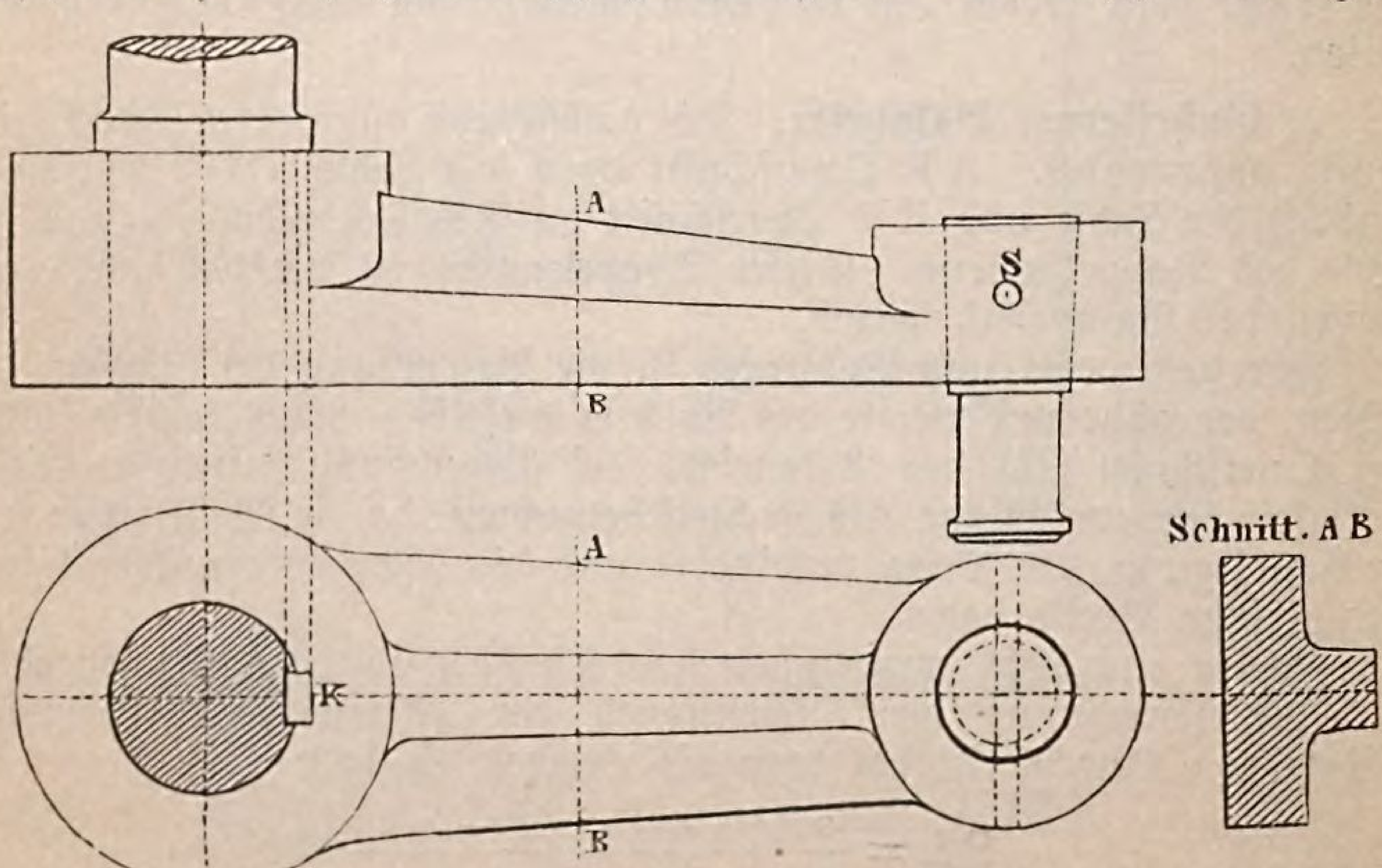
Zur Berechnung der Dimensionen der Mittelrippe mit doppel-T-förmigem Querschnitt hat man die Formel (S. 153)

$$(2) \qquad P\,L = \frac{s}{6} \cdot \frac{b_1 h_1{}^3 + b\,(h^3 - h_1{}^3)}{h},$$



worin die Größen die auf S. 153 angegebene Bedeutung haben. Gewöhnlich nimmt man für Gußeisen $s = 230$ kg; sodann wählt man b_1, h_1, h und sucht b, oder auch man nimmt b_1, b, h_1 an und sucht h u. s. w.

3. **Maschinenkurbel.** Der Durchmesser des schmiedeisernen *Kurbelzapfens* ist nach Formel (1) zu berechnen. Bei rascher Bewegung



treten indessen heftige Spannungswechsel ein, welche eine Verstärkung des Zapfens nötig machen. Man nimmt in diesem Falle in Formel (1) statt 75 die Werte 55, 40 rc.

Für stählerne Zapfen ist 75 zu ersetzen durch 115 (S. 189) und bei heftigen Spannungswechseln durch 85, 60 u. s. w.

Der Arm ist als Träger zu behandeln, der am einen Ende (der Welle) festgehalten und am andern Ende (dem Kurbelzapfen) belastet ist. Die vorstehende Figur stellt eine gußeiserne Kurbel dar. Bei der schmiedeisernen ist der Schnitt AB ein Rechteck.

Die Köpfe, mit welchen die Kurbel die Welle und den Zapfen S umfassen, sind sehr stark zu halten. Ihre Dimensionen sind empirische.

4. **Gekröpfte Welle.** Sie ist als Träger zu behandeln, welcher in den Lagern aufliegt und durch den Druck P der Schubstange gebogen wird.

5. **Excentrische Scheibe.** Sie bildet eine Kurbel, deren Länge gleich ist dem Abstand der Wellen- und Scheibenachse. Dieser Abstand heißt Excentricität.

54. Schub- und Kolbenstangen.

1. **Schubstange.** Die Länge der Schubstange (auch Lenker- und Pleuelstange genannt) richtet sich nach dem geometrischen Zusammenhang der Maschine und auch nach lokalen Verhältnissen. Bei Dampfmaschinen wird die Stange gewöhnlich 4—6mal länger als die Kurbel genommen.

Die Schubstange ist bald auf absolute, bald auf rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommen. Ihr Querschnitt ist bei schmiedeisernen Stangen nur für letztere zu bestimmen. Bei Gußeisen bestimmt man ihn für Zug und Druck und nimmt den größern Wert. Die Dimensionen dieser Querschnitte werden in der Praxis sehr verschieden gehalten.

A. Kreisförmiger Querschnitt. Es kommt folgende Formel (S. 143) der rückwirkenden Festigkeit zur Anwendung:

$$P = \frac{E\pi^3}{64} \cdot \frac{d^4}{L^2},$$

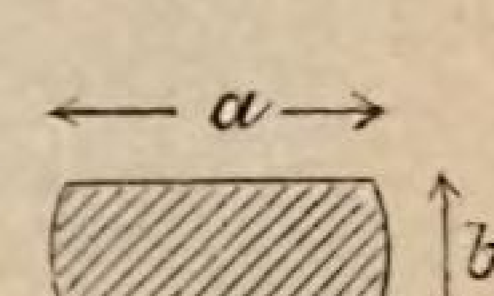
worin d den Durchmesser der Stange in der Mitte bezeichnet. Für 15fache Sicherheit setze man 15 P statt P und für Schmiedeisen E = 2000000 kg per 1 qcm Querschnitt, so erhält man

$$d^2 = 0{,}004\, L \sqrt{P}.$$

B. Rechtwinkliger Querschnitt. Aus der Formel (S. 143)

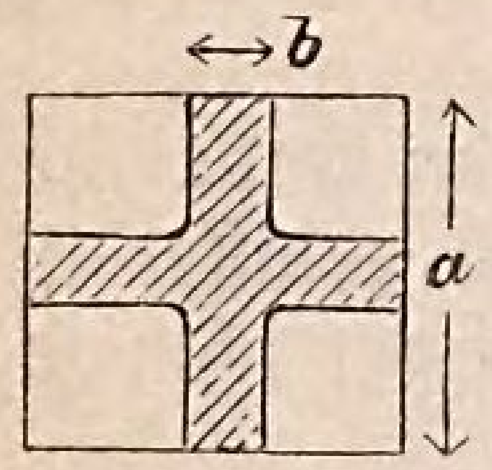
$$P = \frac{E\pi^2}{12} \cdot \frac{ab^3}{L^2}$$

folgt für Schmiedeisen, indem man wie oben verfährt:



$$ab = 0{,}003\, L \sqrt{P\left(\frac{a}{b}\right)}.$$

C. Kreuzförmiger Querschnitt. Jede Rippe sei von gleicher Höhe a und Dicke b, so findet folgende Formel der relativ rückwirkenden Festigkeit Anwendung:



$$P = \frac{E\pi^2}{12} \cdot \frac{b a^3 + (a - b) b^3}{L^2},$$

worin für 15fache Sicherheit 15 P statt P und für Gußeisen E = 900000 kg zu setzen ist.

Gewöhnlich ist b klein gegen a. In diesem Falle kann das Glied $(a - b) b^3$ im Zähler gegen $b a^3$ vernachlässigt werden. Dann wird für obige Werte

$$a^2 = 0{,}0045\, L \sqrt{P\left(\frac{a}{b}\right)}.$$

Beisp. Es sei für einen Druck von 3600 kg der Querschnitt einer Schubstange von 300 cm Länge zu bestimmen.

a) Kreisförmiger Querschnitt . . $0{,}0025 \,.\, 300 \sqrt{3600} = 45$ qcm,
daher Durchmesser der schmiedeisernen Stange . . = 7,75 cm.

b) Beim rechtwinkligen Querschnitt sei . . . . a = 2 b,
folgl. Stangenquerschn. $ab = 0{,}0024 \,.\, 300 \sqrt{3600 \cdot \frac{2}{1}} = 61$ qcm,
daher Seite . . . . b = 5,52 cm; a = 11,04 cm.

c) Beim kreuzförmigen Querschnitt sei . . . . a = 7 b,
folglich für Gußeisen $a^2 = 0{,}0045 \,.\, 300 \sqrt{3600 \,.\, 7} = 214$ qcm,
daher Seite . . . . $a = \sqrt{214} = 14{,}6$; b = 2,09 cm
und Fläche des ganzen Querschnittes . . . . . . = 56,7 qcm.

Für 3600 kg Druck und 300 cm Länge gibt die Tabelle über die Tragkraft schmiedeiserner Säulen (S. 145) nur 5,1 cm Durchmesser, während obige cylindrische Schubstange einen Durchmesser von 7,75 cm erhalten soll. Der Grund liegt darin, daß die Schubstange zahlreichen Spannungswechseln ausgesetzt ist, während die Säule nur selten solche Wechsel auszuhalten hat. Daher wurde hier 15fache Sicherheit voraus-

Fig. 1.

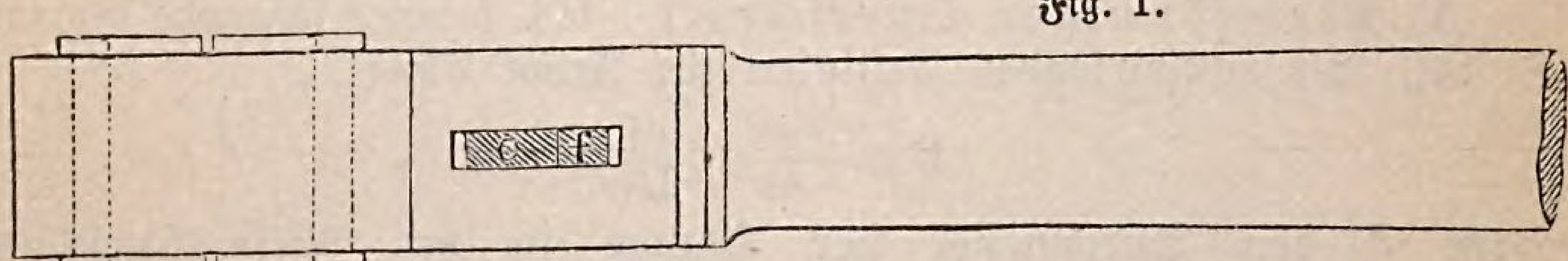
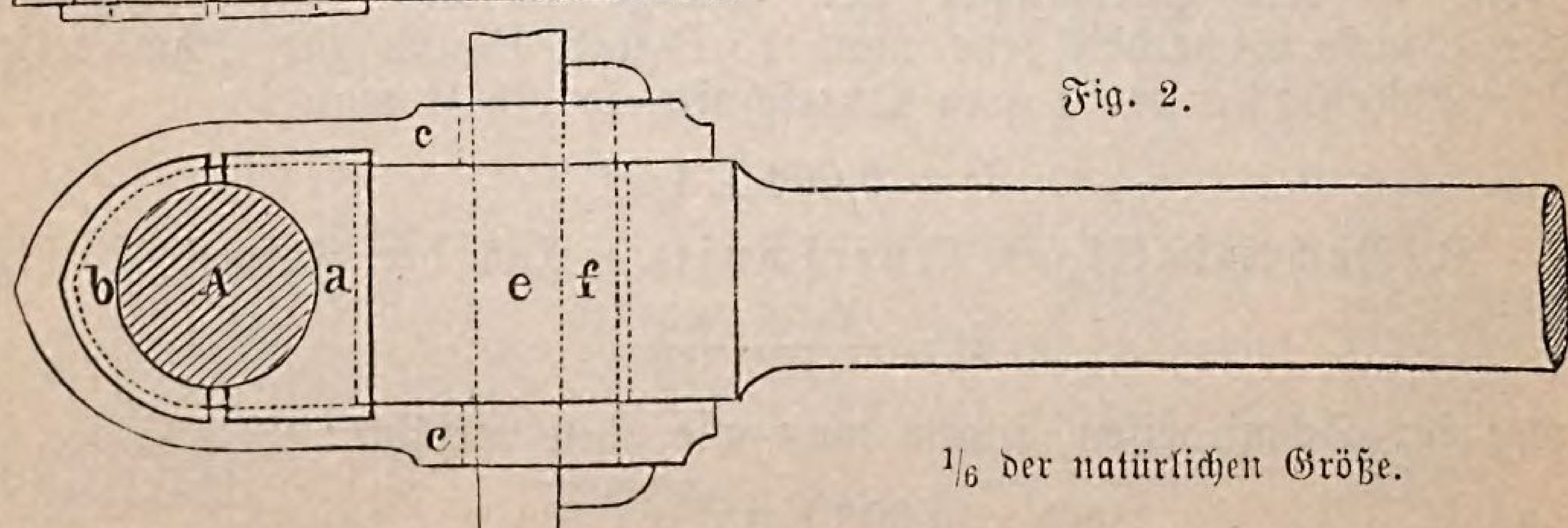


Fig. 2.



$^1/_6$ der natürlichen Größe.

gesetzt, während die Säulen auf S. 145 nur auf 6fache Sicherheit berechnet sind.

Bei der unter (c) behandelten Stange beträgt die Spannung auf Zug per 1 qcm Querschnitt 3600 : 56,7 = 63 kg, welcher Wert annähernd 1/17 vom Bruchmodul 1050 für Gußeisen ausmacht. Eine mäßige Abnahme der Größe a von der Mitte nach den Enden hin ist also zulässig.

Die vorstehenden Fig. 1 und 2 stellen dasjenige Ende einer Schubstange dar, welches mit dem Kurbelzapfen in A zusammenhängt; a, b metallene Schalen, welche den Kurbelzapfen umfassen; c, c schmiedeisernes Band, welches über die Schalen und die Stange gelegt wird; e, f Keil und Zange, um das Band mit der Stange zu verbinden.

2. **Kolbenstange.** Diese hat immer einen kreisförmigen Querschnitt. Es kann daher die unter A angegebene Formel zur Bestimmung ihres Durchmessers in Anwendung kommen.

55. Konstruktion der Zahnräder.

Ueber die Einteilung in Stirn- und Kegelräder, deren Radien, Teilung ꝛc. nachzusehen auf S. 104. Hier handelt es sich nur um die Formen und Dimensionen der Zähne, der Radkränze, Arme und Naben dieser Räder.

I. Form der Zähne.

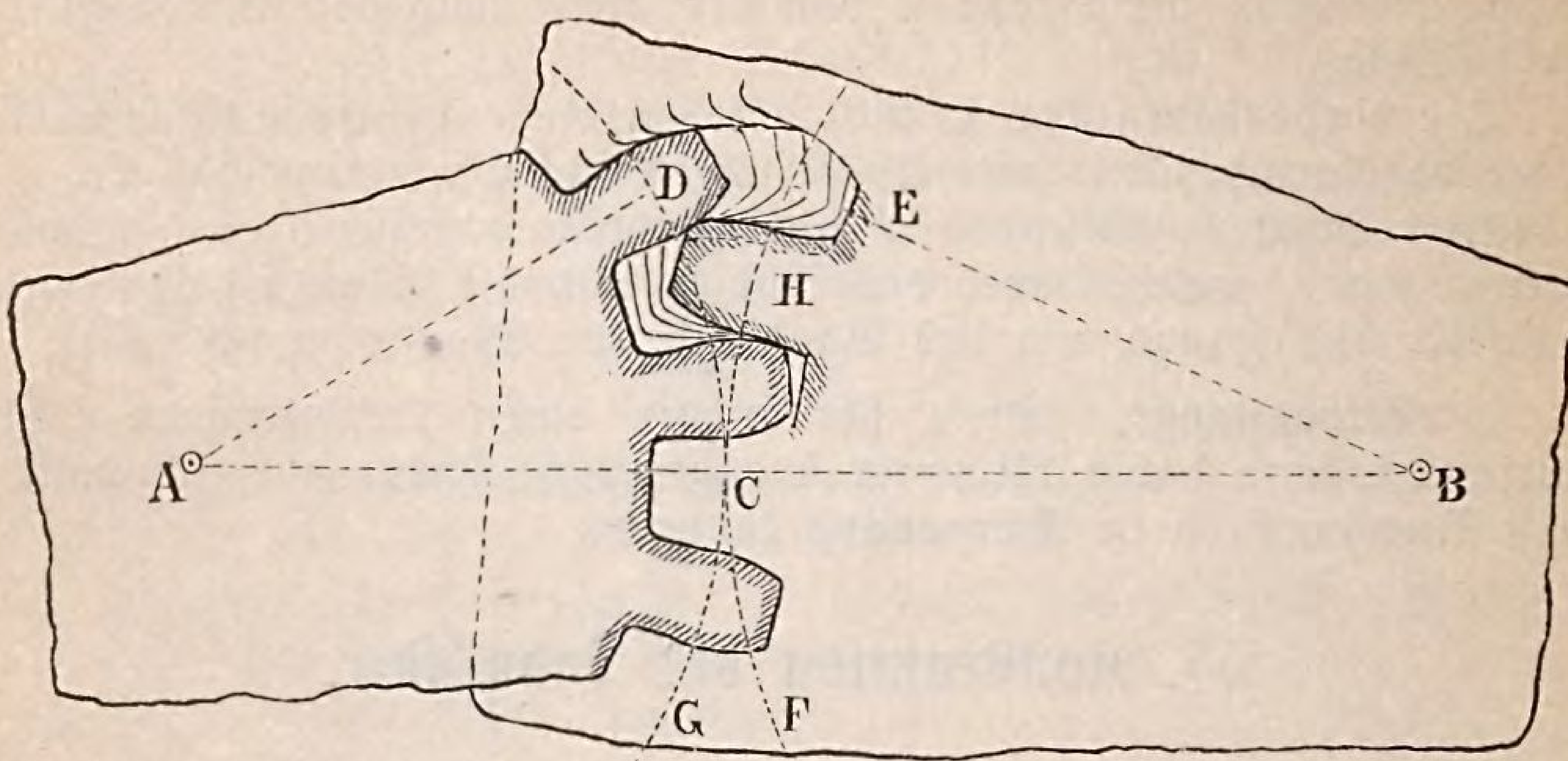
Die Zähne in einander greifender Räder sollen so geformt sein, daß die Teilkreise beider Räder in jedem Augenblick übereinstimmende Geschwindigkeiten haben. Dieser Bedingung kann nur durch richtig gewählte Zahnformen entsprochen werden. Das Eingreifen der Zähne soll ohne Stöße erfolgen; also muß die Teilung beider Räder gleich und immer mehr als Ein Zahn im Eingriff sein.

a) Verzahnung der Stirnräder.

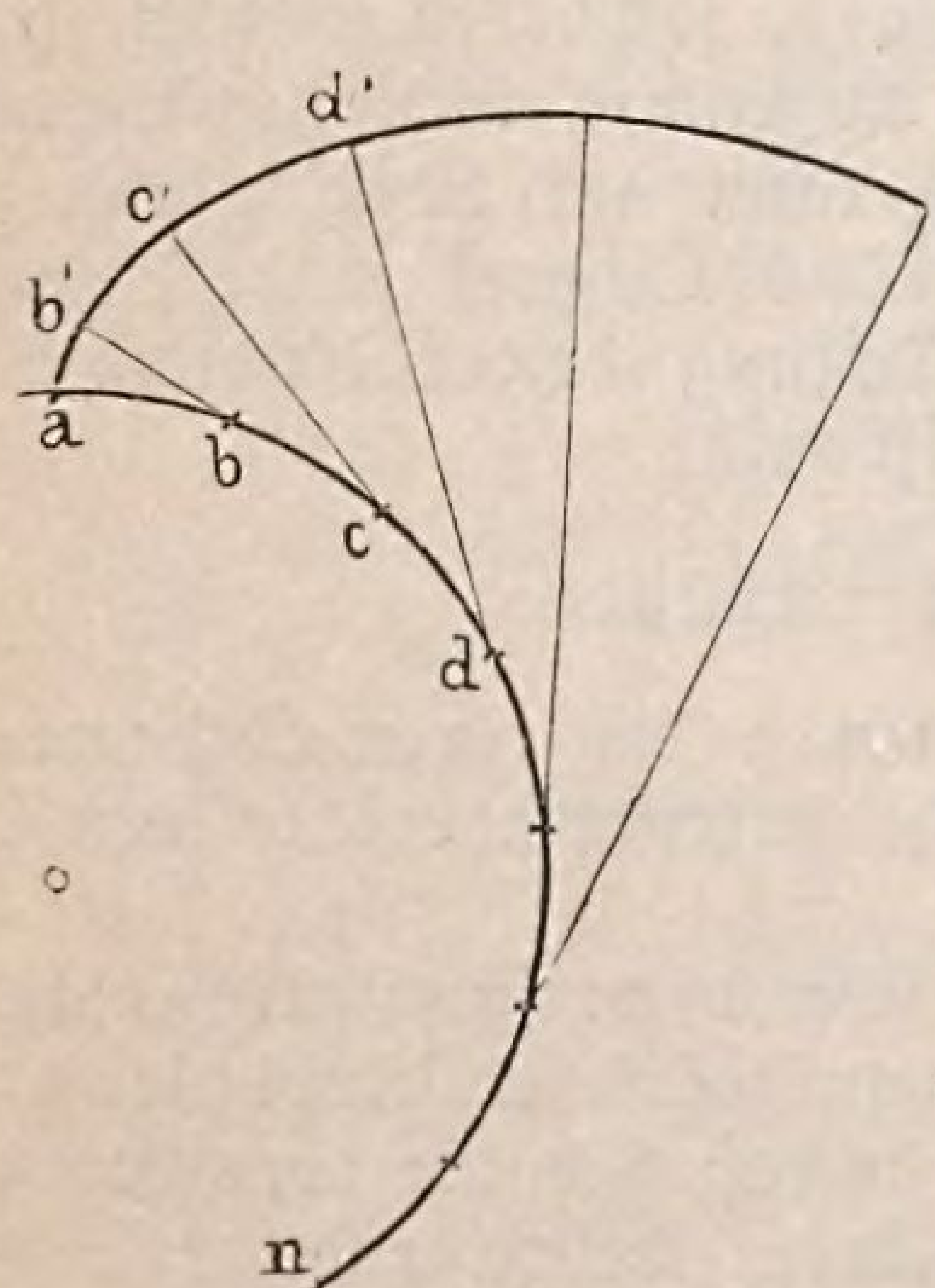
Erste Konstruktion. Es sei die Zahnform des einen Rades vorhanden oder angenommen, so kann man die Zahnform des andern auf folgende Weise bestimmen.

Man schneide entweder in Naturgröße oder in verjüngtem Maßstabe die Zahnform des ersten Rades (A) auf einem steifen Stück Papier aus; lege dasselbe auf ein zweites Stück (B), so daß sich die abgetragenen Teilkreise CG und CF beider Räder berühren; befestige beide Stücke in den Achsen A und B durch Stifte auf dem darunter liegenden Brette und drehe sie so, daß in der ersten Lage die Radien AD und BE in gerader Richtung liegen; fahre sodann mit dem Bleistift den ausgeschnittenen Zähnen nach, um dieselben auf dem untern Stück aufzutragen; drehe hierauf beide Stücke um ihre Achsen so, daß die Teilkreise um gleich viel vorrücken; verzeichne in dieser Lage die Zähne wieder und wiederhole diese drehende Verschiebung so oft, bis sich eine stetige Folge von Umrissen der Zähne auf dem unteren Stück bildet, wie die Figur

zeigt; so schließen die Umrisse diese Zahnform H des zweiten Rades ein. Man hat alsdann nur nötig, die Dicke des Zahnes H um so viel zu verringern, als der nötige Spielraum zwischen den Zähnen betragen soll. Dieses Verfahren kann auch für innere Verzahnung der Stirnräder, sowie der Zahnstange angewendet werden.



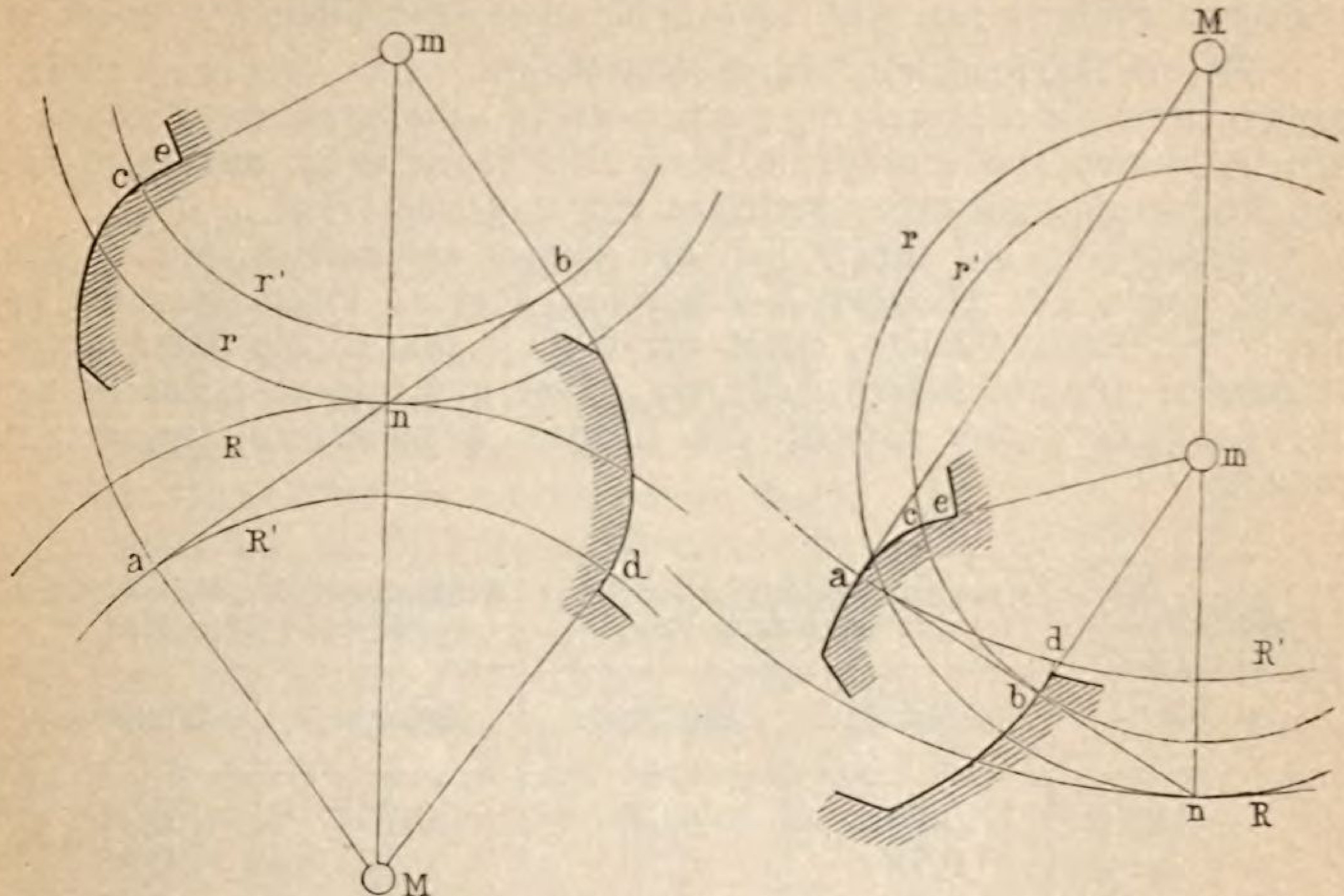
Zweite Konstruktion, durch Kreisevolventen. Es sei a b c . . . eine Kreislinie. Man mache im Punkte n dieses Kreises einen Faden fest und wickle ihn im gespannten Zustande am Kreise in der Richtung nach c und a hin auf. Er reiche gerade bis a. Wickelt man ihn nun allmählich so ab, daß er immer angespannt bleibt, so wird er in jeder Lage eine Tangente an den Kreis bilden. Es sei c′c eine solche Tangente, so wird das Fadenstück c′c gleich dem Kreisbogen a c sein. Bei diesem Abwickeln beschreibt der Endpunkt a des Fadens eine Kurve, welche Kreisevolvente heißt.



Man trage sehr kleine Bogen a b, b c, c d, . . . auf dem Kreise ab, lege durch die Punkte b und c eine Gerade c b b′, ebenso durch c und d die Gerade d c c′ u. s. w., beschreibe von b aus den Kreisbogen a b′, von c aus den Bogen b′c′, von d aus den Bogen c′d′ u. s. w., so erhält man sehr annähernd die gesuchte Kurve. Nach dieser Kurve können die Zähne der Räder geformt werden, wie Nachstehendes zeigt.

Es seien M, m die Mittelpunkte der Teilkreise beider Räder, n der Berührungspunkt und R, r die Radien der Teilkreise. Man ziehe durch n eine Gerade a b, welche die Centrallinie M m unter einem spitzen Winkel schneidet, errichte auf a b die Senkrechten M a, m b, beschreibe von M und m aus Kreise durch a und b, so verhalten sich die Radien R′ und r′ dieser Kreise wie die Radien der Teilkreise (wegen der Aehnlichkeit der

Dreiecke M a n und m b n). Nun sei von a nach b ein Faden gespannt. Man schneide ihn in a entzwei und wickle ihn auf dem Kreise b c auf, so beschreibt sein Endpunkt die Kreisevolvente a c. Schneidet man ihn



in b durch und wickelt ihn auf den Kreis a d, so beschreibt der Endpunkt b die Kreisevolvente b d.

Formt man die Zähne der Räder nach diesen Kurven, so wird folgende Bedingung erfüllt: Zwei im Eingriff befindliche Zähne berühren sich in einem Punkt, der immer in der Geraden a b liegt. Dadurch wird die Umfangsgeschwindigkeit der beiden Kreise R′, r′ in jedem Augenblick gleich groß, also auch die der Teilkreise R, r.

Fällt der Fuß eines Zahnes innerhalb einer der beiden Kreise R′, r′, wie z. B. bei c e, so gibt man diesem Einschnitt c e die Richtung des Radhalbmessers.

Die gleiche Konstruktion gilt noch, wenn der eine Teilkreis, z. B. der mit dem Radius R, geradlinig, also $R = \infty$ wird. In diesem Fall wird das Rad zur Zahnstange. Alsdann rückt der Punkt a der Geraden a n unendlich weit von n weg, so daß die Evolvente b d zur Geraden wird, welche in die Richtung m b fällt.

Von der Neigung der Geraden a b zur Centrallinie M m hängt die Dauer des Eingriffes ab.

Zahnräder, welche gleiche Teilung haben und mit Evolventenzähnen versehen sind, haben immer einen richtigen Eingriff, sobald bei diesen Rädern die Linien n b und n a gleiche Neigung zur Centrallinie haben, d. h. sobald die Radien R′, r′, auf welchen die Faden aufgewickelt sind, sich verhalten wie die Radien R, r der Teilkreise. Es ist deshalb zweckmäßig, die Stellung der Geraden a b für alle Räder mit

gleicher Teilung gleich zu nehmen. Gewöhnlich macht man den Winkel bmn = aMn = 15 Grade.

Die Entfernung der Achsen zweier Räder, welche Evolventenzähne haben, kann unbeschadet des richtigen Eingriffes innerhalb kleiner Grenzen verändert werden. Nur wird dadurch die Dauer des Eingriffes verändert.

Dritte Konstruktion, durch Kreisbogen. Die krummen Linien, welche einen Zahn begrenzen, weichen streng genommen von Kreisbogen ab; sie können aber annähernd durch Kreisbogen ersetzt werden, sobald die Krümmungshalbmesser derselben richtig gewählt sind.

Bildet man den innern Teil des Zahnes aus Radien, d. h. Linien, welche gegen den Mittelpunkt des Rades laufen, indem man ihn da, wo er den Kranz berührt, etwas verstärkt, so können die Krümmungshalbmesser für die äußern Teile der Zähne aus folgender Tabelle von Redtenbacher (die Schrift als Einheit angenommen) entnommen werden.

Verhältnis der Radien der Räder.	Krümmungshalbmesser der Zähne für das kleinere Rad.		Krümmungshalbmesser der Zähne für das größere Rad.	
	Stirnrad.	Winkelrad.	Stirnrad.	Winkelrad.
1 : 1	0,75	0,75	0,75	0,75
5 : 4	0,73	0,70	0,77	0,80
4 : 3	0,71	0,68	0,79	0,82
3 : 2	0,70	0,65	0,80	0,85
2 : 1	0,67	0,60	0,83	0,90
3 : 1	0,63	0,55	0,87	0,94
4 : 1	0,60	0,53	0,90	0,97
5 : 1	0,58	0,52	0,92	0,98
10 : 1	0,55	0,51	0,95	0,99
unendlich : 1	0,50	0,50	1,00	1,00

Die Krümmungshalbmesser liegen nach der Tabelle für das kleinere Rad zwischen $^3/_4$ und $^1/_2$, für das größere zwischen $^3/_4$ und 1 der Schrift. Der unendlich große Durchmesser entspricht der Zahnstange. Die Summe beider Krümmungshalbmesser ist gleich dem $1^1/_2$fachen der Teilung.

Man zeichne die Teilkreise auf; ebenso zwei Hilfskreise, welche im Berührungspunkt der Teilkreise diese berühren und durch die Mittelpunkte der Teilkreise gehen. Nun trage man vom Berührungspunkt aus eine Teilung ab: auf dem größern Teilkreis z. B. links, auf dem kleinern nach rechts und ziehe von den Endpunkten dieser Stücke Radien der Teilkreise; wo diese die Hilfskreise schneiden, geht der innere geradlinige Teil der Zähne in den kreisförmigen über.

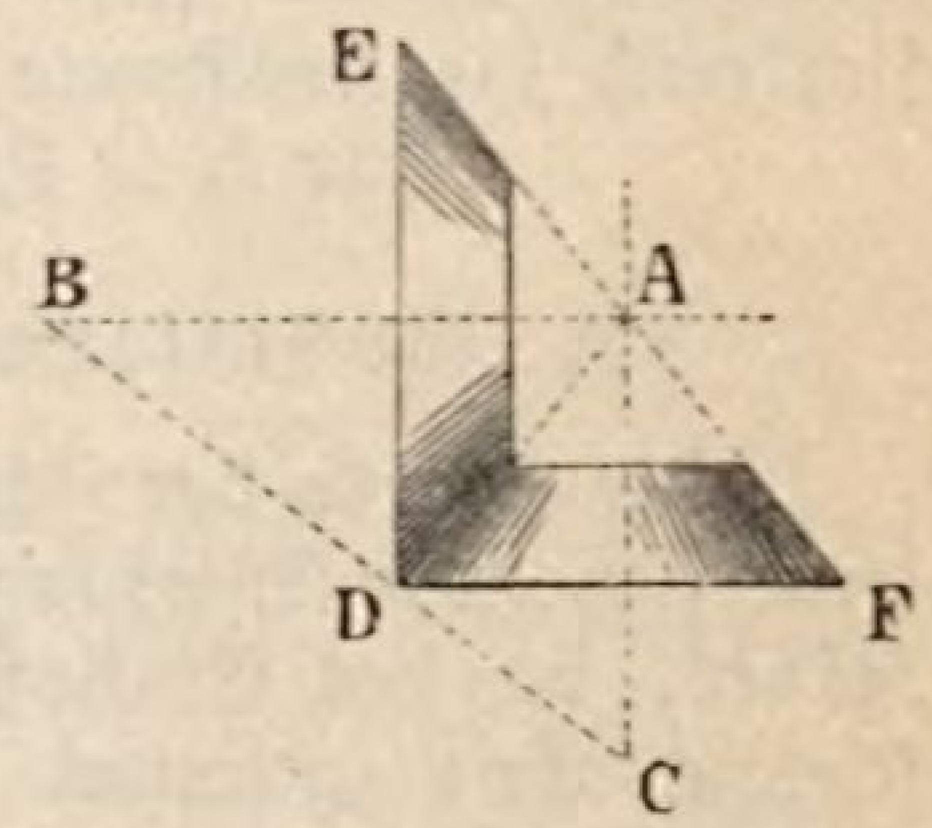
Beisp. Es seien die Radien zweier in einander greifender Räder 1,5 m und 0,8 m, ferner die Schrift 7 cm. Wie groß sind die Krümmungshalbmesser für die Abrundung der Zähne?

Es ist das Verhältnis der Radien 1,5 : 0,8 oder 1,87 : 1, welches zwischen den in vorstehender Tabelle aufgenommenen Verhältnissen 2 : 1 und 3 : 2 liegt. Daher erhält man als Krümmungshalbmesser:

für das größere Rad = 0,822 . 7 cm = 5,754 cm,
für das kleinere Rad = 0,678 . 7 cm = 4,746 cm.

b) Verzahnung der Kegelräder.

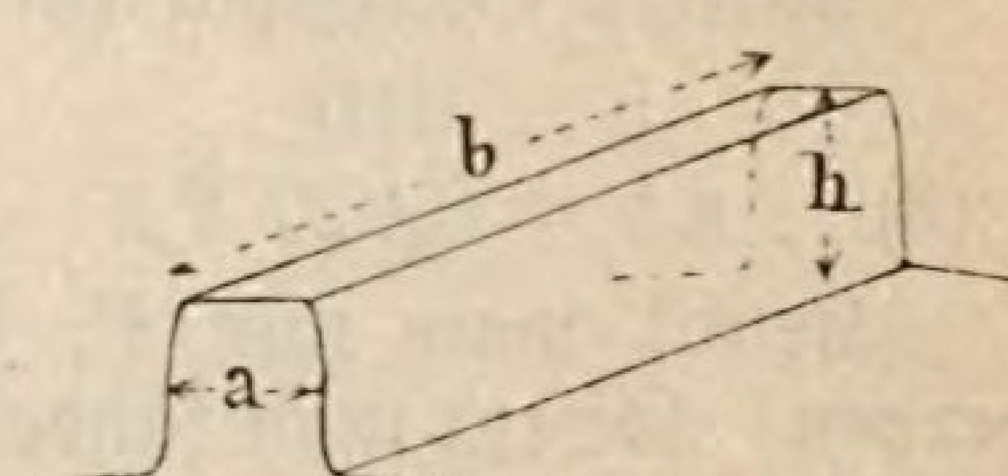
Es seien ED und FD die äußern Grundflächen der abgekürzten Kegel, welche den Winkelrädern als Grundform dienen, so betrachtet man die Umfänge dieser Kreise als Teilkreise und ihre Radien als Radien der Räder. Man ziehe BC durch D senkrecht auf die Kegelkante DA und denke sich das Dreieck ADB um die Achse AB gedreht, so beschreibt DB die Mantelfläche eines Kegels, auf welcher die Zahnformen aufzutragen sind. Dieser Kegel mit der Kante DB heißt Hilfskegel. Dem andern Rade entspricht ein Hilfskegel mit der Kante DC. Man wickle die Mantelflächen dieser Hilfskegel ab und breite sie in eine Ebene aus, so hat man auf ihr die Zahnformen so zu konstruieren wie für zwei Stirnräder mit den Radien DB und DC.



II. Dimensionen gußeiserner Zähne.

Da die Zähne als Prismen betrachtet werden können, deren eines Ende am Radkranz festgehalten und deren anderes belastet ist, so sind sie nach folgender Formel zu berechnen:

$$(1) \qquad P = \frac{s}{6} \frac{b a^2}{h}.$$



P Druck auf den Zahn,
s Modul für Biegungsfestigkeit,
a, b, h Dicke, Breite und Höhe des Zahns.

Die gewöhnlichen Verhältnisse der Dimensionen unter einander sind:

Breite der Zähne	= 4 — 8mal die Dicke.
Höhe der Zähne	$= \frac{12}{10} - \frac{16}{10}$mal die Dicke.
Höhe über dem Teilkreise	$= \frac{5}{11}$ der Zahnhöhe.
Höhe unter dem Teilkreise	$= \frac{6}{11}$ " "
Spielraum zweier eingreifender Zähne	$= \frac{1}{12}$ von der Dicke.
Zahnlücke auf dem Teilkreise. . . .	$= \frac{13}{12}$ " " "
Teilung oder Schrift	$= \frac{25}{12}$ " " "

Die kleinere Breite wird bei Handbetrieb, die größere, der raschen Abnutzung wegen, bei schnell und anhaltend laufenden Rädern angewendet; die kleinere Höhe bei starkem, die größere bei schwachem Druck. Ueberhaupt richten sich diese Verhältnisse nach den Umständen, unter welchen die Uebertragung der Bewegung erfolgen soll.

Setzt man in (1) als Mittel der oben angegebenen Werte h = 1,4 a, so wird

$$(2) \qquad a\,b = 8{,}4\,\frac{P}{s}.$$

Hieraus folgt, daß der Zahn gleiche Festigkeit beibehält, wie auch Dicke a und Breite b unter einander wechseln, wenn nur das Produkt ab gleich bleibt. Für irgend ein anderes Verhältnis von h : a ändert sich auch die Konstante 8,4 in Formel (2). Sie wird z. B.

für h = 1,2 a zu 7,2; für h = 1,6 a zu 9,6.

A. Gußeiserne Zähne für Transmissionsräder.

Die Stärke der Zähne wird bedingt durch das allfällige Vorhandensein stoßender Wirkungen und durch die Umfangsgeschwindigkeit der Räder, da der Einfluß solcher Wirkungen mit dem Quadrat der Geschwindigkeit zunimmt. Es soll daher dieser Druck per 1 qcm annähernd sein:

		kg
a)	für Zahnkränze mit kleiner Geschwindigkeit . . .	350—300
b)	für Transmissionsräder mit mäßiger Geschwindigkeit	270—250
c)	für Transmissionsräder mit größerer Geschwindigkeit und mäßig stoßenden Wirkungen	230—200
d)	für Räder mit stark stoßenden Wirkungen, wie bei Hammer- und Walzwerken	170—110.

Mittelst Gleichung (2) ergibt sich nun folgende Zusammenstellung:

	s = 310,	260,	210,	168 kg.
(3)	ab = 0,027 P,	0,032 P,	0,040 P,	0,050 P.

Kennt man nun P, so kann sofort auch die Fläche ab berechnet werden. Gesetzt man fände ab = 24 qcm; nimmt man nun a = 2 cm, so wird b = 24 : 2 = 12 cm, wodurch die Zähne 6 mal breiter als dick ausfallen.

Nähme man a = 1,8 cm, so würde b = 24 : 1,8 = 13,3 cm u. s. w.

Ist aber der Druck P nicht bekannt, so kann er berechnet werden mittelst Gleichung (3), S. 194. Für D = 2 R ist dieselbe

$$(4) \qquad P = 143240\,\frac{A}{D\,n},$$

worin D den Durchmesser des Rades in Centimetern,
n die Anzahl Umgänge per Minute und
A die Anzahl der zu übertragenden Pferde bedeutet.

Man kann die Resultate aus (4) und (3) in folgende Tabelle bringen. Es werden passende Werte von $\frac{A}{D\,n}$ angenommen, daraus mittelst (4) P berechnet und hierauf mittelst (3) die Größe ab bestimmt.

Tabelle
über die Stärke gußeiserner Zähne (für h = 1,4 a).

$\frac{A}{D\,n}$	P	Werte der Zahnfläche a b für s = 310	s = 260	s = 210	s = 168
0,0006	86	2,32	2,75	3,34	4,30
0,0007	100	2,70	3,20	4,00	5,00
0,0008	115	3,11	3,68	4,60	5,75
0,0009	129	3,48	4,13	5,16	6,45
0,0010	143	3,86	4,58	5,72	7,15
0,0012	172	4,64	5,50	6,88	8,60
0,0014	201	5,40	6,43	8,64	10,05
0,0016	229	6,21	7,33	9,16	11,45
0,0018	258	6,97	8,26	10,32	12,90
0,0020	286	7,72	9,15	11,44	14,30
0,0024	344	9,29	10,97	13,76	17,20
0,0028	401	10,80	12,83	16,04	20,05
0,0032	458	12,37	14,66	18,32	22,90
0,0036	516	13,93	16,51	20,64	25,80
0,0040	573	15,47	18,34	22,92	28,65
0,0046	659	17,79	21,09	26,36	32,95
0,0052	745	20,12	23,84	29,80	37,25
0,0058	831	22,44	26,59	33,24	41,55
0,0064	917	24,76	29,34	36,98	45,85
0,0070	1003	27,00	32,10	40,12	50,15
0,0078	1117	30,86	35,74	44,68	55,85
0,0086	1232	33,26	39,42	49,28	61,60
0,0094	1347	36,37	43,10	53,88	67,35
0,0102	1461	39,47	46,75	58,44	73,05
0,0110	1576	42,55	50,43	63,04	78,80
0,0120	1719	46,41	55,01	68,76	85,95
0,0130	1862	50,27	59,58	74,48	93,10
0,0140	2005	54,00	64,16	80,20	100,25
0,0150	2149	58,02	68,77	85,96	107,45
0,0160	2292	61,88	73,34	91,68	114,60
0,0175	2507	67,69	80,22	100,28	125,35
0,0190	2722	73,49	87,12	108,88	136,10
0,0205	2936	79,27	93,95	117,44	146,80
0,0220	3151	85,08	100,83	126,04	157,55
0,0235	3366	90,88	107,71	134,64	168,30

Beisp. 1. Ein Zahnrad übertrage 10 Pferde mit 1,5 m Umfangsgeschwindigkeit. Wie dick sollen die Zähne des Rades für s = 260 sein?

Es ist die Arbeit des Rades per Sekunde . . 75 . 10 = 1,5 P,
mithin Druck auf den Zahn . . . . P = 500 kg.
Dieser Druck liegt gemäß der 4. Kolonne zwischen 458 und 516; daher wird Zahnfläche ab annähernd sein = 16,2 qcm.
Nimmt man a = 1,8 cm, so wird b = 16,2 : 1,8 = 9 cm.
Daher der Zahn 9 : 1,8 = 5mal breiter als dick.

Beisp. 2. Ein Zahnrad habe 60 Pferde zu übertragen; es besitze 180 cm Durchmesser und mache 40 Umgänge per Minute. Wie stark müssen die Zähne dieses Rades für s = 210 sein?

Für A = 60, n = 40, D = 180 wird $\frac{A}{D\,n} = \frac{60}{180 \,.\, 40} = 0,0083$.

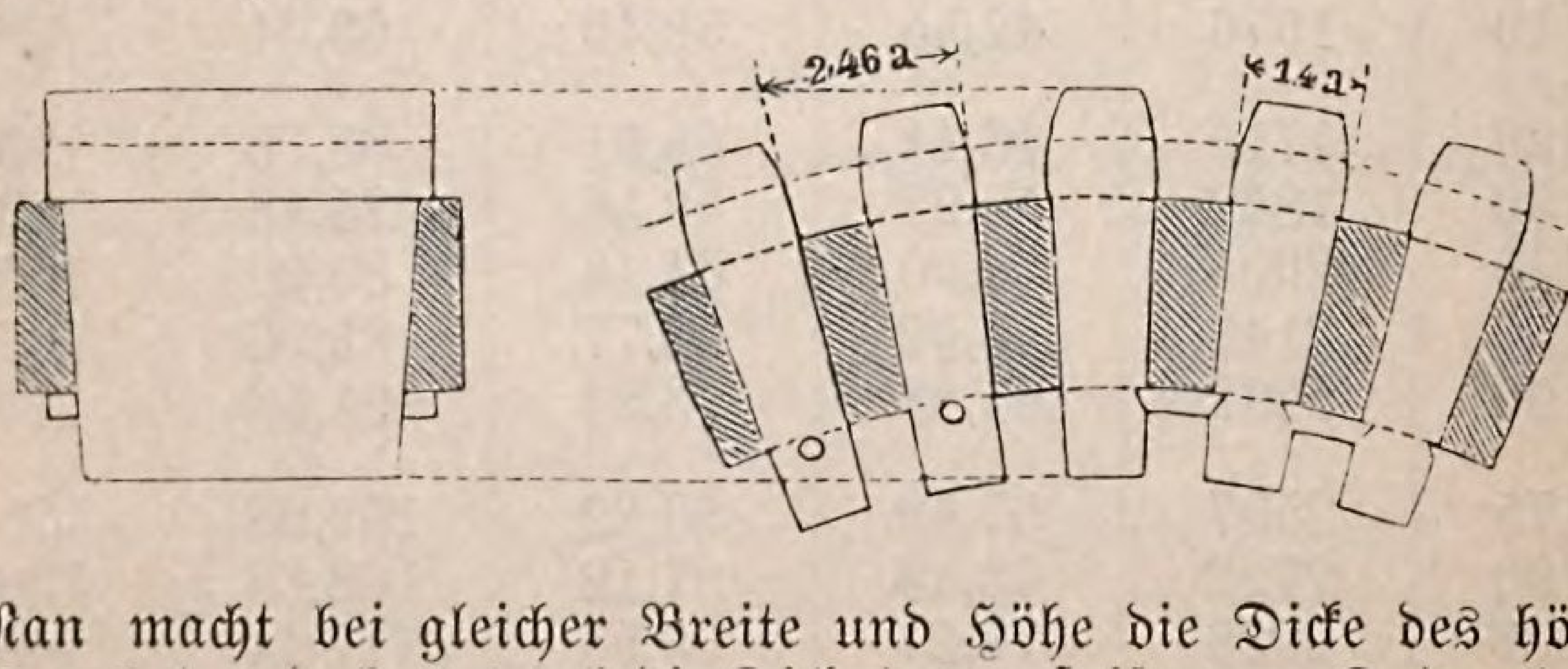
Dieser Wert 0,0083 liegt zwischen den Tabellenwerten 0,0078 und 0,0086. Dafür die Zahnfläche annähernd = 49 qcm. Für a = 2,6 cm wird daher die Breite 49 : 2,6 = 18,9 cm. Daher der Zahn 18,9 : 2,6 = 7,3mal breiter als dick. So erhält man für jede Annahme von a die entsprechende Breite. Bei dieser Zahndicke wird die Teilung $\frac{25}{12} \,.\, 2,6 = 5,4$ cm.

Nun ist der Umfang des Rades = 565,48 cm; folglich würde bei dieser Teilung die Anzahl Zähne 565,48 : 5,4 = 104,7, wofür eine benachbarte ganze Zahl genommen und die Teilung danach korrigiert wird.

Mit einiger Uebung kann man die vorstehende Tabelle auch dann noch benutzen, wenn die specifische Spannung des Materials und das Verhältnis von Höhe und Dicke des Zahnes sich in mäßiger Weise ändern.

B. Hölzerne Zähne für Transmissionsräder.

Um eine ruhige Bewegung hervorzubringen, werden sehr oft, besonders bei großer Umfangsgeschwindigkeit, die Zähne des größern Rades aus hartem Holz (meistens aus Hagebuchen- oder Mehlbaumholz) gemacht und sowohl diese Kammen als auch die eisernen Zähne des kleinen Rades genau kalibriert.



Man macht bei gleicher Breite und Höhe die Dicke des hölzernen Zahnes = 1,4 a, d. h. 1,4mal die Dicke des gußeisernen. Dadurch werden sie mit Rücksicht auf ihre größere Dicke und ihr schwächeres Material ungefähr 2mal stärker belastet als die gußeisernen. Da solche Räder,

Holz auf Eisen laufend, wenn sie sorgfältig ausgearbeitet sind, bloß cirka 0,06 a Spielraum erfordern, so wird die Schrift a + 1,4 a + 0,06 a = 2,46 a sein. Die Verbindung der Zähne mit dem Radkranze ersieht man aus vorstehenden Figuren.

C. Gußeiserne Zähne für Räder, welche durch Menschenkräfte bewegt werden.

Bei solchen Rädern, welche bei Kranen, Winden, Aufzügen ꝛc. vorkommen, kennt man gewöhnlich nur den Druck P auf die Zähne.

Wegen der stetigen Wirkung setze man als Modul s = 420 kg und führe b = 4 a und h = 1,4 a in Formel (1), so folgt, wenn noch eine Additionalgröße beigefügt wird:

$$\text{(5)} \qquad a = 0{,}2 + 0{,}07 \sqrt{P} \text{ Centimeter.}$$

Nach dieser Formel ist folgende Tabelle berechnet.

Zahndicke.	Druck.	Zahndicke.	Druck.	Zahndicke.	Druck.
cm	kg	cm	kg	cm	kg
0,8	73	1,6	400	2,4	986
1,0	130	1,8	522	2,6	1160
1,2	203	2,0	735	2,8	1393
1,4	292	2,2	816	3,0	1600

Beisp. Wenn der Kran, wie er im Beisp. 1 S. 106 angenommen wurde, für eine im Maximum zu hebende Last von 4000 kg zu konstruieren ist, so wird sein:

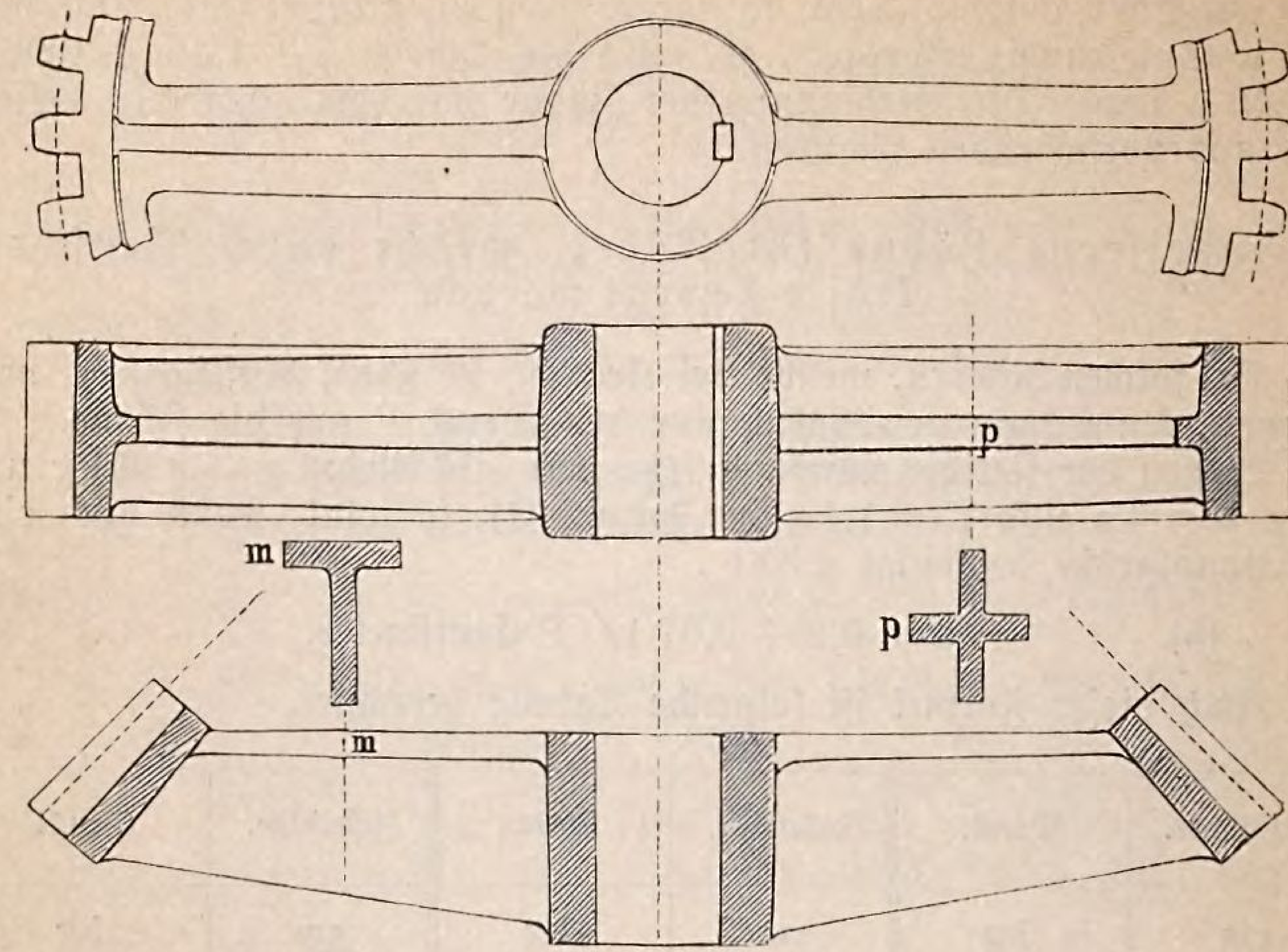
der Druck auf die Zähne des stärkeren Räderpaars = 1000 kg,
" " " " " " schwächeren " = 166 "
mithin die Dicke der Zähne für das erstere Paar = 2,4 cm,
" " " " " " " letztere " = 1,1 "
und die respektiven Zahnbreiten . = 9,6 cm und = 4,4 "

III. Kranz, Arme und Nabe gußeiserner Räder.

1. **Die Anzahl der Arme** hängt von der Größe des Rades ab. Kleinere Räder erhalten gewöhnlich 4, mittlere 6 und größere 8—10 Arme.

2. **Die gußeisernen Radarme** bestehen gewöhnlich aus zwei Rippen. Die Hauptrippe m, p (in folgenden Figuren) liegt in der Richtung der Drehung und muß eine hinreichende relative Festigkeit haben. Die andere Rippe verhindert die Seitenbewegung des Kranzes. Die Hauptrippe kann als ein Prisma angesehen werden, das am einen Ende befestigt und am andern Ende belastet ist und auf welches daher folgende Formel (S. 153) Anwendung findet:

$$\text{(6)} \qquad P = \frac{s}{6} \cdot \frac{b\,h^2}{L}.$$



Es sei A die Anzahl der Pferde, welche das Rad überträgt,
n die Anzahl Umgänge des Rades per Minute und
e die Anzahl der Radarme.

Da die Radarme einander unterstützen, so multipliziere man Formel (6) auf der rechten Seite mit e, setze b = 0,2 h und L = 0,5 D, führe in (6) den Wert von P aus (4) ein, so folgt für die Spannung s = 260; 210 und 168 kg als Armbreite

$$h = 20{,}2\sqrt[3]{\frac{A}{en}}; \quad h = 21{,}7\sqrt[3]{\frac{A}{en}}; \quad h = 23{,}3\sqrt[3]{\frac{A}{en}}.$$

Diese Werte sind quer über die Mitte der Nabe verstanden. Nach außen wird die Rippe um annähernd $^1/_4$ verjüngt.

Nach dieser Formel ist die Tabelle S. 215 berechnet.

Beisp. Für ein Rad, das 30 Pferde mit 50 Umgängen per Minute überträgt und 6 Arme erhalten soll, ist

$$A = 30, \quad n = 50, \quad e = 6, \quad \frac{A}{en} = \frac{30}{6 \cdot 50} = 0{,}1.$$

Statt 0,1 findet man in der Tabelle für das leichtere Rad 0,0882 und 0,1209 als nächste Werte. Mithin liegt die Armbreite zwischen 9 und 10 cm. Daher wird die Breite des Armes annähernd 9,4 und die Dicke desselben = 9,4 : 5 = 1,9 cm betragen.

3. **Die Dicke des Kranzes** eines Rades mit eisernen Zähnen soll gleich der Zahndicke sein. Den Kranz eines Stirnrades versieht man gewöhnlich noch mit einer verstärkenden Rippe in der Mitte. Ueber den Kranz eines Rades mit hölzernen Zähnen siehe die Figuren auf S. 210.

Armbreite.	Werte von $\frac{A}{en}$ für s = 260	s = 210	s = 168	Armbreite.	Werte von $\frac{A}{en}$ für s = 260	s = 210	s = 168
3 cm	0,0033	0,0026	0,0021	13 cm	0,265	0,215	0,174
4	0,0077	0,0063	0,0050	14	0,332	0,269	0,215
5	0,0151	0,0122	0,0098	15	0,408	0,330	0,264
6	0,0261	0,0211	0,0169	16	0,496	0,401	0,320
7	0,0415	0,0336	0,0268	17	0,594	0,481	0,384
8	0,0619	0,0501	0,0400	18	0,794	0,570	0,456
9	0,0882	0,0713	0,0570	19	0,830	0,671	0,537
10	0,1209	0,0978	0,0782	20	0,968	0,782	0,626
11	0,1610	0,1302	0,1041	21	1,121	0,908	0,724
12	0,2091	0,1690	0,1352	22	1,288	1,042	0,833

4. **Die Nabenlänge** macht man gleich der Zahnbreite, vermehrt um cirka $^1/_{15}$ vom Radhalbmesser; die Nabendicke gleich der Zahndicke, vermehrt um $^1/_6$ bis $^1/_5$ der entsprechenden Wellendicke.

56. Riemen- und Seiltransmission.

I. Riementrieb.

1. **Riemenbreite.** Es sei die Breite des Lederriemens = B cm, dessen Dicke 0,45 cm, seine Spannung per 1 qcm Querschnitt = 30 kg und die Spannung des treibenden Riemens (siehe S. 100 und 134) = 2 P, wo P den Widerstand am Umfang der getriebenen Rolle bezeichnet, so wird

$$B \,.\, 0{,}45 \,.\, 30 = 2\,P.$$

Setzt man hierin den Wert von P aus Formel (1), S. 100, so folgt

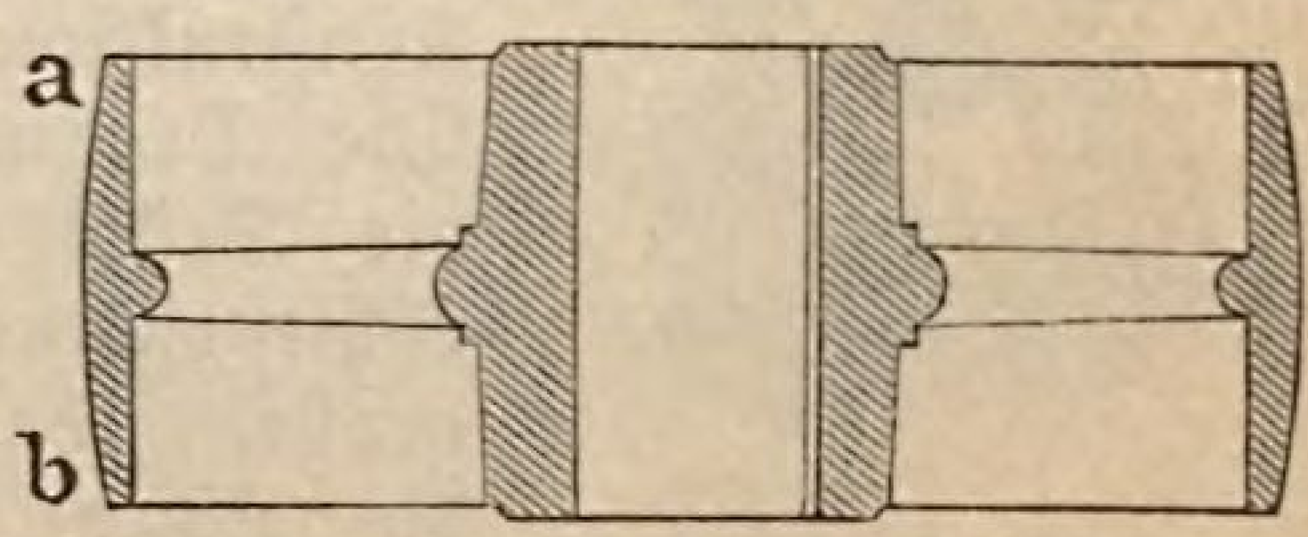
$$\text{Riemenbreite } B = 11\,\frac{A}{v} \text{ Centimeter.}$$

Hiernach soll ein Lederriemen, der ein Pferd mit 1 m Geschwindigkeit überträgt, 11 cm breit sein. Der Riemen aus K a u t s c h u k aber soll in diesem Fall 13, derjenige aus B a u m w o l l e 15 cm Breite haben.

Für Riemen auf hölzernen Rollen genügt es, wenn die Breite nur 0,8 der obigen beträgt.

Ist das Leder dünn oder umfaßt der Riemen weniger als den halben Umfang einer Rolle, so muß die Breite entsprechend vergrößert werden.

Ebenso soll der Riemen verhältnismäßig breiter gemacht werden, wenn die Rolle klein oder die Wölbung ab des Rollenkranzes groß ist. Denn in beiden Fällen entsteht auf der konvexen Seite des Riemens, am Scheitel der Wölbung, eine starke Vermehrung der Spannung, wodurch leicht Risse im Riemen eintreten, welche seiner Haltbarkeit schaden.

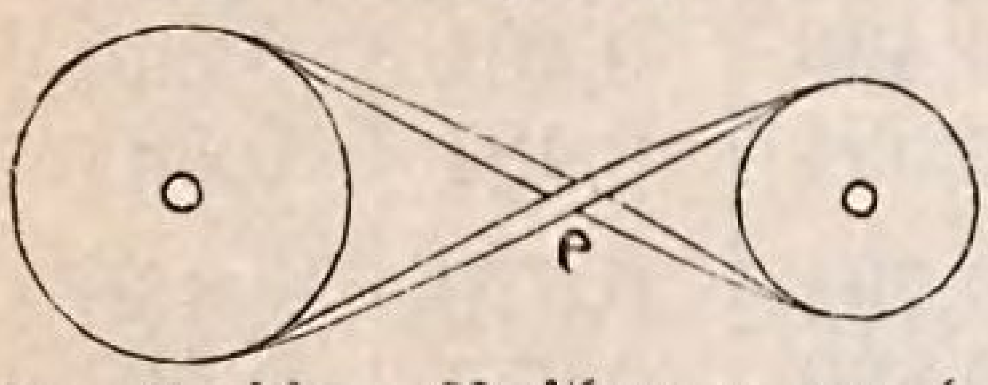


Beisp. Wie breit muß ein Riemen sein, welcher $3^1/_2$ Pferde vermittelst einer Rolle von 0,6 m Durchmesser fortleiten soll, wenn diese 75 Umgänge per Minute macht?

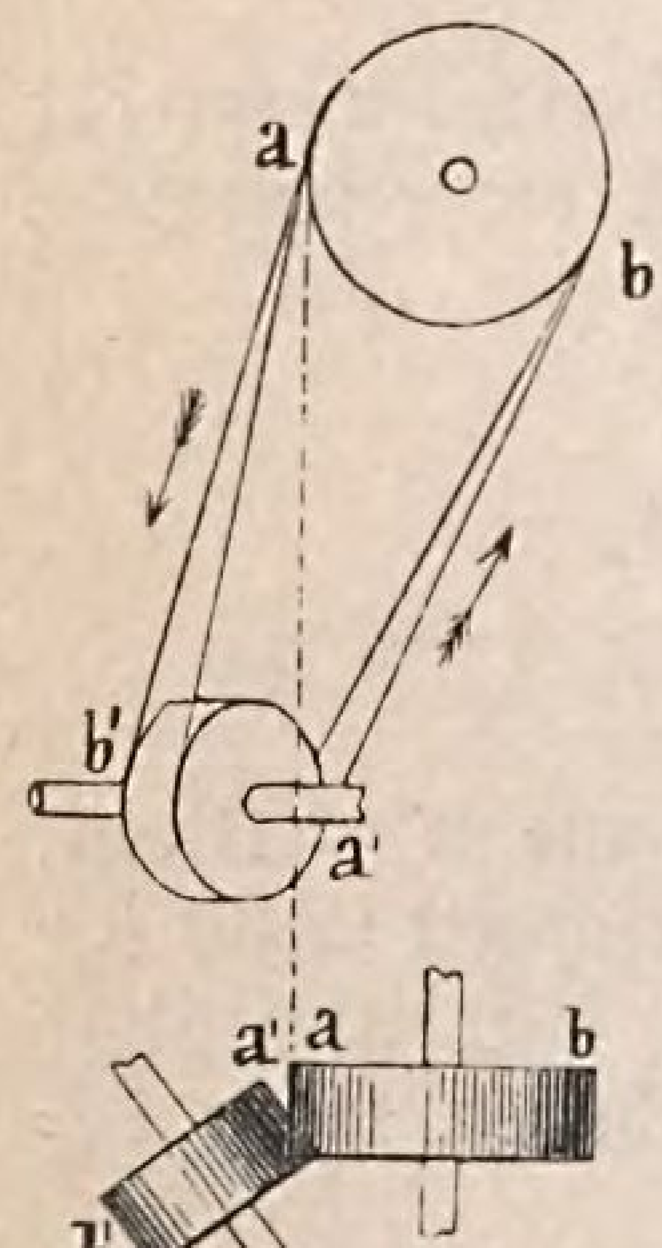
Umfangsgeschw. der Rolle per Sek. $\frac{0,6 \,.\, 3,14 \,.\, 75}{60} = 2,35$ m.

Erforderliche Riemenbreite . . $B = 11 \cdot \frac{3,5}{2,35} = 16,3$ cm.

2. **Kreuzung der Riemen.** Durch das Kreuzen der Riemen wird die Richtung der Bewegung verändert. Gekreuzte Riemen umfassen größere Bogenteile als offene Riemen, weshalb ihre Spannung kleiner ausfällt. Solche Riemen nutzen sich durch ihre Reibung an der Berührungsstelle etwas ab.



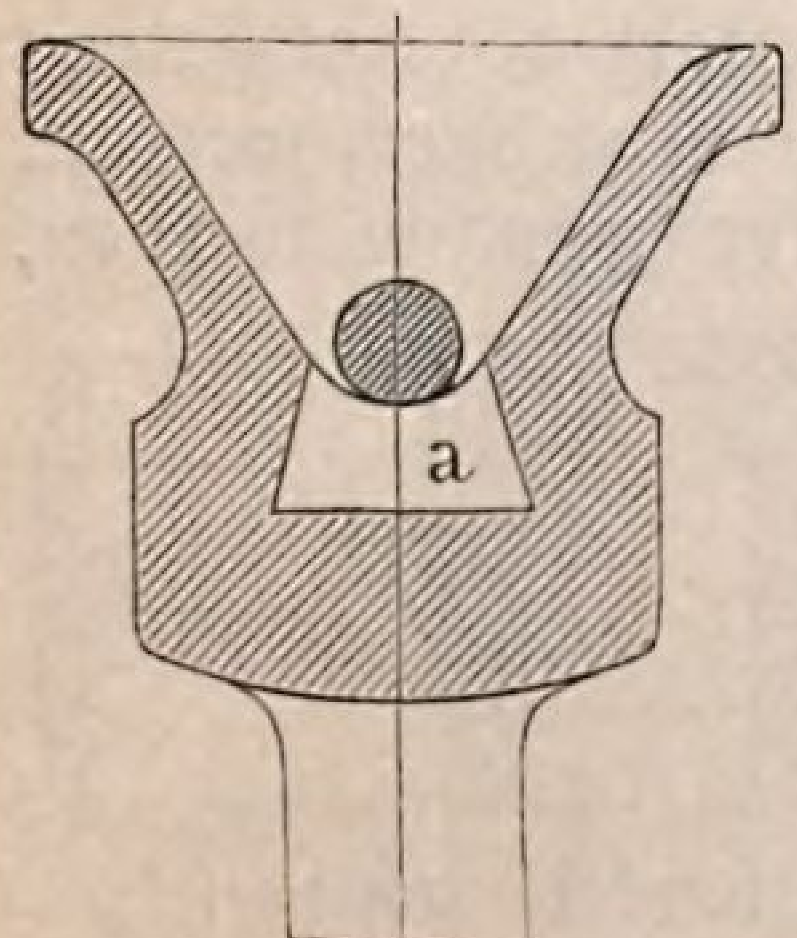
3. **Riemenleitung.** Soll der Riemen auf der Rolle verschoben werden, so muß er da auf die Seite gedrückt werden, wo er auf die Rolle aufläuft. — Sind die Achsen der beiden Rollen, über welche ein Riemen gelegt werden soll, nicht parallel, so erfordern die Rollen eine besondere Stellung, damit der Riemen nicht abfällt. Es sei a b die Triebrolle, in b, b′ laufen die Riemen auf, in a, a′ laufen sie ab. Man lege senkrecht auf jede Rollenachse, durch die Mitte der Rollen, Ebenen, so werden sich die Ebenen schneiden. Nun stehen die Rollen richtig, wenn diese Durchschnittslinie a a′ die Rollen an den Ablaufstellen berührt. Alsdann geht der Riemen von a aus senkrecht gegen die untere Achse und trifft den mittleren Umfang der untern Rolle, ebenso geht der Riemen von a′ aus senkrecht gegen die obere Rolle und trifft den mittlern Umfang dieser Rolle. Die gleiche Bedingung ist für Leit- und Spannrollen zu erfüllen.



4. **Konstruktion der Rolle.** Die Stärke der Arme wird ähnlich berechnet wie für Zahnräder. Die Breite des Kranzes soll mindestens gleich sein der Riemenbreite. Ferner nehme man, wenn R den Rollenhalbmesser bezeichnet:

mittlere Kranzdicke $= 0,5 + 0,01$ R cm,
mittlere Nabendicke $= 1,5 + 0,06$ R cm.

II. Drahtseiltrieb.



Zur Fortpflanzung der Bewegung auf große Entfernungen werden häufig Drahtseile, die wie Riemen über Rollen laufen, angewendet. Die Konstruktion der Drahtseile ist die gewöhnliche. Die Drahtwindungen sind so zu nehmen, daß die Drähte der Litzen um cirka 14° von der Achsenrichtung der Litzen abweichen. Eine gleich große, jedoch entgegengesetzte Abweichung sollen die Litzen von der Achsenrichtung des Seiles haben. Um das Seil zu schonen, legt man in

die gußeisernen Rollenkränze Lederstücke a, welche aufrecht eingetrieben werden. Die Berechnung ist folgende:

1. **Dehnungsspannung des Seiles.** Man nehme die Seilspannung im Zustand der Ruhe $= 1{,}5\,P$, wo P die gleiche Bedeutung hat wie beim Riemen, so wird sie während der Bewegung sein (S. 100): im treibenden Seilstück $= 2\,P$, im getriebenen $= P$. Es sei

F der Querschnitt aller Drähte und
s die Kraft, womit die Drähte per 1 qcm Querschnitt durch den Zug 2 P ausgedehnt werden, so wird sein

$$(1) \qquad 2\,P = F\,s.$$

Die Größe s heißt Dehnungsspannung.

2. **Biegungsspannung des Drahtes.** Wenn der Draht sich auf der Rolle aufwickelt, so wird das Material auf der äußern Seite des Bogens ausgedehnt. Die Kraft, welche diese Ausdehnung per 1 qcm Querschnitt bewirkt, heißt Biegungsspannung. Es seien

d, D der Durchmesser des Drahtes und der Rolle,
s′ die Biegungsspannung des Drahtes und
E der Modul der Elasticität des Drahtes, so ist nach S. 135

$$(2) \qquad s' = E\,\frac{d}{D}.$$

Die Dehnungs- und Biegungsspannung des Drahtes sollen zusammen 1400 kg per 1 qcm nicht überschreiten. Gibt man nun der Dehnungsspannung ihren kleinsten Wert, etwa 400 kg, so erhält die Biegungsspannung ihren höchsten 1000 kg, und da $E = 2000000$ kg, so wird hierfür

$$2000000\,\frac{d}{D} = 1000, \text{ also } \frac{d}{D} = \frac{1}{2000},$$

d. h. der kleinste zulässige Rollendurchmesser soll in diesem Fall wenigstens 2000mal größer als die Drahtdicke sein.

3. **Haltbarkeit des Drahtseiles.** Bei jedem Seilumlauf geht die Spannung der Drähte aus kleineren Werten in größere über, und umgekehrt. Dadurch werden die Drähte abwechselnd ausgedehnt und verkürzt. Diesen Ausdehnungen und Verkürzungen entsprechen bleibende Ausdehnungen. Diese haben zur Folge, daß das Seil schlaff, seine Festigkeit geschwächt, der Betrieb also oft gestört wird. Es sei

L der Abstand der Rollenachsen,
v die Geschwindigkeit des Seiles und
c ein Koefficient, der für dieselbe Materialsorte konstant angenommen werden kann, so ist

$$(3) \qquad \text{Dauer des Seiles} = \frac{c}{s + s'} \cdot \frac{L}{v} \cdot \frac{D}{d} \text{ Jahre.}$$

Arbeitet das Seil 11 Stunden im Tag, so kann man für c nehmen:

für harte wenig dehnbare Drähte . . 0,06,
für mäßig dehnbare Drähte 0,12,
für sehr dehnbare Drähte . . . . . . 0,20.

Das Seil geht also bald zu Grunde, wenn die Geschwindigkeit v, die Drahtdicke d und Spannung $s + s'$ groß, dagegen der Abstand und Durchmesser der Rollen sowie c klein sind. Soll ein Seil haltbar werden, so muß es aus vielen dünnen dehnbaren Drähten bestehen und langsam über große Rollen laufen.

Es wird von gewissen Konstruktoren angegeben, daß der Abstand der beiden Rollen nicht unter 30 m gehen dürfe, wenn das Seil einige Dauer gewähren solle. Diese Regel ist nicht richtig. Man erkennt aus der vorstehenden Formel, daß der Abstand L der Rollen beliebig klein genommen werden kann, wenn nur die andern Größen D, d, v, c und $s + s'$ eine Ausgleichung zu bewirken vermögen.

Beispiel einer günstigen Anordnung. Es sei

$$L = 120 \text{ m}, \quad D = 450 \text{ cm}, \quad d = 0{,}12 \text{ cm}, \quad s + s' = 1200 \text{ kg}, \quad v = 8 \text{ m},$$

so erhält man für $c = 0{,}18$

$$\text{Dauer} = \frac{0{,}18}{1200} \cdot \frac{120}{8} \cdot \frac{450}{0{,}12} = 8{,}4 \text{ Jahre}.$$

Beispiel einer ungünstigen Anordnung. Man nehme an

$$L = 40 \text{ m}, \quad D = 240 \text{ cm}, \quad d = 0{,}15 \text{ cm}, \quad s + s' = 1500 \text{ kg}, \quad v = 16,$$

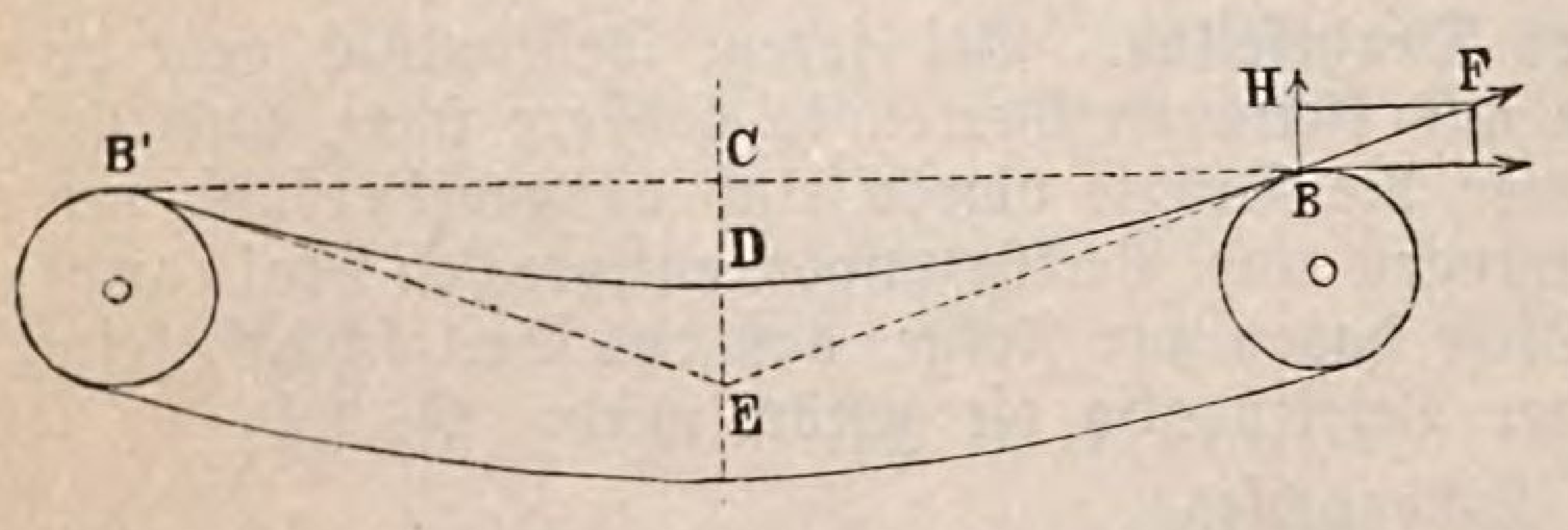
so wird für $c = 0{,}08$

$$\text{Dauer} = \frac{0{,}08}{1500} \cdot \frac{40}{16} \cdot \frac{240}{0{,}15} = 0{,}21 \text{ Jahre}.$$

Das erstere Seil kann also 40mal länger arbeiten als das letztere.

4. **Senkungen des Seiles.** Die Seilstücke nehmen die Form einer gemeinen Kettenlinie an. Da aber die Senkungen nie groß ausfallen, so kann die Kettenlinie als eine Parabel angesehen werden, deren Scheitel im tiefsten Punkte liegt.

a) Senkungen bei gleichen und gleich hoch gelegenen Rollen. Es sei $B D B'$ das Seilstück im Zustand der Ruhe, also die Spannung BF des Seiles, in der Richtung der Tangente BE an das Seil $= 1{,}5 P$. Zerlegt man die Kraft BF in eine horizontale und eine vertikale Seitenkraft, so ist die vertikale BH gleich dem Gewicht des halben Seilstückes BD. Vermöge einer Eigenschaft der Parabel ist ferner $CD = DE$. Bezeichnet daher



a die halbe Entfernung der Rollenachsen, also auch sehr nahe die Länge BC,
p das Gewicht des Seilstückes von der Länge a und
h die Senkung DC, so wird sein

$$CE : BE = BH : BF, \text{ oder } 2h : \sqrt{a^2 + 4h^2} = p : 1{,}5 P.$$

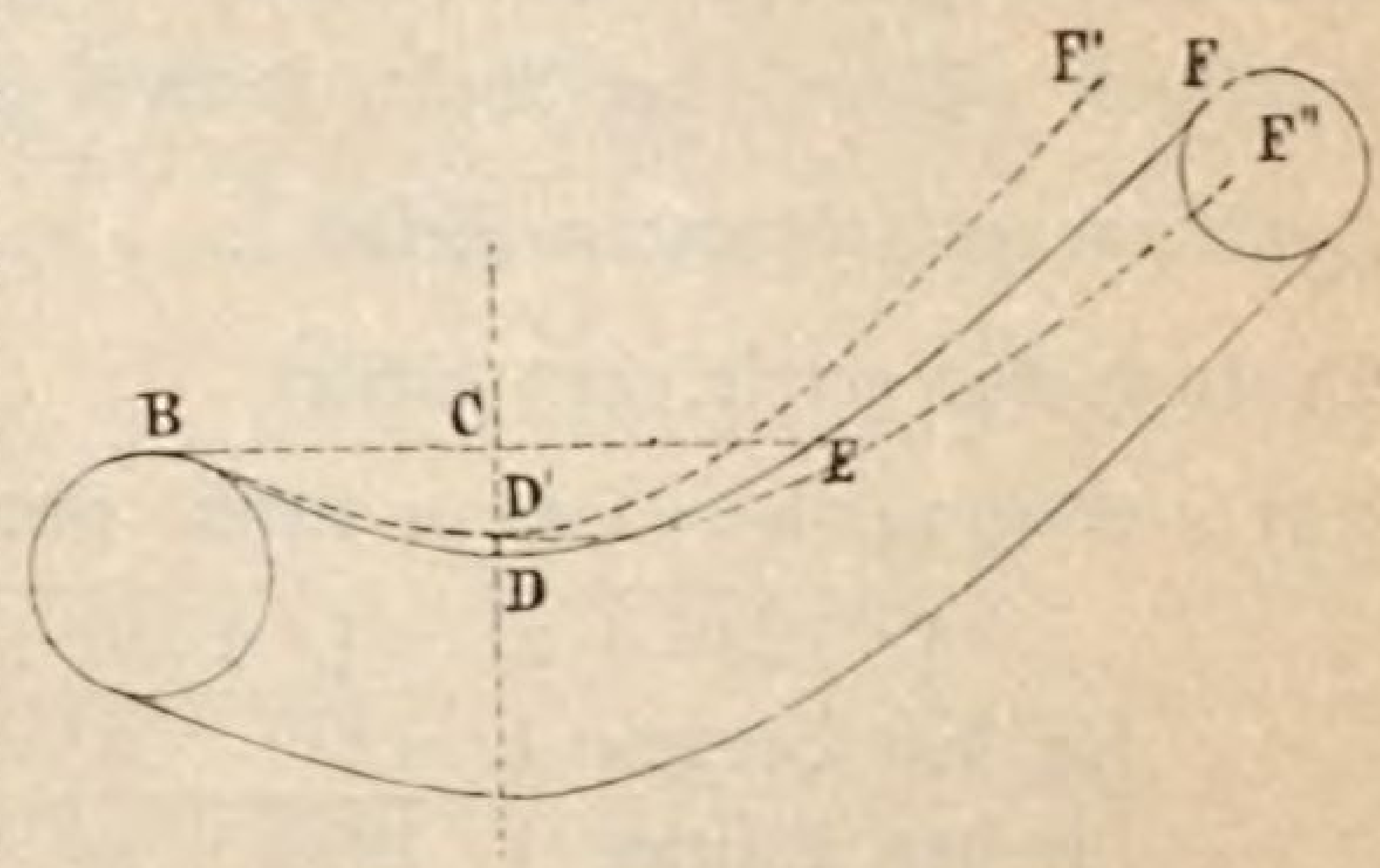
In den meisten Fällen kann $4h^2$ gegen a^2 vernachlässigt werden. Dann erhält man als Senkung

$$h = \frac{a p}{3 P}. \tag{4}$$

Im Zustande der Bewegung ist statt 3P zu schreiben: für das treibende Stück 4P und für das getriebene 2P. Wird ein neues Seil über die Rollen gelegt und es zeigt die durch Formel (4) berechnete Senkung, so hat es eine richtige Spannung. Zeigt es eine größere Senkung, so ist seine Spannung zu klein und wird entweder jetzt schon oder nach kurzer Zeit des Gebrauches auf den Rollen gleiten. Hat das Seil eine kleinere Senkung, so ist seine Spannung unnötig groß.

Wird der Abstand der Rollen sehr groß, so nimmt das Seil große Senkungen an. In diesem Fall wird man das untere Seil als das treibende wählen. Man kann aber auch eine Zwischenachse anwenden mit zwei neben einander liegenden Rollen.

b) Senkungen bei ungleichen oder etwas verschieden hoch gelegenen Rollen. Man zeichne im großen Maßstabe die Rollen und ihre gegenseitige Lage auf, entwerfe die parabolische Krümmung des Seiles BDEF nach dem bloßen Gefühl und ziehe die Horizontale BE, so wird unter der Mitte C derselben der Parabelscheitel D liegen. Nun messe man BC, berechne daraus p und nach Formel (4) die Größe h = CD'. Sodann zeichne man eine Parabel, deren Scheitel in D' liegt und die durch B geht; geht sie nach rechts durch F, so ist die Länge BC und das davon abhängige p hinlänglich richtig gewählt worden. Geht sie nach F' oder F'', so muß BC etwas größer oder kleiner angenommen und das Verfahren wiederholt werden.



5. **Einfluß der Temperatur.** Nehmen wir an, das Seil habe bei einer mittleren Jahrestemperatur von 6° C. seine richtige Spannung. Die Temperatur steige im Sommer bis 28°, sie sinke im Winter auf − 16°, so beträgt die Abweichung nach beiden Seiten 22°. Nun nimmt die Länge des Eisens bei 1° Temperaturänderung per laufenden Meter um 0,0000123 m zu oder ab, also eine Länge a bei 22° Temperaturänderung um 0,0002706a m. Bei der mittleren Temperatur sei die Senkung des Seiles = h, bei + 28° oder − 16° sei sie x, so wird die halbe Seillänge BD (Fig. S. 218), indem man sie mit der Sehne verwechselt, im einen Fall $= \sqrt{a^2 + h^2}$, im andern $= \sqrt{a^2 + x^2}$. Die letztere Länge ist aber um 0,0002706 a größer oder kleiner als die erstere; man hat daher zur Bestimmung von x

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + h^2} \pm 0{,}0002706\, a. \tag{5}$$

Beisp. Ein Drahtseil habe 20 Pferde auf eine Entfernung von 72 m zu übertragen. Wie ist die Anordnung zu treffen?

Seilgeschwindigkeit per Sekunde, angenommen . . . $= 12$ m,
Umfangskraft (nach Formel 1, S. 100) . $P = 75 \cdot \frac{20}{12}$ $= 125$ kg,
Spannung des treibenden Seilstückes . . . . $2 . 125 = 250$ „
Dehnungsspannung, angenommen . . . . $s = 600$ „
Querschnitt aller Drähte . . . . $250 : 600 = 0{,}4167$ qcm,
Querschnitt von 1 Draht, bei 36 Drähten . . . . $= 0{,}01157$ „
Durchmesser von einem Drahte . . . . $= 0{,}121$ cm,
Durchmesser des Seiles, annähernd 10mal größer als der des Drahtes . . . . $= 1{,}21$ „
Durchmesser der Rollen, angenommen . . . . . . $= 400$ „
Anzahl Umgänge der Rollen per Minute . . $\frac{60 . 12}{4 . 3{,}14}$ $= 57{,}3$;
folgl. Biegungsspannung (Formel 2) $s' = 2000000 \cdot \frac{0{,}121}{400}$ $= 605$ kg,
Summe aus Dehnungs- u. Biegungsspannung $600 + 605 = 1205$ „
Gewicht von 1 kbcm Eisendraht . . . . $= 0{,}0078$ kg,
Gewicht des ungedrehten Seiles, 36 m lang
$3600 . 0{,}4167 . 0{,}0078 = 11{,}7$ kg,
Gewicht des gedrehten Seiles, 36 m lang, cirka $1{,}46 . 11{,}7 = 17{,}1$ „
Senkung, während der Ruhe, Formel (4) . $\frac{36 . 17{,}1}{3 . 125}$ $= 1{,}23$ m,
Senkung des treibenden Seiles . . . . . $\frac{3}{4} \cdot 1{,}23 = 0{,}92$ „
Senkung des getriebenen Seiles . . . . . $\frac{3}{2} \cdot 1{,}23 = 1{,}845$ m.

Für $a = 36$ m, $h = 1{,}23$ m liefert Formel (5)

$$\sqrt{1296 + x^2} = \sqrt{1296 + 1{,}5129} \pm 0{,}00974,$$

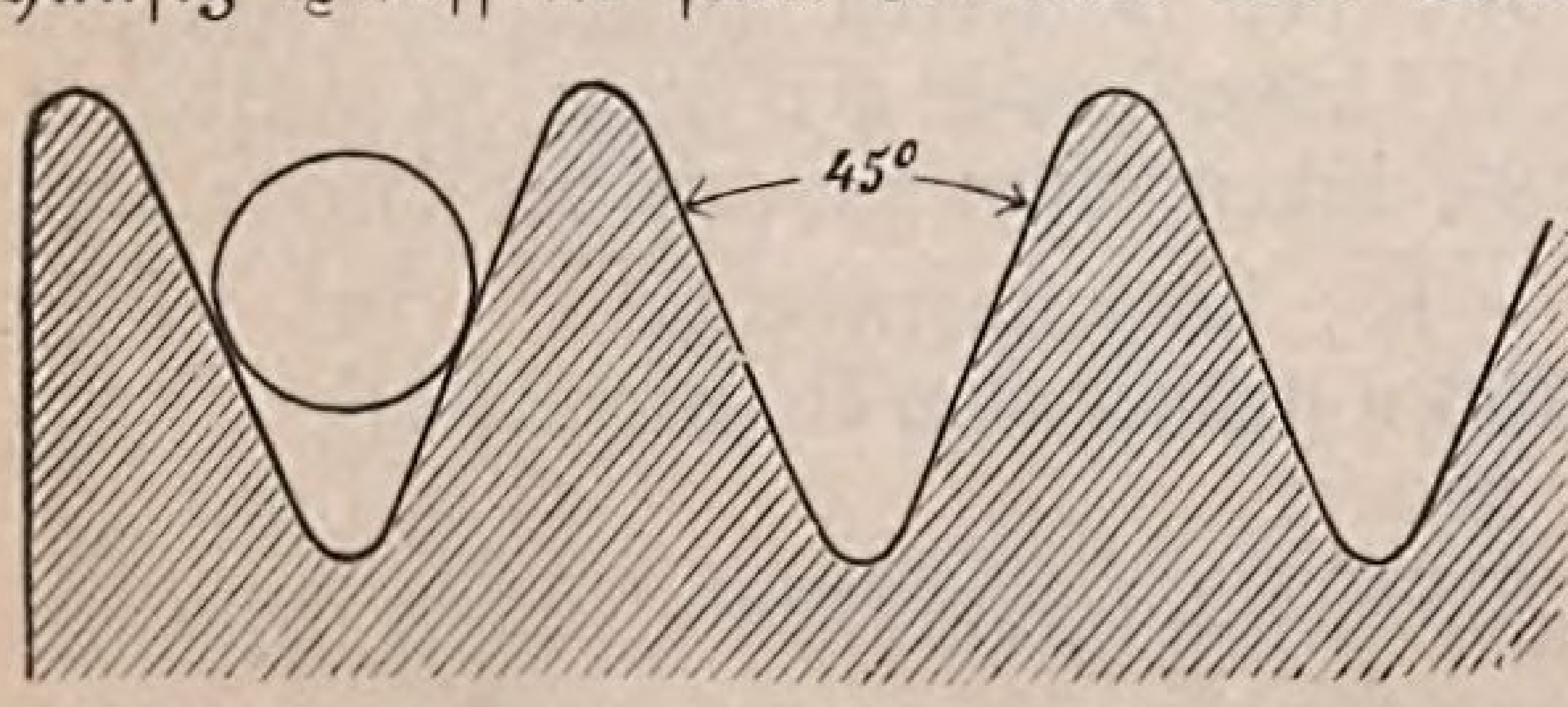
für den Sommer $\sqrt{1296 + x^2} = 36{,}03074$, $x = 1{,}45$ m,

für den Winter $\sqrt{1296 + x^2} = 36{,}00994$, $x = 0{,}89$ m.

Nun verhalten sich die Dehnungsspannungen umgekehrt wie die Senkungen; daher beträgt die Spannung bei 28° Temperatur $1{,}23 : 1{,}45 = 0{,}85$ und die bei $-16°$ Temperatur $1{,}25 : 0{,}89 = 1{,}38$ von der richtigen bei $+6°$.

III. Hanfseiltrieb.

Auf Entfernungen von 3 m bis 20 m werden für größere Kräfte häufig Hanfseile statt Riemen oder Drahtseile angewendet. Diese Seile bestehen aus drei Litzen mit ziemlich starker Drehung von zusammen 10 bis 18 qcm Querschnitt. Es werden nur wenig Nummern angefertigt. Man wendet immer wenigstens zwei Seile an, häufig aber auch sechs, zwölf und noch mehr neben einander liegend. Die Seiten der Rinnen, in welchen



die Seile laufen, bilden Winkel von 45°. Das Seil legt sich nicht auf den Grund der Rinne, sondern klemmt sich keilförmig in diese ein, um die Reibung auf der Rolle zu vermehren. Wegen des genauen Einlegens sollen die Flechtstellen genau so dick sein wie das Seil. Der Abstand der Rinnen von Mitte zu Mitte beträgt 6,5 bis 8 cm.

1. **Dehnungsspannung.** Die Spannung des treibenden Seilstückes nehme man = 2P, also die des getriebenen = P und die Dehnungsspannung (S. 217) des erstern 7 kg bis 10 kg per 1 qcm Querschnitt. Dadurch wird das Seil nur sehr schwach in Anspruch genommen. Bestimmt man nach Formel (1) die Kraft P, nimmt s = 7 bis 10 an, so erhält man mittelst (1) den Querschnitt F der Seile.

2. **Biegungsspannung.** Den Rollen gibt man, um die Seile nicht stark zu krümmen, möglichst große Durchmesser, so daß die Biegungsspannung außer Betracht kommt. Die Hanffasern sind ohnehin dünn und lassen sich schwach über einander verschieben. Gleichwohl soll der Durchmesser der Rolle mindestens das 50fache vom Durchmesser des Seiles sein.

3. **Senkungen.** Die Seile senken sich vermöge ihres Gewichtes gleich wie die Drahtseile; ihre Senkung kann daher wie diese bestimmt werden. Ein Seil von 11,2 qcm Querschnitt wiegt per laufenden Meter 1,3 kg.

Beisp. Es sollen 70 Pferde von einer Rolle auf eine andere übertragen werden. Die treibende Rolle (Schwungrad einer Dampfmaschine) mache 56 Umgänge per Minute. Wie ist die Anordnung zu treffen?

Es sei der Durchmesser der Triebrolle		= 3,85 m,
folglich die Umfangsgeschw. derselben .	$\frac{3{,}85 \cdot 3{,}14 \cdot 56}{60}$	= 11,3 „
Kraft am Umfang der Rolle	$P = \frac{75 \cdot 70}{11{,}3}$	= 465 kg,
daher Spannung des treibenden Seiles .	2 . 465	= 930 „
Dehnungsspannung per 1 qcm, angenommen . .		= 8 kg,
folglich Querschnitt aller Seile	390 : 8	= 116 qcm,
Querschnitt eines Seiles, angenommen		= 14 „
folglich Anzahl Seile	114 : 14	= 8,
oder, da immer ein überschüssiges nötig ist . . .		= 9.

57. Von den Schwungrädern.

1. **Zweck der Schwungräder.** Die Schwungräder haben den Zweck, die Ungleichförmigkeiten der Bewegung der Maschinen möglichst zu beseitigen. Dies geschieht dadurch, daß sie in denjenigen Momenten, in welchen die Kraft mehr Arbeit liefert als der Widerstand verbraucht, den Ueberschuß an Arbeit in ihrer Masse ansammeln, um ihn in andern Momenten, wo die Kraft weniger hervorbringt als der Widerstand bedarf, zur Ueberwindung des Widerstandes abgeben zu können.

2. **Grad der Gleichförmigkeit der Bewegung bei Maschinen durch Kurbeln.** Da die Arbeit der Kraft, welche auf den Kurbelzapfen wirkt, während einer Umdrehung zweimal größer wird als die Arbeit des Widerstandes (S. 112), so wird auch die Geschwindigkeit der Kurbel und des Schwungrades zweimal wachsen und abnehmen. Es sei z. B.

die größte Geschwindigkeit des Schwungradringes $= 6{,}1$ m,
die kleinste Geschwindigkeit desselben . . . . . $= 5{,}9$;
folglich mittlere Geschwindigkeit . . $\frac{6{,}1 + 5{,}9}{2} = 6{,}0.$

Mithin das Verhältnis zwischen der mittleren Geschwindigkeit und dem Unterschiede der extremen Geschwindigkeiten $\frac{6}{6{,}1 - 5{,}9} = 30.$

Man nennt in diesem Fall die Zahl 30 den Grad der Gleichförmigkeit der Bewegung. Je größer diese Zahl ist, um so gleichförmiger wird die Bewegung. Dieser Grad der Gleichförmigkeit richtet sich nach der Natur der Fabrikation und soll annähernd betragen:

für Pumpen 18,
„ Papiermühlen, Mahlmühlen, Webereien . . 40,
„ Spinnereien für grobe Nummern 50,
„ Spinnereien für feine Nummern . . . . 100.

3. **Berechnung der Schwungräder für Dampfmaschinen.** Es sei
P das Gewicht des Ringes, vermehrt um $\frac{1}{3}$ des Gewichtes der Arme,
v die mittlere Umfangsgeschwindigkeit des Ringes per Sekunde,
n die Anzahl Umgänge der Kurbel per Minute,
A die Anzahl Pferde des Motors und
c der Grad der Gleichförmigkeit der Bewegung;

so ist $P \frac{v^2}{2g}$ die im Gewichte P angesammelte Arbeit, ferner 75 A die Arbeit des Motors per Sekunde und $60 \,.\, 75 \frac{A}{n}$ diese Arbeit per Umdrehung. Nun soll die erstere Arbeit proportional sein der letztern, sowie der Größe c; man kann daher setzen

$$P v^2 = k \frac{A c.}{n},$$

wo k einen Koefficienten bezeichnet, der von der Wirkungsweise des Dampfes und konstruktiven Verhältnissen abhängt.

So wird für eine Dampfmaschine mit Volldruck und unendlich langer Schubstange $k = 4647$.

Nach Redtenbacher hat man für eincylindrige Dampfmaschinen als Wert von k, wenn die von ihnen getriebenen Arbeitsmaschinen einen möglichst gleichförmigen Widerstand bieten, zu nehmen

$$k = 4647 \left(1 + \frac{L}{S}\right) (0{,}77 + 0{,}23\,x - 0{,}016\,x^2),$$

wo x das Expansionsverhältnis, L die Länge der Kurbel und S die Länge der Schubstange bezeichnen. Diese Formel gibt

Verhältnis $\frac{L}{S}$	für die Werte von x						
	1	2	3	4	5	6	7
	folgende Werte von k:						
1/4	5717	6740	7610	8250	8771	9004	9120
1/5	5487	6470	7305	7920	8420	8648	8755
1/6	5335	6290	7103	7700	8186	8403	8515

Für Zwillingsmaschinen mit Kurbelstellung unter 90°, Compoundmaschinen mit zwei Cylindern, auch Woolf'sche Maschinen, welche gleiche Leistung haben mit einer eincylindrigen Maschine, kann man von obigen Werten von k nehmen 50 bis 60 Prozente.

4. **Schwungräder für Hammerwerke.** Wenn R den mittleren Radius des Schwungringes in Metern bedeutet, so soll sein:

a) bei einem Stirnhammer, der 70 bis 80 Schläge per Minute macht und dessen Gewicht samt Helm
   3000 bis 3500 kg wiegt . . . . $PR^2 = 20000$,
   4000 bis 4900 „ „ . . . . $PR^2 = 30000$;

b) bei einem Aufwerfhammer mit Vorgelege, welcher 100 bis 110 Schläge per Minute macht und samt Helm und Hülse
   600 bis 800 kg wiegt . . . . . $PR^2 = 15000$;

c) bei einem Schwanzhammer mit Vorgelege, welcher 150 bis 200 Schläge per Minute macht und samt Helm und Hülse
   500 kg wiegt . . . . $PR^2 = 9000$,
   360 „ „ . . . . $PR^2 = 6000$.

5. **Schwungräder für Walzwerke.** Es sei T die Anzahl Sekunden, innerhalb welcher verlangt wird, daß ein Motor mit A Pferden dem Schwungrade, beim Leerlauf des Walzwerkes, von der Ruhe aus die Umfangsgeschwindigkeit v beibringe, so ist

$$\frac{P v^2}{2 g} = 75 A T \text{ oder } P v^2 = 1500 A T.$$

Die Größe T ist für größere Wasserkräfte = 30, für kleinere = 60 Sekunden anzunehmen.

6. **Schwungräder für Sägmühlen.** Nach Morin wird für 1 Sägeblatt mit 80 bis 90 Schnitten per Minute $P v^2 = 30000$,
Gegengewicht zum Sägegatter . . . . $p = \frac{65}{r}$,
wo r die Entfernung des Schwerpunktes des Gewichtes p von der Achse bezeichnet.

7. **Korrigiertes Gewicht des Schwungradringes.** Es sei P_0 das Gewicht des Ringes und P_1 dasjenige der Arme, so ist annähernd

$$P = P_0 + \frac{1}{3} P_1.$$

Für gußeiserne Arme ist nahe $P_1 = \frac{1}{4} P_0$, daher wird in diesem Falle $P_0 = \frac{12}{13} P$, d. h. das Gewicht beträgt $\frac{12}{13}$ vom Werte P, wie er nach obigen Regeln berechnet werden kann.

58. Cylindrische Röhren.

Die Röhren für Wasser-, Gas- und Dampfleitungen, für Dampfkessel 2c. haben dünne Wände. Würde die Dicke dieser Wände für schwachen Druck berechnet nach den Regeln der Festigkeit, so würden sie so klein ausfallen, daß sie zufälligen Einwirkungen nicht widerstehen könnten 2c. und daß namentlich gußeiserne Röhren sich gar nicht anfertigen ließen. Es wird daher der Wanddicke, welche aus der Theorie hervorgeht, noch eine Additionsgröße a beigefügt.

1. **Röhren mit äußerm Druck.** Sie kommen vor als Feuer- und Sieteröhren bei Dampfkesseln. Wird in Formel (2) S. 150 die Größe 3 : 32 E als Konstante betrachtet, so erhält die Gleichung die Form

$$e = k D \sqrt[3]{p} + a;$$

dabei sind die Werte von k und a aus der Erfahrung zu bestimmen. Man kann nehmen für

schmiedeiserne Röhren, gezogen $e = 0{,}006 D \sqrt[3]{p} + 0{,}20$,

Feuerröhren, Rauchröhren, genietet $e = 0{,}007 D \sqrt[3]{p} + 0{,}35$.

2. **Röhren mit innerm Druck.** Setzt man in Formel (4) S. 151 den specifischen Druck s_0 für Schmiedeisen = 400 kg, so wird $e = 0{,}00125\, dp$. Statt dessen reduziert man den Faktor von dp und fügt eine Additionalgröße bei. Auf diese Weise erhält man für

schmiedeiserne Röhren, gezogen . . . . $e = 0{,}0009\, dp + 0{,}3$,
schmiedeiserne Röhren und Kessel, genietet $e = 0{,}0011\, dp + 0{,}3$,
Stahlblechkessel, genietet . . . . . . $e = 0{,}0007\, dp + 0{,}3$,
gußeiserne Leitungen . . . . $e = 0{,}0020\, dp + 0{,}8$,
Wanddicke der Pariser Wasserleitungen . $e = 0{,}0200\, d \quad + 1{,}0$.

3. **Gewicht und Wanddicke gußeiserner Röhren für Wasser- und Gasleitungen.** Gewicht ohne Flanschen oder Muffe. Probedruck p = 10 kg.

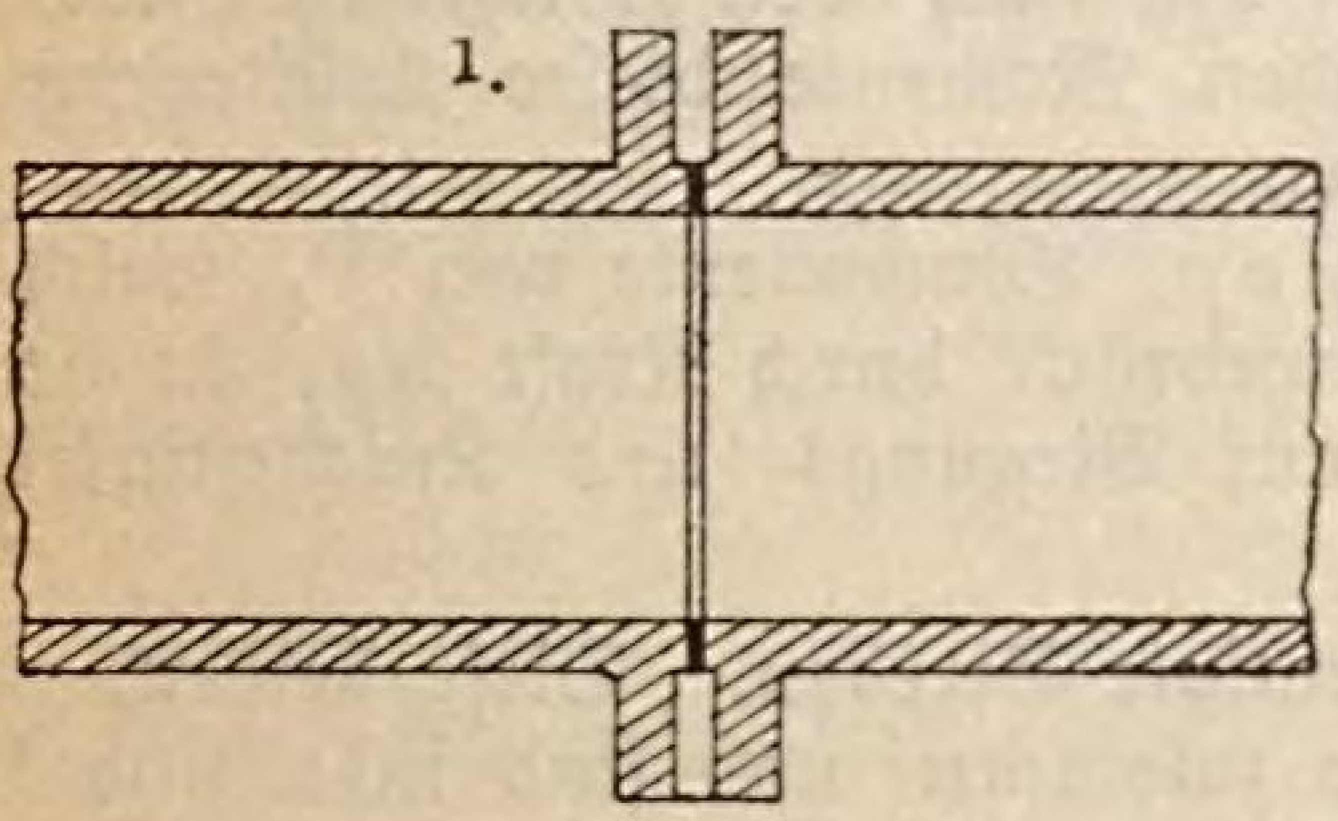
Innerer Durchm.	Wanddicke.	Gewicht per 1 m.	Innerer Durchm.	Wanddicke.	Gewicht per 1 m.	Innerer Durchm.	Wanddicke.	Gewicht per 1 m.
cm	cm	kg	cm	cm	kg	cm	cm	kg
6	0,92	14,4	30	1,40	99,4	54	1,88	237,6
8	0,96	19,5	32	1,44	108,8	56	1,92	251,6
10	1,00	24,9	34	1,48	118,6	58	1,96	265,8
12	1,04	30,7	36	1,52	128,8	60	2,00	280,5
14	1,08	36,9	38	1,56	139,6	62	2,04	294,8
16	1,12	43,5	40	1,60	150,6	64	2,08	310,0
18	1,16	50,5	42	1,64	161,9	66	2,12	326,7
20	1,20	57,5	44	1,68	173,6	68	2,16	342,8
22	1,24	65,2	46	1,72	185,6	70	2,20	359,3
24	1,28	73,2	48	1,76	198,0	72	2,24	376,2
26	1,32	81,6	50	1,80	210,8	74	2,28	393,4
28	1,36	90,3	52	1,84	224,1	76	2,32	410,8

4. **Gewicht und Wanddicke von Bleiröhren,** nach der Formel $e = 0{,}05\, d + 0{,}45$ cm. Probedruck $p = 10$ kg.

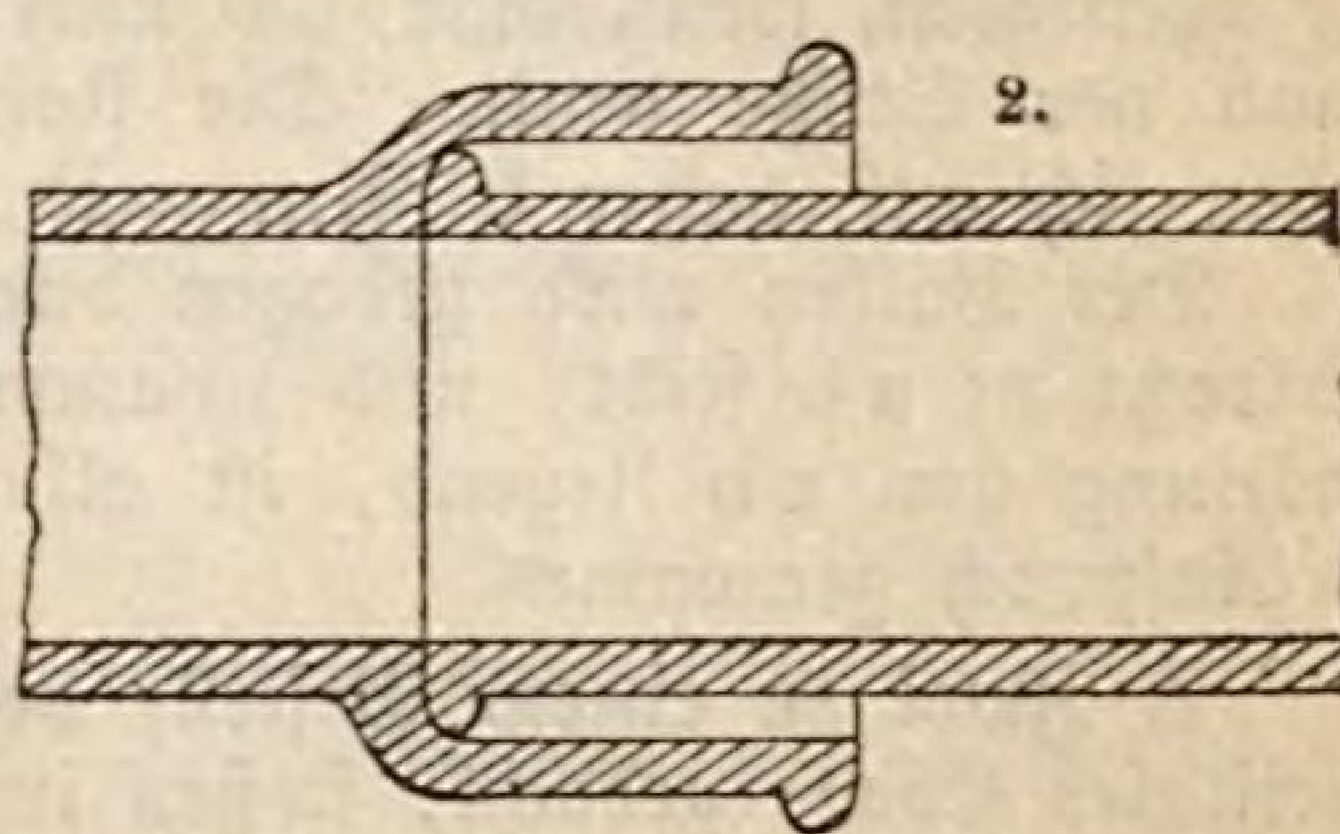
Innerer Durchm.	Wanddicke.	Gewicht per 1 m.	Innerer Durchm.	Wanddicke.	Gewicht per 1 m.	Innerer Durchm.	Wanddicke.	Gewicht per 1 m.
cm	cm	kg	cm	cm	kg	cm	cm	kg
1	0,50	2,67	6	0,75	18,05	11	1,00	42,79
2	0,55	5,00	7	0,80	22,25	12	1,05	48,86
3	0,60	7,70	8	0,85	26,83	13	1,10	55,32
4	0,65	10,78	9	0,90	31,78	14	1,15	62,13
5	0,70	14,23	10	0,95	37,10	15	1,20	69,32

5. **Verbindung von Röhren.** Diese sollen dicht halten, leicht zu lösen sein und den Querschnitt nicht verengen. Gußeiserne Röhren werden verbunden durch Flanschen, Fig. 1, oder durch Muffe, Fig. 2. Bei der Flanschenverbindung werden zwischen die Röhrenenden Scheiben aus Blei, Leder, Pappdeckel, Kautschuk ꝛc. gelegt; bei den Muffen wird

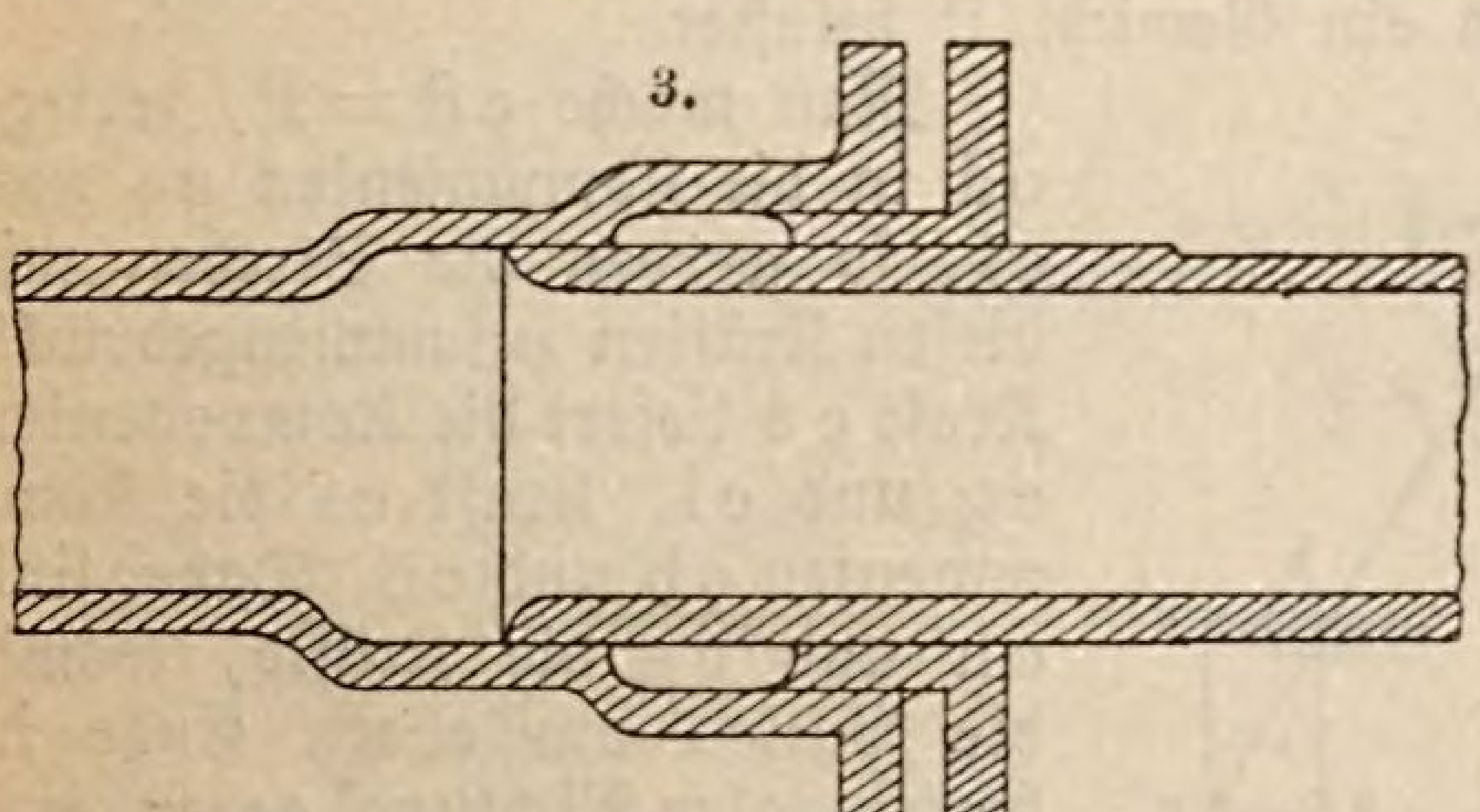
1.



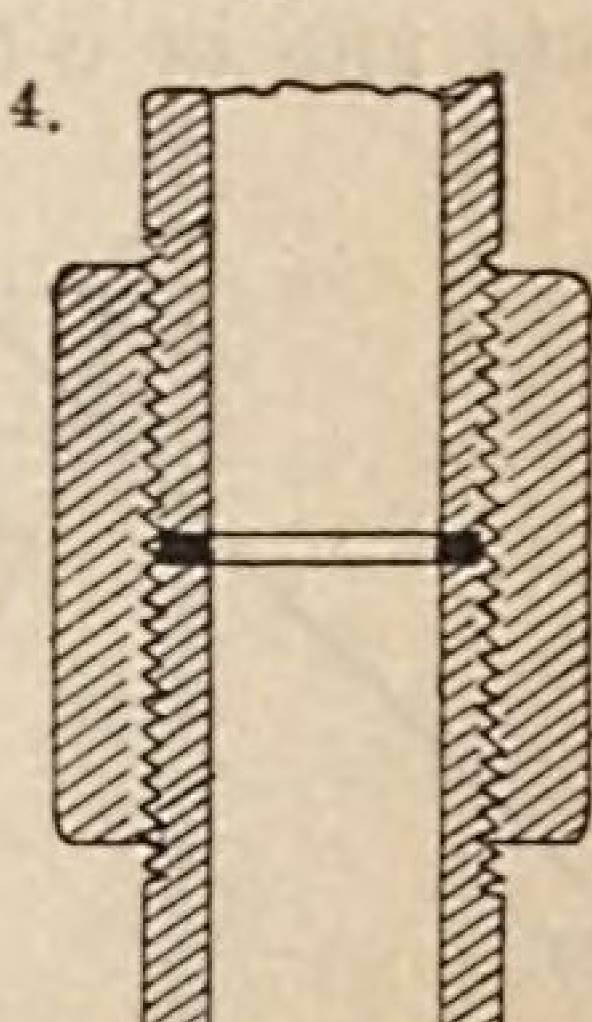
2.



3.



4.

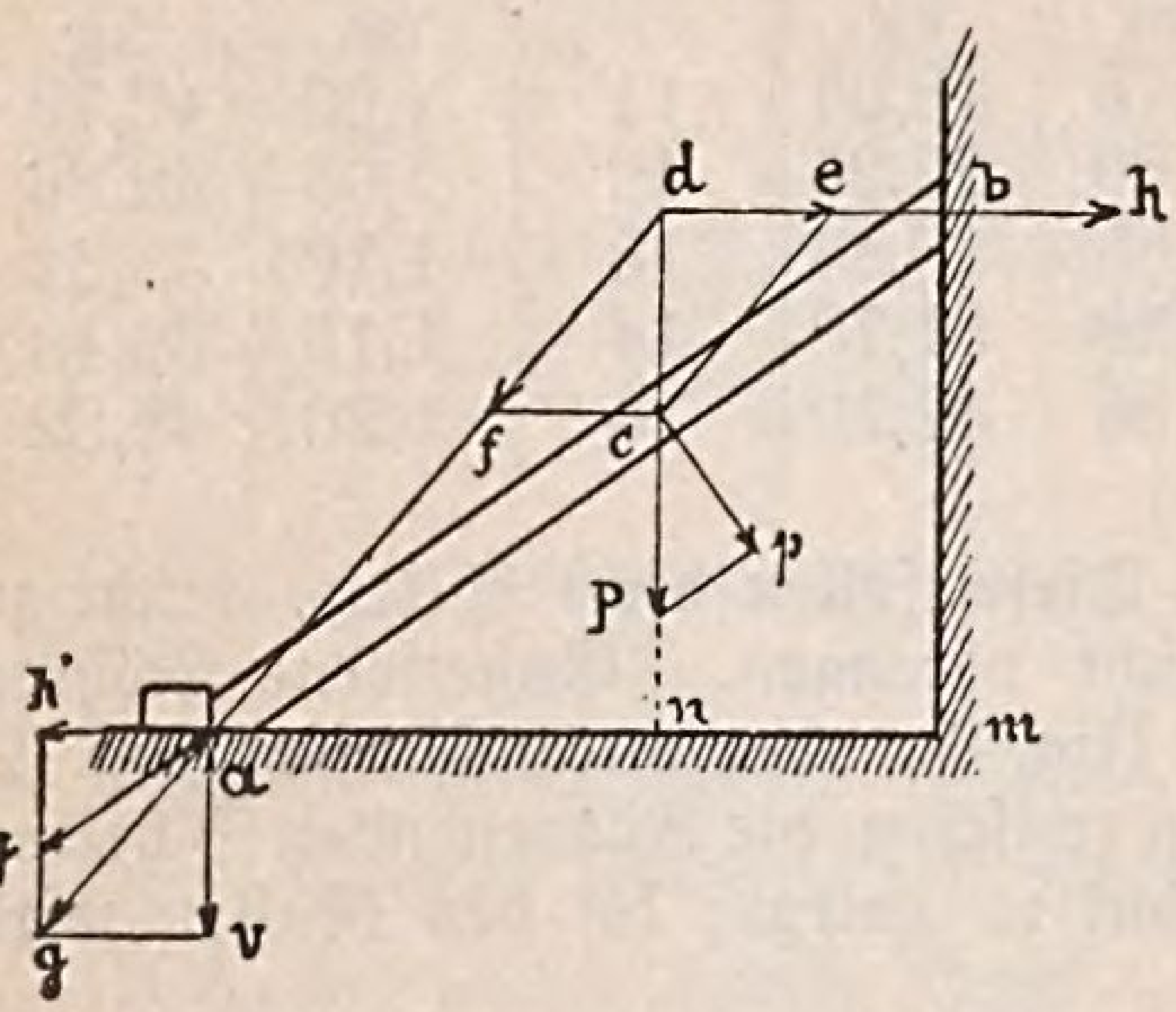


der hohle Raum zum größten Teil mit Hanfgeflecht ausgefüllt und der Rest mit Blei ausgegossen und verstemmt. Fig. 3 zeigt eine Muffenverbindung, welche eine Verschiebung gestattet, und von Strecke zu Strecke bei langen Leitungen angewendet wird, um eine Ausgleichung in den Längen zu erzielen, welche durch Temperaturwechsel herbeigeführt werden. Fig. 4 ist eine Verbindung schmiedeiserner Röhren.

59. Verschiedene einfache Balkenkonstruktionen.

1. **Balken in schiefer Lage belastet.** Balken, in vertikaler Ebene liegend, in a unterstützt, in b gegen eine Wand gelehnt und in c mit einem Gewicht P belastet.

Es entsteht in b ein Horizontaldruck h; seine Richtung schneidet diejenige von P in d. Man ziehe da, mache dc = P, so gibt dc die Komponenten de = h und df. Der letztere Druck macht sich in der Richtung der Geraden dag auf a geltend. Man mache ag = df, so liefert ag die Komponenten ah′ = h′ und av = v. Wegen der Kongruenz der Dreiecke dcf und avg wird



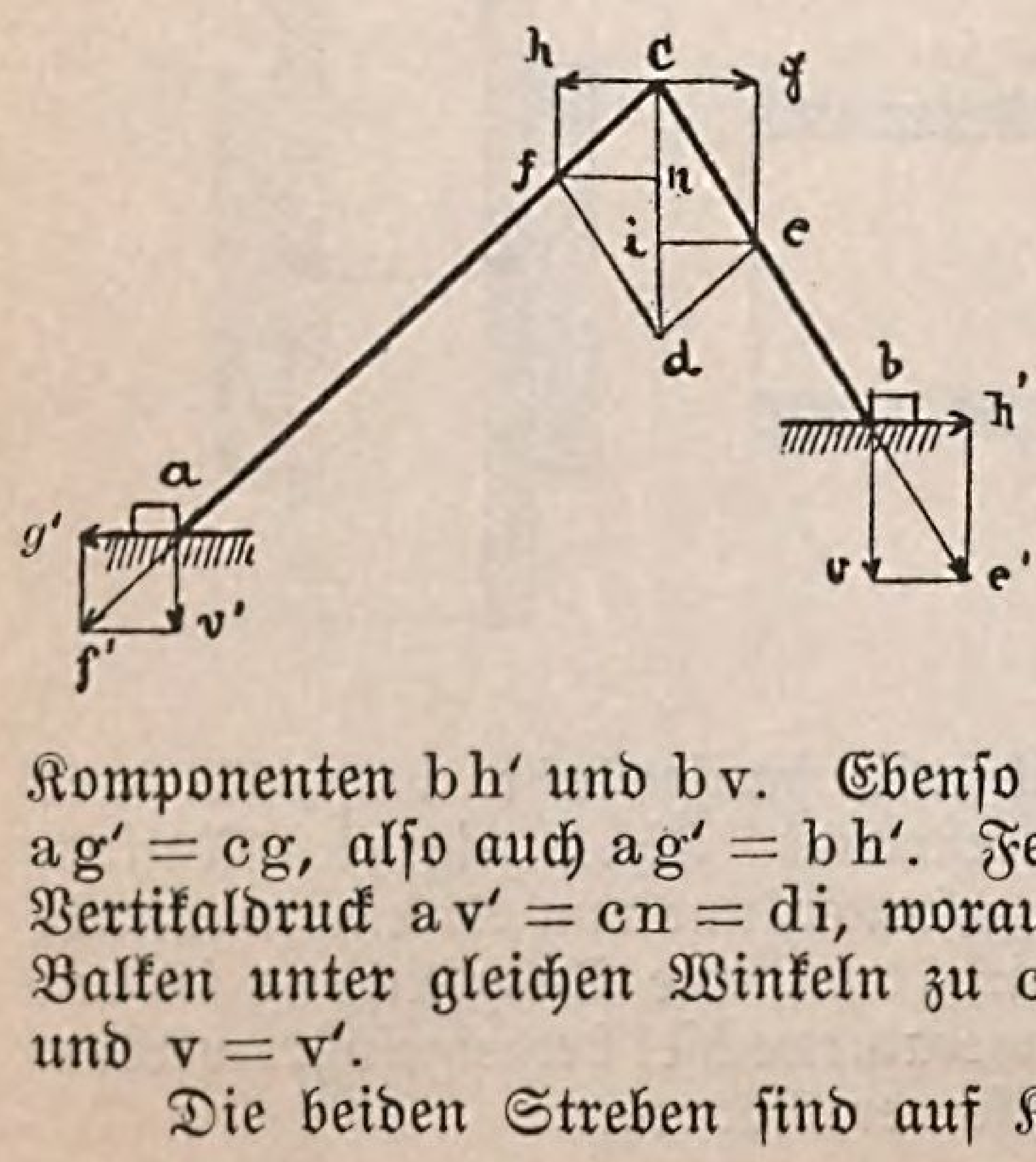
h′ = h und v = P.

Die horizontalen Kräfte bilden ein Kräftepaar (S. 55), ebenso die vertikalen, wenn man sich unter v den nach oben gerichteten Widerstand der Stütze denkt. Die statischen Momente dieser Kräftepaare heben sich auf, daher h . bm = P . an.

Der Balken wird gebogen durch cp, Komponente von P, welche senkrecht zu ab steht, und zusammengedrückt durch Kraft ag, in der Richtung von ab liegend, ist also auf Biegungs- und Knickfestigkeit in Anspruch genommen.

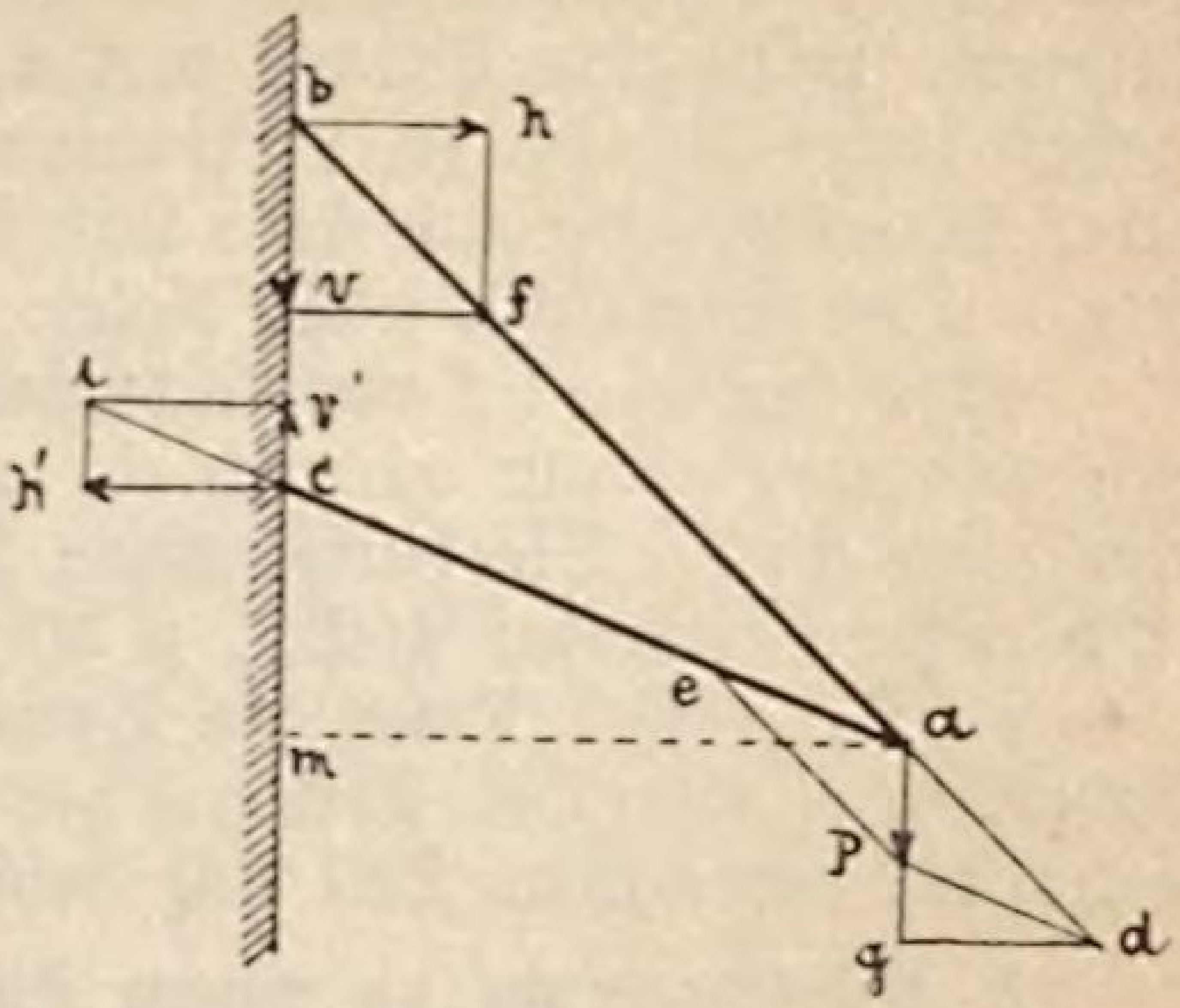
2. **Zwei zu einem Gestelle vereinigte Streben.** Diese beiden, in vertikaler Ebene gedacht, stoßen in c zusammen und sind in a und b unterstützt und in c durch ein Gewicht P belastet.

Man mache cd = P, zerlege cd in die Komponenten ce und cf, so werden die Streben mit diesen Kräften zusammengedrückt. Kraft ce liefert die Komponenten cg und ci, Kraft cf die Komponenten ch und cn. Dabei sind ch und cg die Kräfte, womit die Balken am obern Ende in horizontaler Richtung gegen einander drücken. Man verlege ce nach be′, so entstehen daraus die Komponenten bh′ und bv. Ebenso verlege man cf nach af′, so wird ag′ = cg, also auch ag′ = bh′. Ferner ist Vertikaldruck bv = ci und Vertikaldruck av′ = cn = di, woraus folgt v + v′ = P. — Gehen die Balken unter gleichen Winkeln zu cd aus einander, so wird ce = cf und v = v′.



Die beiden Streben sind auf Knickfestigkeit beansprucht.

3. **Zwei aus einer Wand hervortretende, zu einem Balken vereinigte Stangen.** Die Stangen ab und ac tragen in a eine Last P. Diese zerlegt sich in ad und ae. Man verlege ad nach bf, so ergeben sich die Komponenten bh = h und bv = v. Ebenso verlege man ae nach ci, so liefert diese Kraft die Komponenten ch′ = h′ und cv′ = v′. Man vollende das rechtwinklige Dreieck adg, so ist Dreieck adg kongruent zu bfv und Dreieck Pdg kongruent zu ich′; folglich h′ = h = dg und da v = ag, v′ = Pg, so wird v — v′ = P. — Liegt ac horizontal, so wird v′ = o und v = P; liegt c tiefer als a, so wird v′ abwärts gerichtet und es ist dann v + v′ = P. Die Anordnung enthält zwei Kräftepaare: h und h′, sowie P und v — v′,

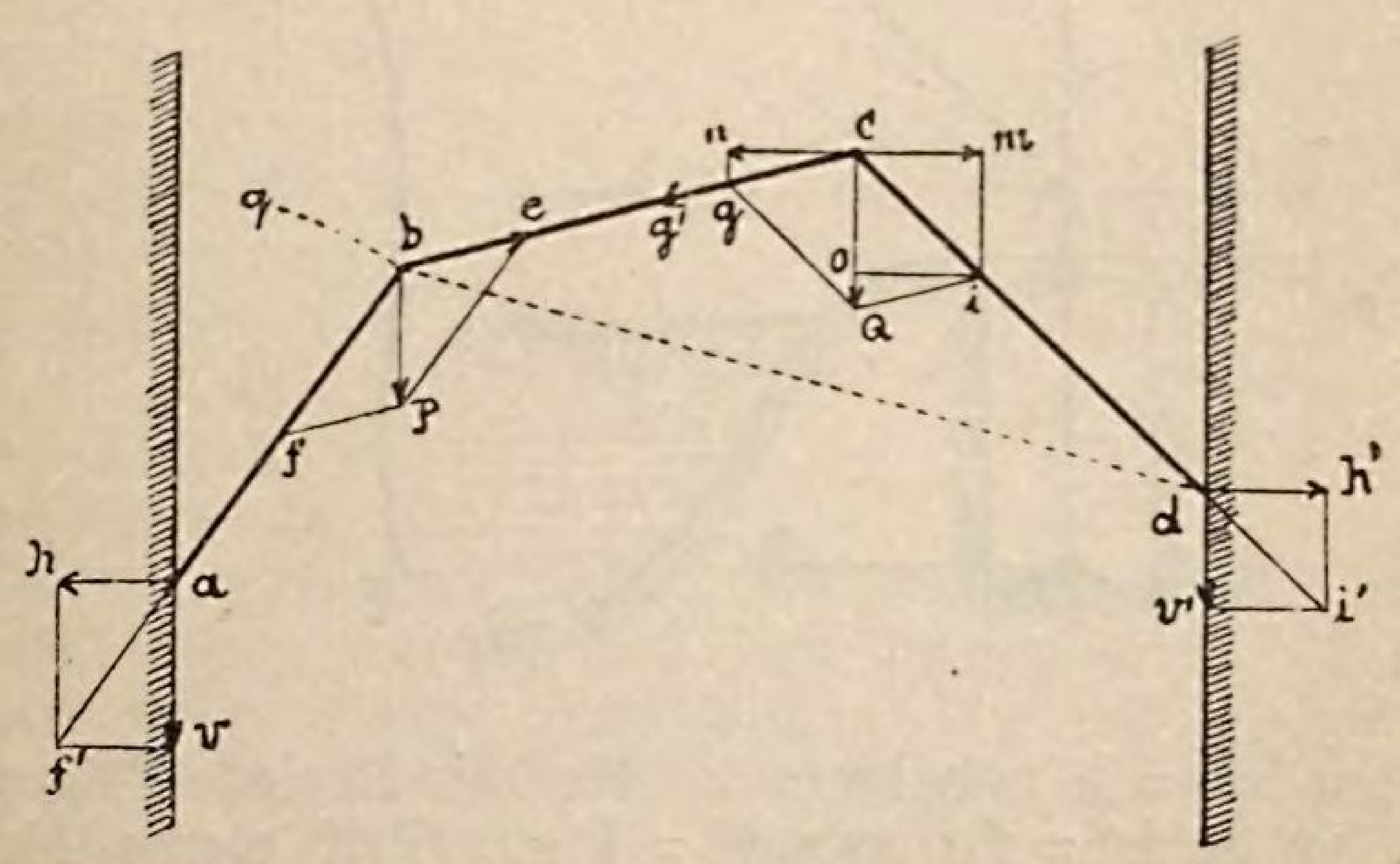


wobei statt v — v′ der aufwärts gerichtete Widerstand der Wand in Rechnung zu bringen ist. Daher h . bc = P . am.

Stange ab wird auf Zug- und ac auf Knickfestigkeit in Anspruch genommen.

4. **Drei zu einem Gestelle vereinigte Balken.** Die Stangen ab, bc und cd liegen in einer vertikalen Ebene und tragen in b das Gewicht P, in c das Gewicht Q.

P zerlegt sich in die Komponenten be und bf, ebenso Q in ci und cg. Wenn nun be = cg, so verharrt die Stange bc in ihrer Lage. Man kann dies immer erreichen, wenn eines der Gewichte,

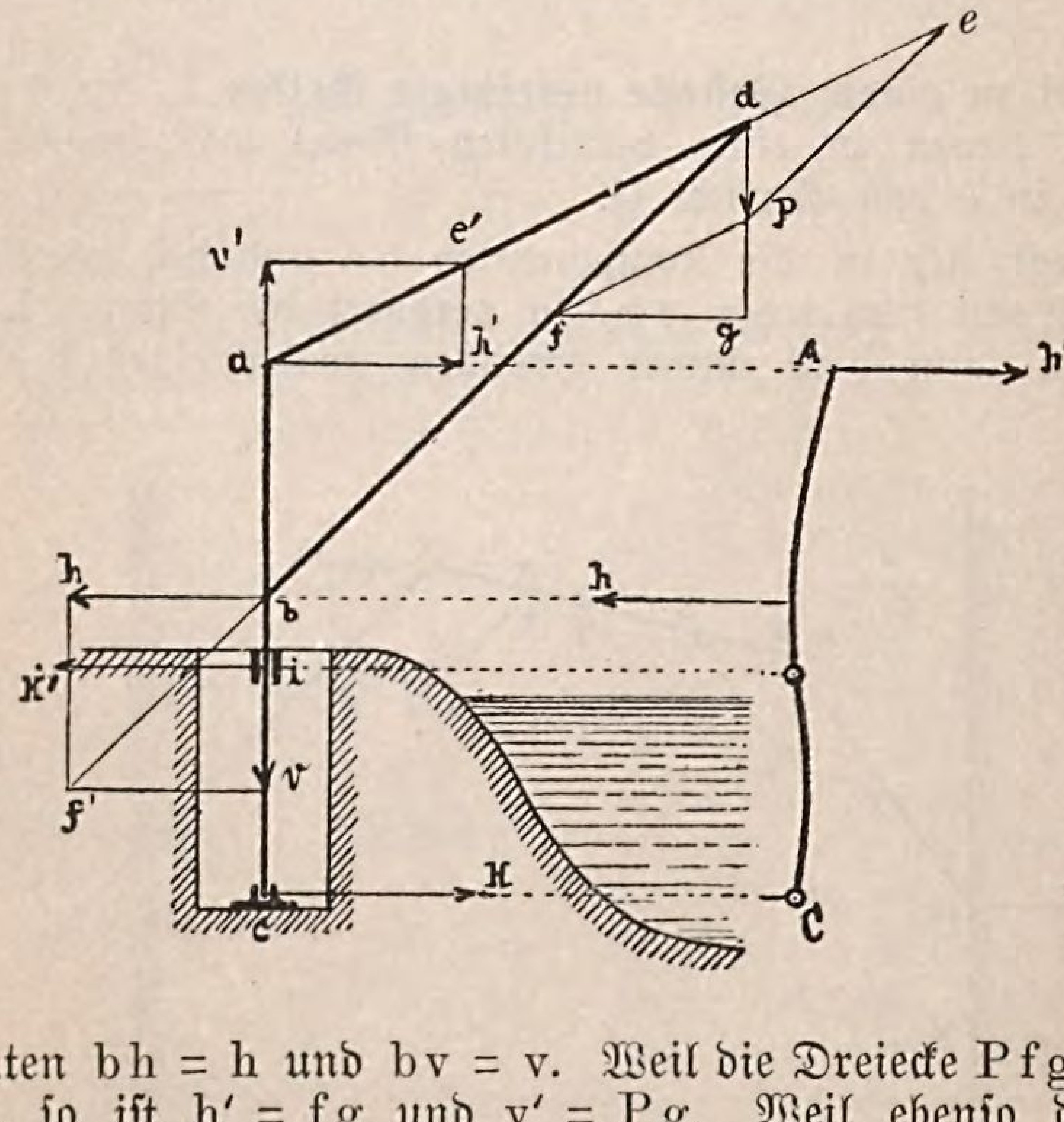


z. B. P, angenommen, das andere darnach bestimmt wird. Zu diesem Zwecke mache man cg = be und vollende das Parallelogramm cgQi, so ist Q bestimmt. Wäre aber Q größer, so würde auch cg größer, z. B. um gg′, so müßte die Anordnung, ohne daß sie versteift würde,

zusammenstürzen. Dabei beschriebe Punkt b einen Kreisbogen b q, mit dem Mittelpunkt in a und c einen solchen abwärts, beschrieben von d aus. Eine Versteifung ließe sich z. B. erreichen durch eine Stange, welche von d nach b ginge. Wäre das Gestell der Träger einer Brücken-Fahrbahn, so könnte, wenn die Last darüber ginge, b e > c g werden. Alsdann wäre eine Stange von a bis c nötig, um das Auseinandergehen dieser Punkte zu verhindern. Dann bestände das Gestell aus zwei Dreiecken a b c und d b c mit stabiler Form, während der Polygonzug a b c d Stabilität nicht bietet.

Man verlege b f nach a f' und zerlege a f' in die Komponenten a h und a v; ebenso c i nach d i' und zerlege d i' in die Komponenten d h' und d v'. Die horizontalen Drucke in den vier Punkten a, b, c und d sind einander gleich, z. B. d h' = c m = c n, . . . Ferner ist v + v' = P + Q. Denn die Dreiecke c o i und d v' i' sind kongruent; daher c o = v'. Der Teil c o der Last Q wird also von der Stütze d getragen, der andere Teil o Q nebst P dagegen von der Stütze a.

5. **Gleichgewicht an einem Schiffskran.** Last P zerlegt sich in die Komponenten d e und d f; Kraft d e, nach a e' verlegt, gibt die Komponenten a h' = h' und a v' = v'; ferner Kraft d f' nach b f' verlegt, die



Komponenten b h = h und b v = v. Weil die Dreiecke P f g und e' a h' kongruent, so ist h' = f g und v' = P g. Weil ebenso die Dreiecke d f g und b f' v kongruent, so ist h = f g und v = d g; folglich h' = h und v = d g.

Es bilden h' und h ein Kräftepaar (S. 55) mit dem Hebelsarm a b; daher sein statisches Moment = h . a b. Diesem obern Kräftepaar wirkt entgegen das untere Kräftepaar H, H' am Hebelsarm c i (Abstand von

H und H') mit dem Moment = H . ci. Das obere dreht die Säule oben nach rechts, das untere nach links; für das Gleichgewicht muß sein h . ab = H . ci.

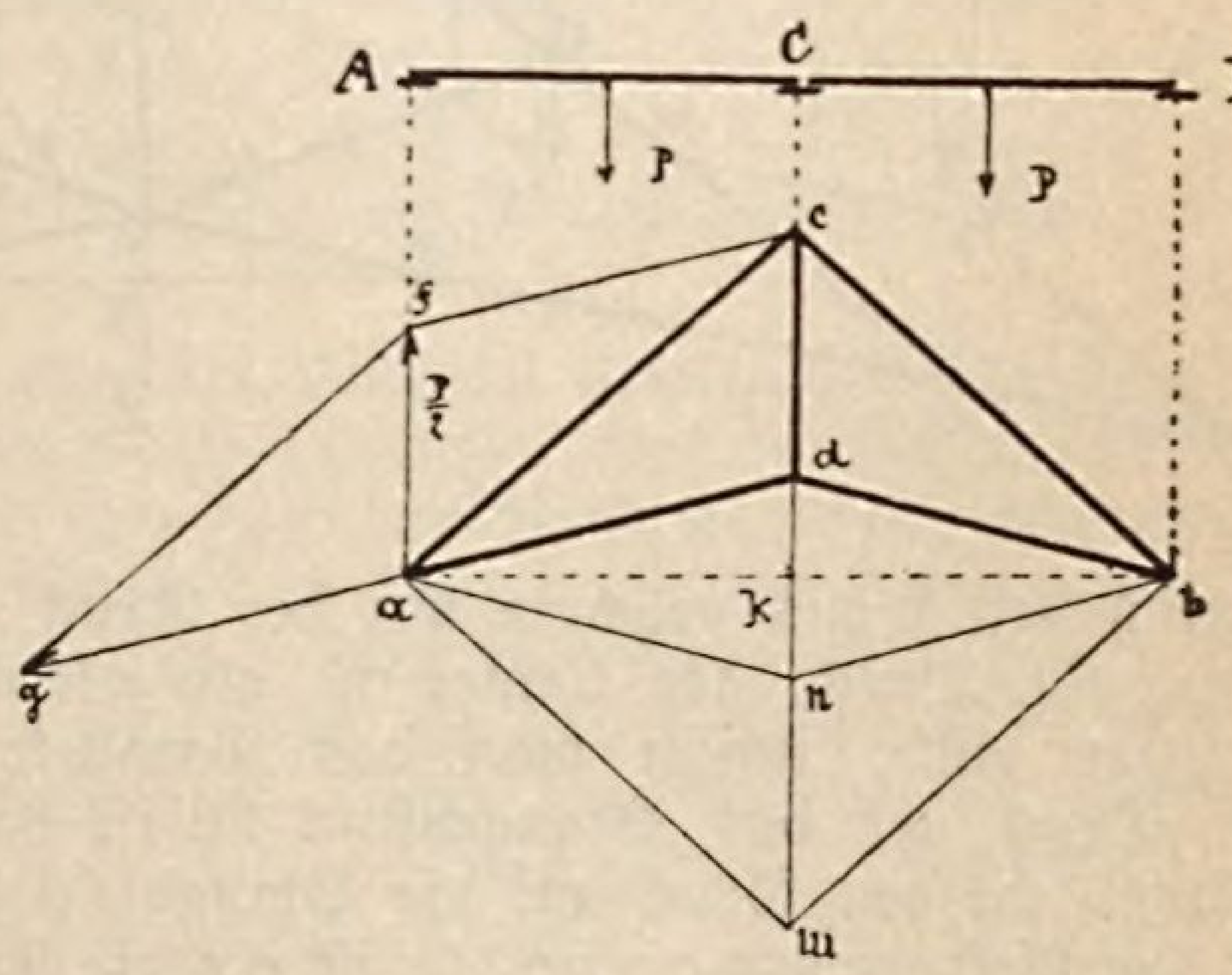
Stange ad wird verstreckt, db zusammengedrückt und die Säule nach neben stehender Figur AC verbogen, ähnlich der Achse auf S. 192, außerdem wird der Teil bc zusammengedrückt, ba ausgedehnt. Endlich ist v — v' = P.

60. Dachstühle.

1. **Belastung der Dächer.** Der Druck in vertikaler Richtung auf die Dachfläche besteht: aus dem Eigengewicht der Konstruktion, dem Schnee- und Winddruck. Man kann ihn zu 200—250 kg per Quadratmeter der horizontalen Projektion der Dachfläche annehmen. Dadurch werden die Sparren, Stangen und Bänder auf Zug und Druck in Anspruch genommen.

2. **Dachstuhlhälfte ein Dreieck.** Es sind ac und bc die Dachsparren, ad und bd Zugstangen und cd ein vertikales Band; jede Dachhälfte sei per Tragwand mit P belastet.

Man denke sich, diese Gewichte liegen in der Mitte zweier horizontaler Balken AC und BC, die an ihren Enden unterstützt sind, so trägt die Stütze C die Last P und je eine der äußern Stützen A und B die Last 0,5 P. Diese letzten zwei Lasten werden direkt durch die Unterlagen in a und b aufgehoben. Wenn man sich daher in a und b je eine Kraft = 0,5 P aufwärts wirkend denkt, so ist der Dachstuhl im Gleichgewicht. Es sei daher af = cd = 0,5 P. Man verlängere da über a hinaus und vollende das Parallelogramm acfg, so

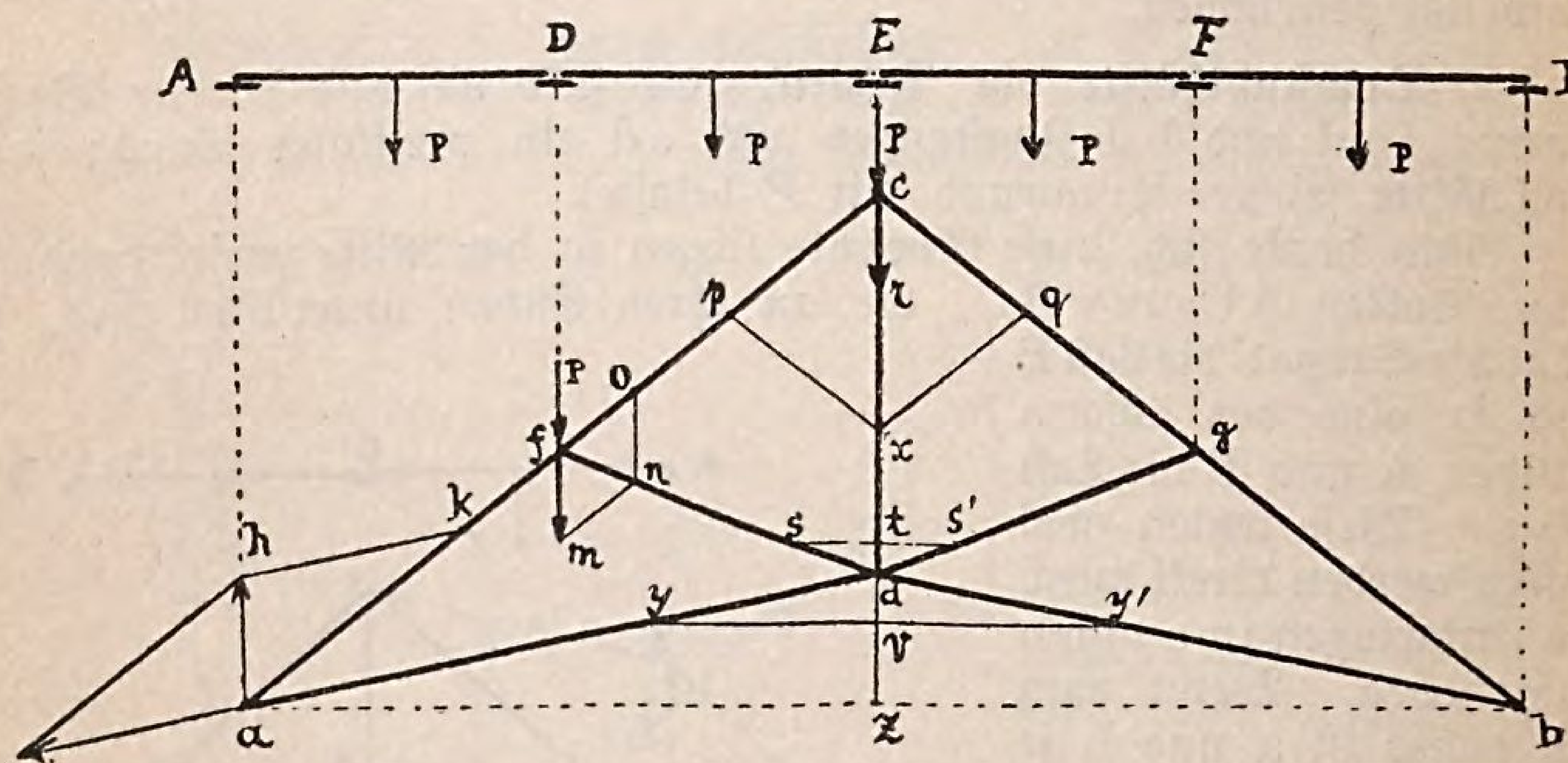


ist ac die Kraft, womit der Dachsparren zusammengedrückt und ag die Kraft, womit die Zugstange verstreckt wird. Bleibt nur noch zu bestimmen, wie stark cd verstreckt wird. Nun seien acbm und adbn Parallelogramme, so ist cm die Resultante aus den Drücken ac und bc; ebenso dn die Resultante aus den Zugkräften ad und bd. Mit cm wird der Punkt c aufwärts, mit dn und mit P wird Punkt d abwärts gedrückt. Beide Kräfte heben sich auf; also stellt dn die Kraft dar, womit die Stange cd verstreckt wird. — Wenn d nach k rückt, also in die Horizontale abfällt, so hört die Spannung längs cd auf und diese Stange wird überflüssig.

Nach vorstehender Zeichnung verhalten sich die Kräfte längs af, ac, ad und cd wie diese Linien, also wie 14 : 30 : 22 : 11.

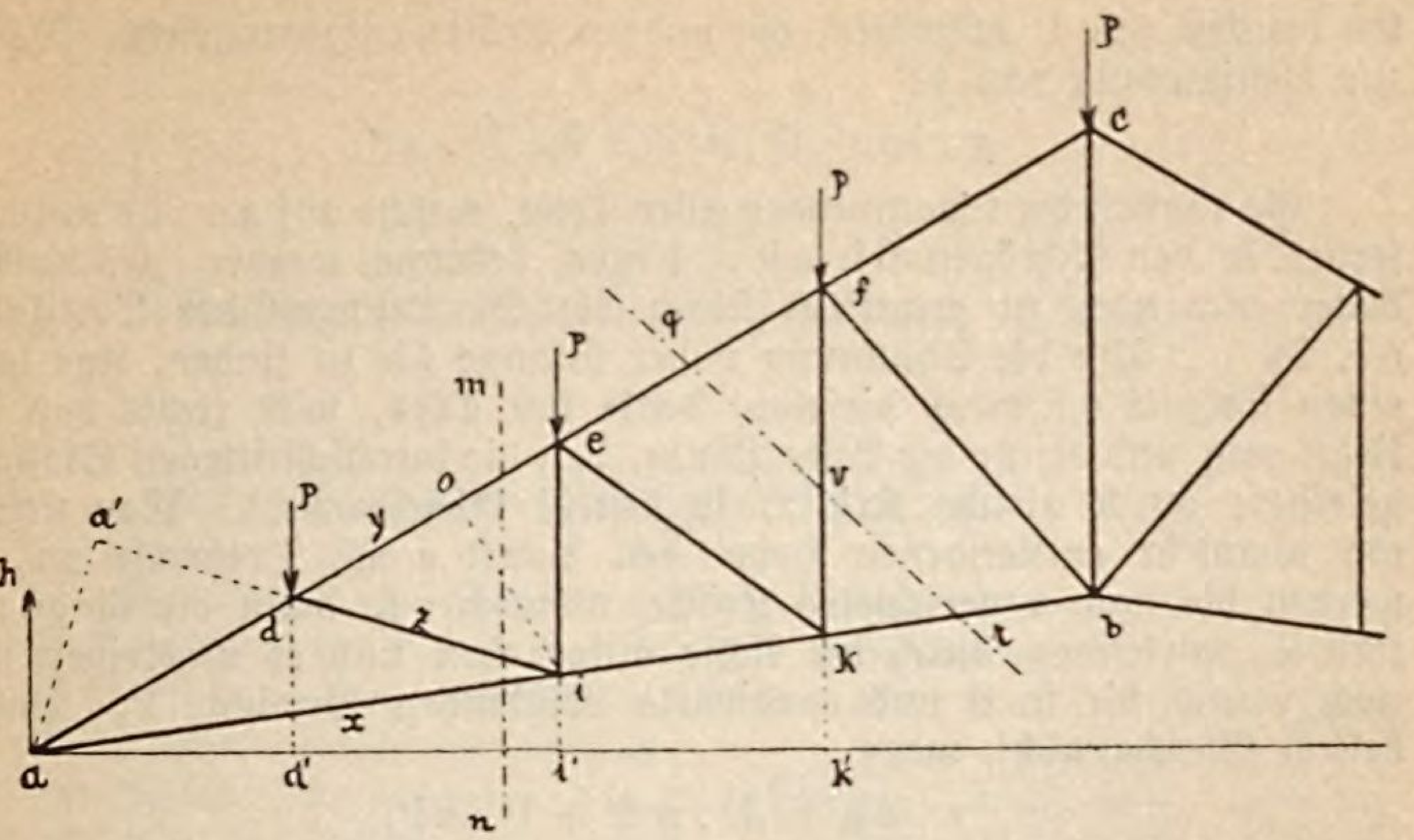
3. **Dachstuhlhälfte zwei Dreiecke.** Jede Dachstuhlhälfte zerfällt in zwei Felder und jedes Feld trage die Last P.

Man denke sich diese Lasten in der Mitte von vier Balken, wie sie längs AB eingezeichnet sind, so tragen die Zwischenstützen D, E und F je die Last P und jede Endstütze A und B die Last 0,5 P. Diese letztern werden direkt durch die Unterlagen a und b aufgehoben. Bringt man daher in a und b Kräfte aufwärts an = 1,5 P, so ist der Dachstuhl im Gleichgewicht. — Man mache ah = 1,5 P, so entspringen aus dieser Resultante die Komponenten ak und ai. Die erstere drückt das Stangenstück af zusammen, die letztere verstreckt die Stange ad. Von f gehen 4 Kräfte aus: die eine ist das Gewicht P = fm, eine andere längs fd und die beiden letzten längs des Dachsparrens ac,



nämlich von f aus gegen a hin der Druck ak und von f aus gegen c hin ein Druck, der kleiner ist als ak um einen Betrag fo, der gefunden wird, indem man das Parallelogramm fmno konstruiert. Der Druck auf das Stangenstück fc ist daher nur ak — fo = cp, während fn den Druck auf die Stange fd darstellt. Man konstruiere das Parallelogramm cpxq, so ist cx die Kraft, mit welcher der Punkt c nach oben gedrückt wird. Zieht man cr = P davon ab, so ist rx die Kraft, womit die Stange cd verstreckt wird. Dieser Wert kann wie folgt kontrolliert werden. Der Punkt d wird abwärts gedrückt durch die Streben fd und gd, ebenso durch die Stangen da und db. Man mache ds = ds′ = fn, ebenso dy = dy′ = ai und ziehe die Horizontalen ss′ und yy′, so sind dt und dv die halben Resultanten der beiden Kräfte, womit Punkt d abwärts gedrängt wird. Also muß sein 2 . tv = rx.

4. **Dachstuhl mit beliebiger Anzahl von Dreiecken.** Es sei ac ein Dachsparren, eingeteilt in 4 gleiche Felder und der vertikale Druck



auf jedes Feld = P; ferner ab die Zugstange, in 4 gleiche Teile geteilt und diese Stange mit dem Sparren durch schiefe und vertikale Stangen verbunden.

Wenn man mit der Verteilung der Gewichte P verfährt wie in der letzten Aufgabe, so kommt auf die Stellen d, e, f und c je die Last P und auf a die Last 0,5 P. Diese letztere wird durch die Unterlage aufgehoben. Daher vermag eine Kraft ah = 3,5 P, von unten nach oben wirkend, die linke Hälfte des Dachstuhles im Gleichgewicht zu erhalten.

Es seien die Spannungen der Teile ad und ai mittelst Parallelogramm bestimmt. Um aber die Spannungen der folgenden zu ermitteln, möge nunmehr die Methode der statischen Momente angewendet werden. Es sei y die Spannung des Teiles de, z die des Teiles di und x die schon bekannte des Teiles ai. Man lege einen Schnitt mn durch diese drei Teile, denke sich den Teil des Dachstuhles, der rechts von diesem Schnitt liegt, entfernt und ersetze die Widerstände, welche sie auszuhalten hatten, durch die Kräfte y, z und x, so wird am Dachstuhlteil links vom Schnitt Gleichgewicht bestehen. Man betrachte nun diesen Teil als Hebel mit der Achse in a, so werden die Kräfte ah, y und x, welche nach der Achse gerichtet sind, durch diese aufgehoben; es kommen also am Hebel nur noch vor: Kraft z mit dem Hebelsarm aa′ und Gewicht P am Arm ad′. Daher zur Berechnung von z die Gleichung

$$z \,.\, aa' = P \,.\, ad'.$$

Um y zu bestimmen, nehme man i als Drehachse an, so werden die Kräfte z und x, welche nach der Achse gerichtet sind, aufgehoben und es verbleiben als Kräfte, welche Drehung anstreben: ah = 3,5 P mit Hebelsarm ai′, P mit dem Arm d′i′ und y mit dem Arm io.

Es drücken 3,5 P aufwärts, die andern Kräfte entgegengesetzt. Daher zur Bestimmung von y:

$$y \cdot io + P \cdot d'i' = 3{,}5\, P \cdot ai'.$$

So können die Spannungen aller Teile, welche auf ac und auf ab, ferner in den Schrägen di, ek .. liegen, bestimmt werden. Es bleiben daher nur noch zu ermitteln übrig die Spannungen der Vertikalen ei, fk .. Um die Spannung v der Stange fk zu finden, lege man einen Schnitt qr durch dieselbe, denke sich alles, was rechts von ihr liegt, weg und ersetze die Widerstände, den die durchschnittenen Stangen geleistet, durch gleiche Kräfte, so besteht Gleichgewicht. Man nehme am nunmehr entstandenen Hebel den Punkt a als Drehachse an, so werden die nach a gerichteten Kräfte, nämlich ah, dann die längs ab und ac wirkenden, durch die Achse aufgehoben und es verbleiben nur noch v und die in d und e abwärts drückenden Gewichte P. Daher besteht Gleichgewicht, wenn

$$v \cdot ak' = P \cdot ad' + P \cdot ai',$$

woraus sich v ergibt. Aehnlich verfahre man mit den andern Stangen.

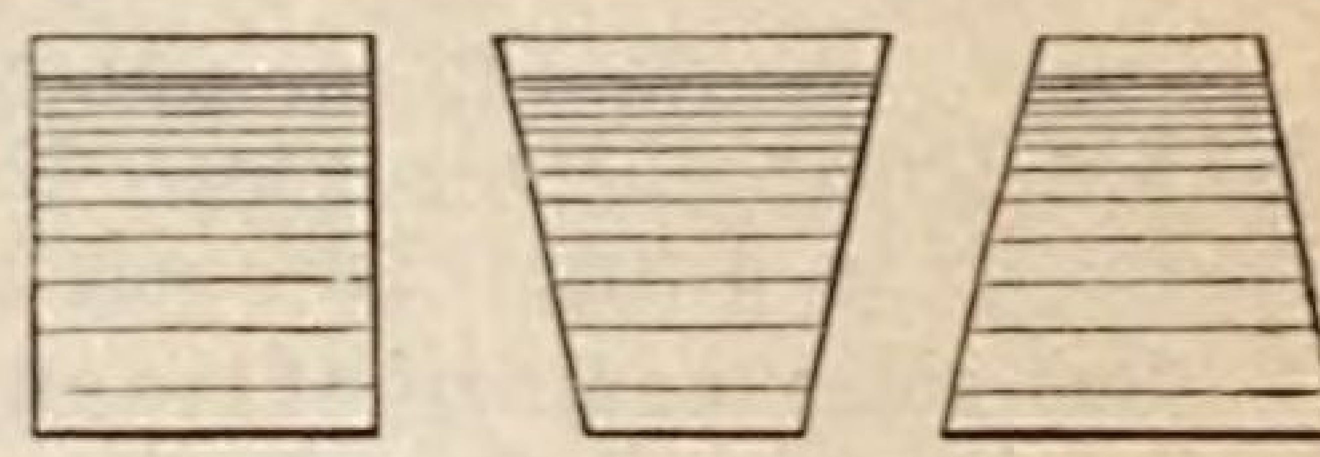
Nimmt man in vorstehender Zeichnung P = 1 an, so ergibt sich:

Druck längs	ah = 3,5	Druck längs	ad = 9,1
„ „	di = 1,2	„ „	de = 7,8
„ „	ek = 1,43	„ „	ef = 6,5
„ „	fb = 1,65	„ „	fc = 5,2
Zug längs	ai = 8,0	Zug längs	ei = 0,5
„ „	ik = 6,9	„ „	fk = 1,0
„ „	kh = 5,8.	„ „	cb = 4,2.

Mechanik tropfbar-flüssiger Körper.

61. Gleichgewicht tropfbarer Flüssigkeiten.

1. **Der Druck des Wassers auf den Boden eines Gefäßes,** hervorgebracht durch das eigene Gewicht des Wassers, nimmt zu wie der vertikale Abstand des gedrückten Bodens vom Wasserspiegel. Dieser Druck ist daher gleich dem Gewicht der vertikalen Wassersäule, deren Grundfläche der Boden und deren Höhe die Entfernung des Bodens vom Wasserspiegel ist. Es ist dabei gleichgültig, ob der Querschnitt des Gefäßes von unten nach oben gleich bleibe, größer oder kleiner werde. Hiernach ist das Gewicht des Wassers beim ersten prism. Gefäß gleich dem Druck auf den Boden, beim zweiten Gefäß größer, beim dritten kleiner als dieser Druck.



Bei den oben verzeichneten Gefäßen ist der Normaldruck auf die Seitenwände gerichtet: beim ersten Gefäß horizontal, beim zweiten schief abwärts, beim dritten schief aufwärts. Wo der Druck schief gerichtet ist, kann er zerlegt werden in einen vertikalen und horizontalen Druck. Beim zweiten Gefäß ist der Vertikaldruck abwärts, beim dritten aufwärts gerichtet.

Beisp. Wie groß ist der Druck des Wassers auf den Boden eines Behälters, wenn die Bodenfläche 4,5 qm und die Wassertiefe 2 m beträgt?

Inhalt der Wassersäule, vertikal über diesem Boden 4,5 . 2 = 9 kbm,
Gewicht derselben oder Druck auf den Boden (da
1 kbm Wasser 1000 kg wiegt) . . . . . 1000 . 9 = 9000 kg.

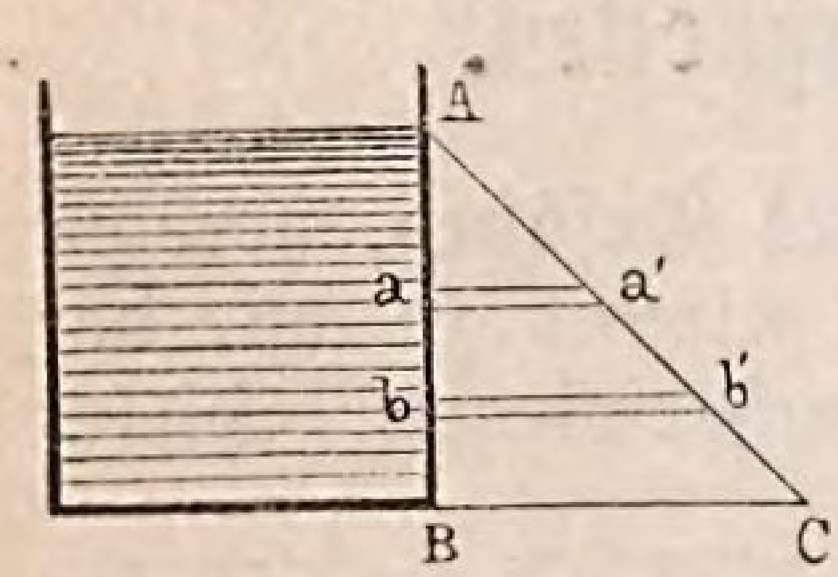
2. **Der Druck auf eine ebene Gefäßwand,** welcher senkrecht gegen diese Wand ausgeübt wird (Normaldruck), sei diese Wand vertikal oder schief, ist gleich dem Gewicht einer prismatischen Wassersäule, welche zur Grundfläche diese Wand und zur Höhe den vertikalen Abstand des Schwerpunktes der Wand vom Wasserspiegel hat.

Beisp. Wie stark ist der Druck gegen ein 5 m breites, rechtwinkliges Schleusenthor, das 2,2 m im Wasser steht, und wie groß der Druck gegen einen rechtwinkligen Schieber, der 0,4 qm Fläche hat und dessen Schwerpunkt 0,3 m vom Boden absteht?

Druck auf das Schleusenthor . . 1000 . 5 . 2,2 . 1,1 = 12100 kg,
Abstand des Schieberschwerpunktes vom Niveau 2,2 − 0,3 = 1,9 m,
somit Druck auf den Schieber . . . 1000 . 0,4 . 1,9 = 760 kg.

3. **Druck auf eine krumme Gefäßwand.** Man projiziere die benetzte krumme Wand auf eine Ebene, welche senkrecht auf der Druckrichtung steht, so ist der Druck auf diese Projektion gleich dem Druck auf die krumme Wand.

4. **Mittelpunkt des Druckes auf eine Gefäßwand.** Auf jedes Flächenteilchen der Wand wird ein Druck ausgeübt. Diese Kräfte haben eine Mittelkraft. Der Angriffspunkt dieser Mittelkraft heißt Mittelpunkt des Druckes auf die Wand. Denkt man sich über den einzelnen Flächenteilchen a, b, .. der Wand AB Wasserprismen aa′, bb′, .. senkrecht auf die Wand errichtet, deren Höhe gleich ist dem Abstand der Teilchen vom Niveau, so stellen die Gewichte dieser Prismen den Druck auf die betreffenden Flächenteilchen dar. Die oberen Enden a′, b′, .. dieser sehr dünnen Prismen liegen in einer Ebene AC. Zwischen dieser Ebene und der Wand AB ist ein Wasserprisma, das den Druck auf die ganze Wand darstellt. Der Mittelpunkt des Druckes ist in gleicher Tiefe mit dem Schwerpunkt dieses Prismas.



Bei einer rechtwinkligen Wand liegt der Mittelpunkt des Druckes in einer Tiefe unter dem Niveau gleich $^2/_3$ von der Höhe der benetzten Wand.

5. **Hydrostatischer Auftrieb.** Ein in eine Flüssigkeit eingetauchter fester Körper verliert an Gewicht so viel, als das Gewicht der Flüssigkeit beträgt, welche er verdrängt. Dieser Gewichtsverlust macht sich als eine Kraft geltend, welche den Körper in die Höhe zu treiben strebt. Man nennt sie hydrostatischen Auftrieb.

6. **Fortpflanzung eines äußeren Druckes.** Der Druck, welcher auf die Oberfläche einer abgesperrten Flüssigkeit ausgeübt wird, wie z. B. der Luftdruck, der Druck eines Kolbens bei hydraulischen Pressen, Pumpen, Feuerspritzen u. s. w., pflanzt sich durch die ganze Masse der Flüssigkeit gleichförmig fort.

7. **Zusammendrückbarkeit.** Tropfbare Flüssigkeiten sind nur schwer zusammendrückbar. Das Volumen eines Wasserkörpers, von allen Seiten zusammengedrückt, nimmt per 1 Atmosphäre Druck ab um 0,00005, also um 1 auf 20000. Diese Volumenabnahme kann daher in der Technik vernachlässigt werden.

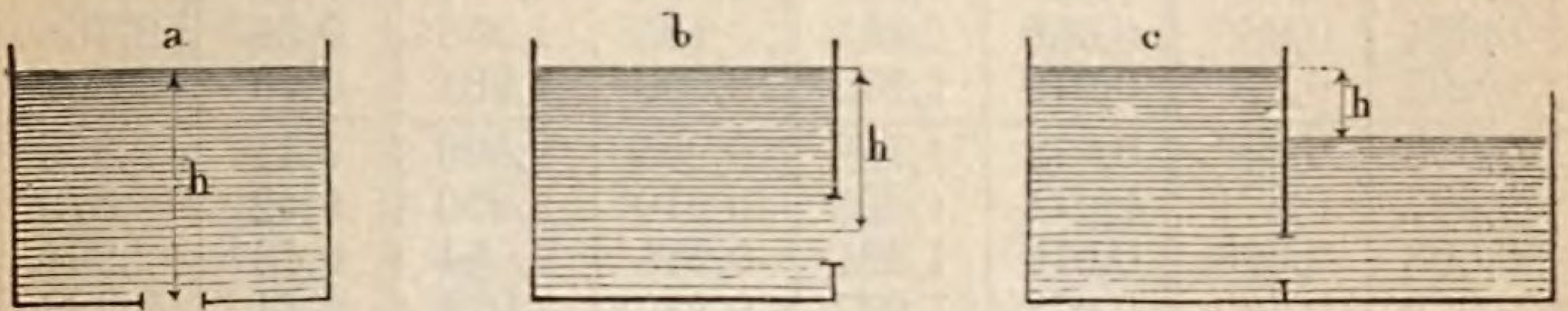
8. **Kommunizierende Röhren.** Gleichartige Flüssigkeiten sind in kommunizierenden Röhren, welche Gestalt, Lage und Sektion dieselben haben mögen, nur dann in Ruhe, wenn die Oberflächen sich in derselben Horizontalebene befinden. Anwendung auf Kanalwaagen, Wasserleitungen, Bohrlöcher 2c.

Sind die Flüssigkeiten von verschiedenem specifischem Gewicht, so wird die Höhe der schwereren Flüssigkeit, welche der leichteren das Gleichgewicht hält, so vielmal kleiner, als ihr specifisches Gewicht größer ist als dasjenige der leichteren Flüssigkeit. Anwendung auf das Barometer 2c.

62. Abfluß des Wassers aus Oeffnungen bei konstanter Druckhöhe.

1. **Druckhöhe, herkommend vom Gewicht des Wassers.** Bringt man in dem Boden oder der Wand eines Wasserbehälters eine Oeffnung an, so wird das Wasser unter der Oeffnung sowohl durch sein eigenes Gewicht, als durch das Gewicht der darüber liegenden Wasserschichten durch die Oeffnung hinausgetrieben. Man nennt hierbei den Abstand des Schwerpunktes der Oeffnung bis zum Wasserniveau die Druckhöhe. Bei einer untergetauchten Ausflußöffnung (s. die dritte Figur) ist die Druckhöhe der vertikale Abstand zwischen den Wasserniveaux der beiden angrenzenden Behälter.

In beistehenden Figuren bezeichnet h die Druckhöhe.



2. **Druckhöhe, beeinflußt durch äußere Pressungen.** Wird die Oberfläche des Wassers in einem Gefäße einem äußern Druck ausgesetzt, so entspricht diesem Druck die Höhe einer Wassersäule, deren Gewicht jener Druck und deren Querschnitt die gedrückte Fläche ist. Die Höhe dieser Wassersäule, vermehrt um h, ist als Druckhöhe zu betrachten.

Fließt Wasser, auf dessen Oberfläche z. B. ein Druck von 1,5 Atmosphären ausgeübt wird, in einen Raum, in welchem ein Druck von 0,6 Atm. herrscht, so ist die Differenz dieser Pressungen = 0,9 Atm. Nun ist aber die Höhe einer Wassersäule von 1 Atm. Druck = 10,33 m; folglich die Höhe der Wassersäule von 0,9 Atm. = 0,9 . 10,33 = 9,297 m. Die Druckhöhe ist mithin in diesem Falle = h + 9,297 m.

3. **Ausflußgeschwindigkeit.** Die Geschwindigkeit, mit welcher eine Flüssigkeit aus der Oeffnung eines Gefäßes tritt, ist theoretisch gleich derjenigen, welche ein Körper erlangt, wenn er durch eine Höhe, welche der Druckhöhe gleich ist, frei herabfällt.

In den Fällen a und c (siehe obige Figuren) ist die Druckhöhe für alle Stellen die gleiche. Für den Fall b gibt es für die einzelnen Punkte der Oeffnung verschiedene Druckhöhen, also auch verschiedene Geschwindigkeiten. Ist die Höhe der Seitenöffnung klein, so weichen die Geschwindigkeiten nur wenig von einander ab und man kann alsdann diejenige als mittlere Geschwindigkeit ansehen, welche im Schwerpunkt der Oeffnung stattfindet.

Es sei v die theoretische Ausflußgeschwindigkeit per 1 Sekunde und g = 9,81 m die Beschleunigung beim freien Fall, so ist nach Toricelli

$$(1) \qquad v = \sqrt{2gh} \text{ und } h = \frac{v^2}{2g}.$$

Werte von v für verschiedene Druckhöhen gibt folgende Tabelle.

Tabelle,

enthaltend die Druckhöhen und die korrespondierenden theoretischen Ausflußgeschwindigkeiten.

Druckhöhe h	Geschwindigkeit v	Druckhöhe h	Geschwindigkeit v	Druckhöhe h	Geschwindigkeit v	Druckhöhe h	Geschwindigkeit v
m	m	m	m	m	m	m	m
0,001	0,140	0,062	1,102	0,180	1,879	0,36	2,658
0,002	0,198	0,064	1,120	0,185	1,905	0,37	2,694
0,003	0,243	0,066	1,138	0,190	1,931	0,38	2,730
0,004	0,280	0,068	1,155	0,195	1,956	0,39	2,766
0,005	0,313	0,070	1,172	0,200	1,981	0,40	2,801
0,006	0,343	0,072	1,188	0,205	2,006	0,41	2,836
0,007	0,371	0,074	1,205	0,210	2,030	0,42	2,870
0,008	0,396	0,076	1,221	0,215	2,054	0,43	2,904
0,009	0,420	0,078	1,237	0,220	2,078	0,44	2,938
0,010	0,443	0,080	1,253	0,225	2,101	0,45	2,971
0,012	0,485	0,082	1,268	0,230	2,124	0,46	3,004
0,014	0,524	0,084	1,283	0,235	2,147	0,47	3,037
0,016	0,560	0,086	1,299	0,240	2,170	0,48	3,069
0,018	0,594	0,088	1,314	0,245	2,192	0,49	3,101
0,020	0,626	0,090	1,329	0,250	2,215	0,50	3,132
0,022	0,657	0,092	1,343	0,255	2,237	0,51	3,163
0,024	0,686	0,094	1,358	0,260	2,259	0,52	3,194
0,026	0,714	0,096	1,372	0,265	2,280	0,53	3,224
0,028	0,741	0,098	1,386	0,270	2,301	0,54	3,254
0,030	0,767	0,100	1,401	0,275	2,323	0,55	3,284
0,032	0,792	0,105	1,435	0,280	2,344	0,56	3,314
0,034	0,817	0,110	1,468	0,285	2,365	0,57	3,344
0,036	0,840	0,115	1,502	0,290	2,385	0,58	3,373
0,038	0,863	0,120	1,534	0,295	2,406	0,59	3,402
0,040	0,886	0,125	1,566	0,300	2,426	0,60	3,431
0,042	0,908	0,130	1,597	0,305	2,445	0,61	3,459
0,044	0,929	0,135	1,628	0,310	2,466	0,62	3,488
0,046	0,950	0,140	1,657	0,315	2,485	0,63	3,516
0,048	0,970	0,145	1,687	0,320	2,506	0,64	3,543
0,050	0,990	0,150	1,715	0,325	2,525	0,65	3,571
0,052	1,010	0,155	1,744	0,330	2,544	0,66	3,598
0,054	1,029	0,160	1,772	0,335	2,563	0,67	3,625
0,056	1,048	0,165	1,800	0,340	2,582	0,68	3,652
0,058	1,066	0,170	1,826	0,345	2,601	0,69	3,679
0,060	1,085	0,175	1,853	0,350	2,620	0,70	3,706

Druckhöhe h	Geschwindigkeit v	Druckhöhe h	Geschwindigkeit v	Druckhöhe h	Geschwindigkeit v	Druckhöhe h	Geschwindigkeit v
m	m	m	m	m	m	m	m
0,71	3,732	1,55	5,514	3,55	8,345	5,60	10,480
0,72	3,758	1,60	5,603	3,60	8,404	5,70	10,573
0,73	3,784	1,65	5,690	3,65	8,462	5,80	10,666
0,74	3,810	1,70	5,775	3,70	8,520	5,90	10,758
0,75	3,836	1,75	5,859	3,75	8,577	6,00	10,849
0,76	3,861	1,80	5,942	3,80	8,634	6,10	10,940
0,77	3,886	1,85	6,026	3,85	8,691	6,20	11,030
0,78	3,911	1,90	6,105	3,90	8,747	6,30	11,118
0,79	3,936	1,95	6,186	3,95	8,803	6,40	11,206
0,80	3,961	2,00	6,264	4,00	8,858	6,50	11,292
0,81	3,986	2,05	6,341	4,05	8,914	6,60	11,378
0,82	4,011	2,10	6,418	4,10	8,966	6,70	11,464
0,83	4,035	2,15	6,494	4,15	9,023	6,80	11,549
0,84	4,059	2,20	6,570	4,20	9,077	6,90	11,634
0,85	4,083	2,25	6,644	4,25	9,131	7,00	11,718
0,86	4,107	2,30	6,717	4,30	9,185	7,10	11,802
0,87	4,131	2,35	6,790	4,35	9,238	7,20	11,885
0,88	4,155	2,40	6,862	4,40	9,291	7,30	11,967
0,89	4,178	2,45	6,933	4,45	9,343	7,40	12,049
0,90	4,202	2,50	7,003	4,50	9,396	7,50	12,130
0,91	4,225	2,55	7,073	4,55	9,448	7,60	12,210
0,92	4,248	2,60	7,142	4,60	9,500	7,70	12,289
0,93	4,271	2,65	7,210	4,65	9,551	7,80	12,369
0,94	4,294	2,70	7,278	4,70	9,602	7,90	12,448
0,95	4,317	2,75	7,345	4,75	9,653	8,00	12,528
0,96	4,340	2,80	7,411	4,80	9,704	8,10	12,606
0,97	4,362	2,85	7,477	4,85	9,754	8,20	12,684
0,98	4,384	2,90	7,543	4,90	9,804	8,30	12,761
0,99	4,407	2,95	7,607	4,95	9,854	8,40	12,838
1,00	4,429	3,00	7,672	5,00	9,904	8,50	12,913
1,05	4,539	3,05	7,735	5,05	9,954	8,60	12,990
1,10	4,645	3,10	7,798	5,10	10,003	8,70	13,065
1,15	4,750	3,15	7,861	5,15	10,052	8,80	13,140
1,20	4,852	3,20	7,923	5,20	10,101	8,90	13,214
1,25	4,952	3,25	7,985	5,25	10,149	9,00	13,288
1,30	5,050	3,30	8,046	5,30	10,197	9,10	13,361
1,35	5,146	3,35	8,107	5,35	10,245	9,20	13,434
1,40	5,241	3,40	8,167	5,40	10,292	9,30	13,506
1,45	5,333	3,45	8,227	5,45	10,339	9,40	13,578
1,50	5,425	3,50	8,286	5,50	10,386	9,50	13,650

Druckhöhe h	Geschwindigkeit v	Druckhöhe h	Geschwindigkeit v	Druckhöhe h	Geschwindigkeit v	Druckhöhe h	Geschwindigkeit v
m	m	m	m	m	m	m	m
9,60	13,722	13,60	16,344	17,60	18,582	23,25	21,357
9,70	13,793	13,70	16,404	17,70	18,635	23,50	21,471
9,80	13,864	13,80	16,464	17,80	18,687	23,75	21,585
9,90	13,935	13,90	16,523	17,90	18,739	24,00	21,698
10,00	14,006	14,00	16,572	18,00	18,791	24,25	21,811
10,10	14,076	14,10	16,631	18,10	18,843	24,50	21,923
10,20	14,145	14,20	16,690	18,20	18,895	24,75	22,034
10,30	14,214	14,30	16,748	18,30	18,947	25,00	22,145
10,40	14,283	14,40	16,807	18,40	18,999	25,25	22,256
10,50	14,352	14,50	16,865	18,50	19,050	25,50	22,366
10,60	14,420	14,60	16,923	18,60	19,102	25,75	22,476
10,70	14,488	14,70	16,981	18,70	19,153	26,00	22,585
10,80	14,556	14,80	17,039	18,80	19,204	26,25	22,693
10,90	14,623	14,90	17,097	18,90	19,255	26,50	22,801
11,00	14,690	15,00	17,154	19,00	19,306	26,75	22,908
11,10	14,757	15,10	17,211	19,10	19,357	27,00	23,014
11,20	14,823	15,20	17,268	19,20	19,408	27,25	23,120
11,30	14,889	15,30	17,325	19,30	19,459	27,50	23,226
11,40	14,955	15,40	17,382	19,40	19,509	27,75	23,331
11,50	15,020	15,50	17,438	19,50	19,559	28,00	23,436
11,60	15,085	15,60	17,494	19,60	19,609	28,25	23,541
11,70	15,150	15,70	17,550	19,70	19,659	28,50	23,645
11,80	15,215	15,80	17,606	19,80	19,709	28,75	23,749
11,90	15,279	15,90	17,662	19,90	19,759	29,00	23,853
12,00	15,343	16,00	17,717	20,00	19,808	29,25	23,957
12,10	15,407	16,10	17,772	20,20	19,906	29,50	24,061
12,20	15,471	16,20	17,827	20,40	20,004	29,75	24,163
12,30	15,534	16,30	17,882	20,60	20,102	30,00	24,263
12,40	15,597	16,40	17,937	20,80	20,200	30,25	24,363
12,50	15,660	16,50	17,992	21,00	20,297	30,50	24,462
12,60	15,728	16,60	18,046	21,20	20,393	30,75	24,561
12,70	15,785	16,70	18,100	21,40	20,489	31,00	24,660
12,80	15,847	16,80	18,154	21,60	20,585	31,25	24,759
12,90	15,909	16,90	18,208	21,80	20,680	31,50	24,858
13,00	15,970	17,00	18,262	22,00	20,775	31,75	24,957
13,10	16,031	17,10	18,316	22,20	20,869	32,00	25,055
13,20	16,092	17,20	18,370	22,40	20,963	32,25	25,153
13,30	16,153	17,30	18,423	22,60	21,056	32,50	25,250
13,40	16,214	17,40	18,476	22,80	21,149	32,75	25,347
13,50	16,274	17,50	18,529	23,00	21,242	33,00	25,444

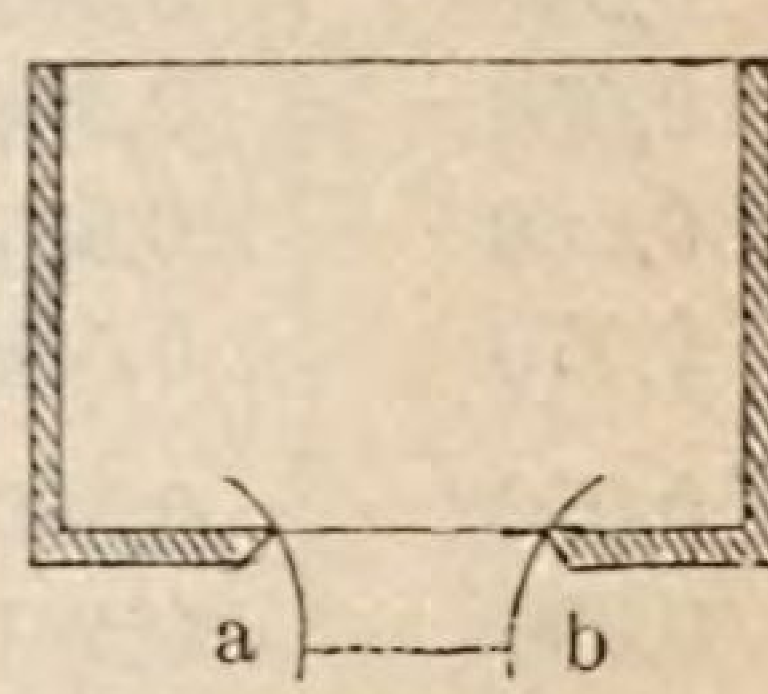
Die wirkliche Ausflußgeschwindigkeit ist wegen der Reibung des Wassers an den Wänden der Oeffnung etwas kleiner als die theoretische, z. B. im Verhältnis von 0,96 : 1. Daher muß man die Größe $\sqrt{2\,g\,h}$ mit 0,96 multiplizieren, um die wirkliche Geschwindigkeit zu erhalten. Man nennt diesen Faktor den Geschwindigkeitskoefficienten. Es ist nach Weißbach

für die Druckhöhen	0,3	1,5	3	117 m
der Geschwindigkeitskoefficient . .	0,958	0,969	0,975	0,988.

4. **Wassermenge.** Man denkt sich dieselbe als Inhalt eines prismatischen Wasserkörpers, dessen Querschnitt die Oeffnung und dessen Länge die Geschwindigkeit per Sekunde ist. Die so berechnete Wassermenge heißt die theoretische. Es sei S der Querschnitt der Oeffnung, Q' diese Wassermenge per Sekunde, so wird

$$(2) \qquad Q' = S\,v \text{ oder } Q' = S\sqrt{2\,g\,h}.$$

Allein bei der Bewegung gegen die Oeffnung werden einzelne Wasserteile aus ihrer geraden Richtung abgelenkt; dadurch findet außerhalb der Oeffnung eine Zusammenziehung oder Kontraktion des Strahles statt. Nach Weißbach hat ein Wasserstrahl aus einer runden Oeffnung in einer Entfernung, die ungefähr der halben Mündungsweite gleichkommt, die stärkste Zusammenziehung und eine Dicke ab, die 0,8 des Durchmessers der Mündung beträgt. Mithin wird der Querschnitt des zusammengezogenen Wasserstrahles in ab nur 0,8 . 0,8 = 0,64 vom Querschnitt der Mündung sein. Dieses Verhältnis heißt Kontraktionskoefficient.



Durch die Kontraktion, sowie durch die Reibung des Wassers wird die wirkliche ausfließende Wassermenge kleiner als die theoretische. Bewirkt die Kontraktion eine Abnahme im Verhältnis von 1 auf 0,64 und die Reibung eine solche im Verhältnis von 1 auf 0,96, so findet eine totale Abnahme im Verhältnis von 1 auf 0,64 . 0,96 oder von 1 auf 0,6144 statt. Dieses Verhältnis zwischen der wirklichen und der theoretischen Wassermenge heißt Ausflußkoefficient.

Bezeichnet k den Ausflußkoefficienten und Q die wirkliche Wassermenge per Sekunde, so ist allgemein

$$(3) \qquad Q = k\,S\,v = k\,S\sqrt{2\,g\,h}.$$

Der Ausflußkoefficient hängt ab von dem Zustand und von der Lage der Oeffnung zu den Seitenflächen des Behälters, von der Druckhöhe 2c.

Wenn die Kontraktion längs des ganzen Umfanges der Oeffnung stattfindet, so heißt die Kontraktion vollständig. Damit sie vollständig werde, muß die Kante der Oeffnung vom benachbarten Boden oder den Wänden des Behälters wenigstens 1—1½mal ihrer kleinsten Dimensionen entfernt sein.

5. Ausflußkoefficienten für rechtwinklige, vertikale Oeffnungen in dünnen Wänden, bei vollständiger Kontraktion und Ausfluß in die freie Luft, nach Poncelet und Lesbros.

Die Wasserstände bei einer Stelle im Reservoir gemessen, wo das Wasser vollkommen ruhig ist.

Wasserhöhe über dem obern Rand der Oeffnung.	Ausflußkoefficienten für Oeffnungshöhen von					
	0,20 m u. darüber	0,10 m	0,05 m	0,03 m	0,02 m	0,01 m
0,005 m	—	—	—	—	—	0,705
0,010	—	—	0,607	0,630	0,660	0,701
0,015	—	0,593	0,612	0,632	0,660	0,697
0,020	0,572	0,596	0,615	0,634	0,659	0,694
0,030	0,578	0,600	0,620	0,638	0,659	0,688
0,040	0,582	0,603	0,623	0,640	0,658	0,683
0,050	0,585	0,605	0,625	0,640	0,658	0,679
0,060	0,587	0,607	0,627	0,640	0,657	0,676
0,070	0,588	0,609	0,628	0,639	0,656	0,673
0,080	0,589	0,610	0,629	0,638	0,656	0,670
0,090	0,591	0,610	0,629	0,637	0,655	0,668
0,100	0,592	0,611	0,630	0,637	0,654	0,666
0,130	0,594	0,613	0,630	0,635	0,652	0,662
0,160	0,596	0,614	0,631	0,634	0,650	0,658
0,200	0,598	0,615	0,630	0,633	0,648	0,655
0,250	0,599	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653
0,300	0,600	0,616	0,629	0,632	0,644	0,650
0,400	0,602	0,617	0,628	0,631	0,642	0,657
0,500	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,644
0,700	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,640
0,900	0,605	0,615	0,626	0,628	0,634	0,635
1,100	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,629
1,300	0,603	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622
1,500	0,602	0,611	0,620	0,620	0,619	0,615
1,700	0,602	0,610	0,617	0,616	0,615	0,612
1,900	0,601	0,608	0,614	0,613	0,612	0,611
3,000	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609

6. Ausflußkoefficienten für rechtwinklige, vertikale Oeffnungen in dünnen Wänden, bei vollständiger Kontraktion und Ausfluß in die freie Luft, nach Poncelet und Lesbros.

Die Wasserstände unmittelbar über der Oeffnung gemessen.

Wasserhöhe über dem obern Rand der Oeffnung.	Ausflußkoefficienten für Oeffnungshöhen von					
	0,20 m u. darüber	0,10 m	0,05 m	0,03 m	0,02 m	0,01 m
0,000 m	0,619	0,667	0,713	0,766	0,783	0,795
0,005	0,597	0,630	0,668	0,725	0,750	0,778
0,010	0,595	0,618	0,642	0,687	0,720	0,762
0,015	0,594	0,615	0,639	0,674	0,707	0,745
0,020	0,594	0,614	0,638	0,668	0,697	0,729
0,030	0,593	0,613	0,637	0,659	0,685	0,708
0,040	0,593	0,612	0,636	0,654	0,678	0,695
0,050	0,593	0,612	0,636	0,651	0,672	0,686
0,060	0,594	0,613	0,635	0,647	0,668	0,681
0,070	0,594	0,613	0,635	0,645	0,665	0,677
0,080	0,594	0,613	0,635	0,643	0,662	0,675
0,090	0,595	0,614	0,634	0,641	0,659	0,672
0,100	0,595	0,614	0,634	0,640	0,657	0,669
0,120	0,596	0,614	0,633	0,637	0,655	0,665
0,160	0,597	0,615	0,631	0,635	0,651	0,659
0,200	0,599	0,615	0,630	0,633	0,649	0,656
0,250	0,600	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653
0,300	0,601	0,616	0,629	0,632	0,644	0,651
0,400	0,602	0,617	0,629	0,631	0,642	0,647
0,500	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,645
0,700	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,640
0,900	0,605	0,615	0,626	0,628	0,634	0,635
1,100	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,629
1,300	0,603	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622
1,500	0,602	0,611	0,620	0,620	0,619	0,615
1,700	0,602	0,610	0,617	0,616	0,615	0,612
2,000	0,601	0,607	0,614	0,612	0,612	0,611
3,000	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609

Beisp. 1. In der vertikalen Wand eines Behälters sei eine rechtwinklige Oeffnung von 0,6 m Länge und 0,20 m Höhe; die obere Kante der Oeffnung liege 1,2 m unter dem Niveau. Wie viel Wasser fließt per Sekunde aus?

Druckhöhe . . . . $1{,}2 + 0{,}5 \,.\, 0{,}20 = 1{,}3$ m.
Entsprechende theoretische Geschwindigkeit (S. 237) . . $= 5{,}050$ m.
Querschnitt der Oeffnung . . . . $S = 0{,}60 \,.\, 0{,}20 = 0{,}12$ qm.
Ausflußkoefficient für 1,2 m Abstand der obern Kante der Oeffnung bis zum Niveau u. für 0,20 m Oeffnungshöhe $= 0{,}604$.
Folglich $Q = 0{,}604\, S \sqrt{2\,gh} = 0{,}604 \,.\, 0{,}12 \,.\, 5{,}05 = 0{,}366$ kbm.

Beisp. 2. In einem Schleusenthore befinde sich ein 1,3 m langer und 0,21 m breiter Schieber, dessen Centrum 3 m unter dem Wasserspiegel steht; wie viel Zeit braucht es, bis 18 kbm Wasser ausfließen?

Nach vorstehender Tabelle ist der Ausflußkoefficient $= 0{,}601$,
also Wassermenge $Q = 0{,}601 \,.\, 1{,}3 \,.\, 0{,}21 \,.\, \sqrt{19{,}62 \,.\, 3} = 1{,}259$ kbm
und die Ausflußzeit für 18 kbm . . $18 : 1{,}259 = 14{,}3$ Sekunden.

7. Ausflußkoefficienten für kreisrunde Oeffnungen im Boden eines Gefäßes bei vollständiger Kontraktion.

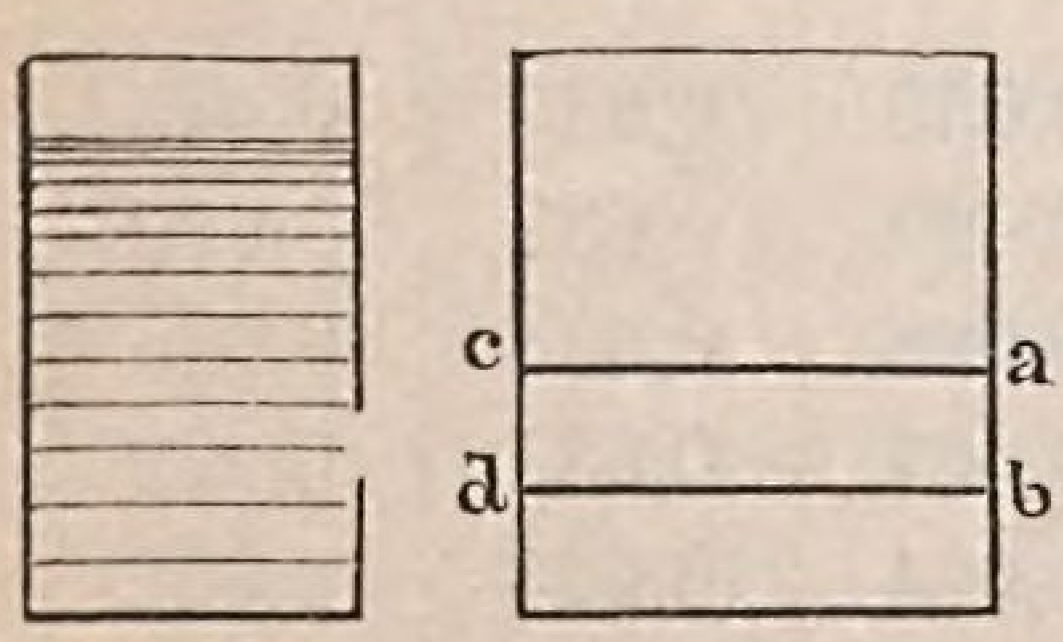
$\frac{\text{Druckhöhe}}{\text{Durchmesser}} =$	0,5	1	3	6	10	100	200
Koefficient =	0,650	0,642	0,633	0,625	0,620	0,618	0,615

8. Ausflußkoefficienten bei unvollständiger Kontraktion. Wenn die Ausflußöffnung in der Wand oder dem Boden des Behälters so gelegen ist, daß eine, zwei oder drei Seiten der Oeffnung eine geradlinige Fortsetzung der Reservoirflächen bilden, so ist die Kontraktion unvollständig. Dieselbe kann bei rechtwinkligen Oeffnungen auf drei, zwei oder einer Seite stattfinden. Um den Ausflußkoefficienten für unvollständige Kontraktion zu erhalten, ist der Ausflußkoefficient, wie er für vollständige Kontraktion angegeben ist, zu multiplizieren

für rechtwinklige Oeffnungen mit: für runde Oeffnungen mit:

(4) $1 + 0{,}1523 \frac{n}{p}$, $1 + 0{,}127 \frac{n}{p}$,

wo p den ganzen Umfang der Oeffnung und n denjenigen Teil des Umfanges, welcher keine Kontraktion bewirkt, bedeutet.



Beisp. Es sei die Länge einer rechtwinkligen Oeffnung 2 m, die Höhe derselben 0,3 m, der Ausflußkoefficient für vollständige Kontraktion 0,63, und es finde längs der beiden Höhekanten ab und cd keine Kontraktion statt, so erhält man:

Umfang der ganzen Oeffnung $p = 2 \,.\, 2\,\text{m} + 2 \,.\, 0{,}3\,\text{m} = 4{,}6$ m.
Der Teil ab + cd derselben . . . . $n = 2 \,.\, 0{,}3\,\text{m} = 0{,}6$ „
Folglich das Verhältnis . . . . $\frac{n}{p} = \frac{0{,}6}{4{,}6} = 0{,}13$
und der Ausflußkoefficient . $0{,}63\,(1 + 0{,}1523 \,.\, 0{,}13) = 0{,}646$.

9. **Koefficienten für den Ausfluß aus cylindrischen Ansatzröhren.** Nach den von Eytelwein mit cylindrischen Ansatzröhren von 0,026 m Durchmesser angestellten Versuchen ist

Verhältnis der Länge zur Weite der Röhre	= 0,3–1	2–3	12	24	36	43	60,
Ausflußkoefficient	. = 0,62	0,82	0,77	0,73	0,68	0,63	0,60.

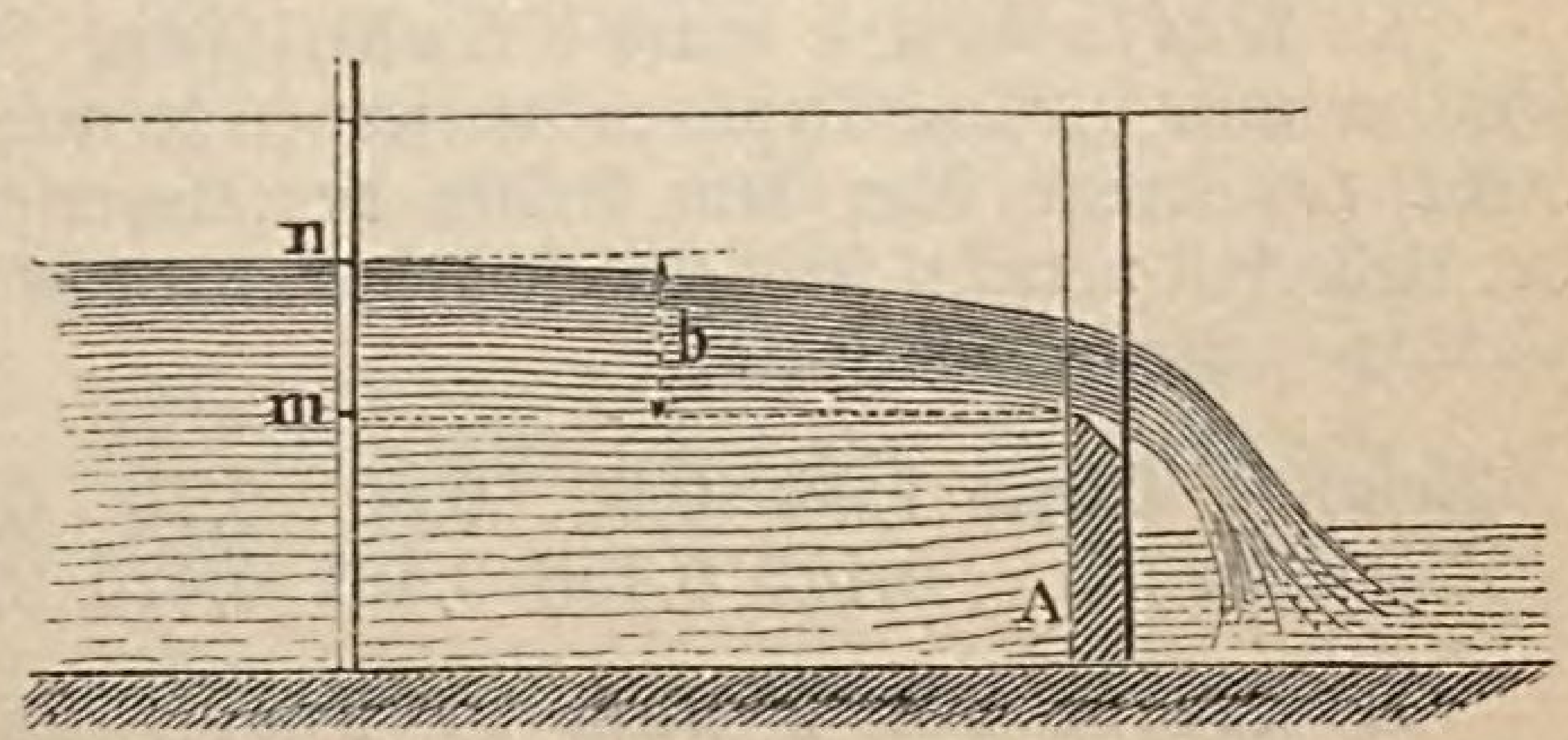
10. **Koefficienten für den Ausfluß aus kegelförmigen Ansatzröhren.** Die kegelförmigen Ansatzröhren sind so am Gefäße angebracht, daß die Durchmesser sich verkleinern, je weiter sie von der Wand des Gefäßes entfernt liegen. Die folgenden Versuche sind von Castel angestellt, mit Ansätzen, deren Länge 2,6mal größer war, als der kleinste Durchmesser, und mit Druckhöhen, welche von 0,215 bis 3,030 m zunehmen und zeigen, daß die Ausflußkoefficienten unabhängig sind von den Druckhöhen.

Konvergenzwinkel der Röhre.	Ausflußkoefficient.	Konvergenzwinkel der Röhre.	Ausflußkoefficient.	Konvergenzwinkel der Röhre.	Ausflußkoefficient.
0°	0,829	12°	0,946	24°	0,910
2	0,872	14	0,943	26	0,904
4	0,903	16	0,939	28	0,898
6	0,924	18	0,930	30	0,894
8	0,937	20	0,921	35	0,882
10	0,943	22	0,915	40	0,870

63. Wassermessung durch Ueberfälle.

1. **Vollkommener Ueberfall.** Wenn bei einem Behälter das Wasser über eine Wand abfließt, so bildet diese Wand einen Ueberfall. Die obere Kante des Ueberfalls heißt Krone oder Scheitel. Der Ueberfall ist vollkommen, wenn der Wasserspiegel des abfließenden Wassers unter dem Scheitel des Ueberfalls liegt.

Soll der Wirkungsgrad eines Wasserrades oder einer Turbine ermittelt werden, so ist die Wassermenge möglichst genau zu bestimmen. Gewöhnlich erstellt man zu diesem Behufe im Zuflußkanal einen künstlichen Ueberfall mit scharfer, horizontal liegender Krone und scharfen vertikalen Wänden; dabei ist die Krone nach der Abflußseite um cirka 45° abzuschrägen, so daß noch ein Streifen von 6 bis 8 mm Breite bleibt. Dann berechnet man die Wassermenge nach folgenden Regeln. Es sei

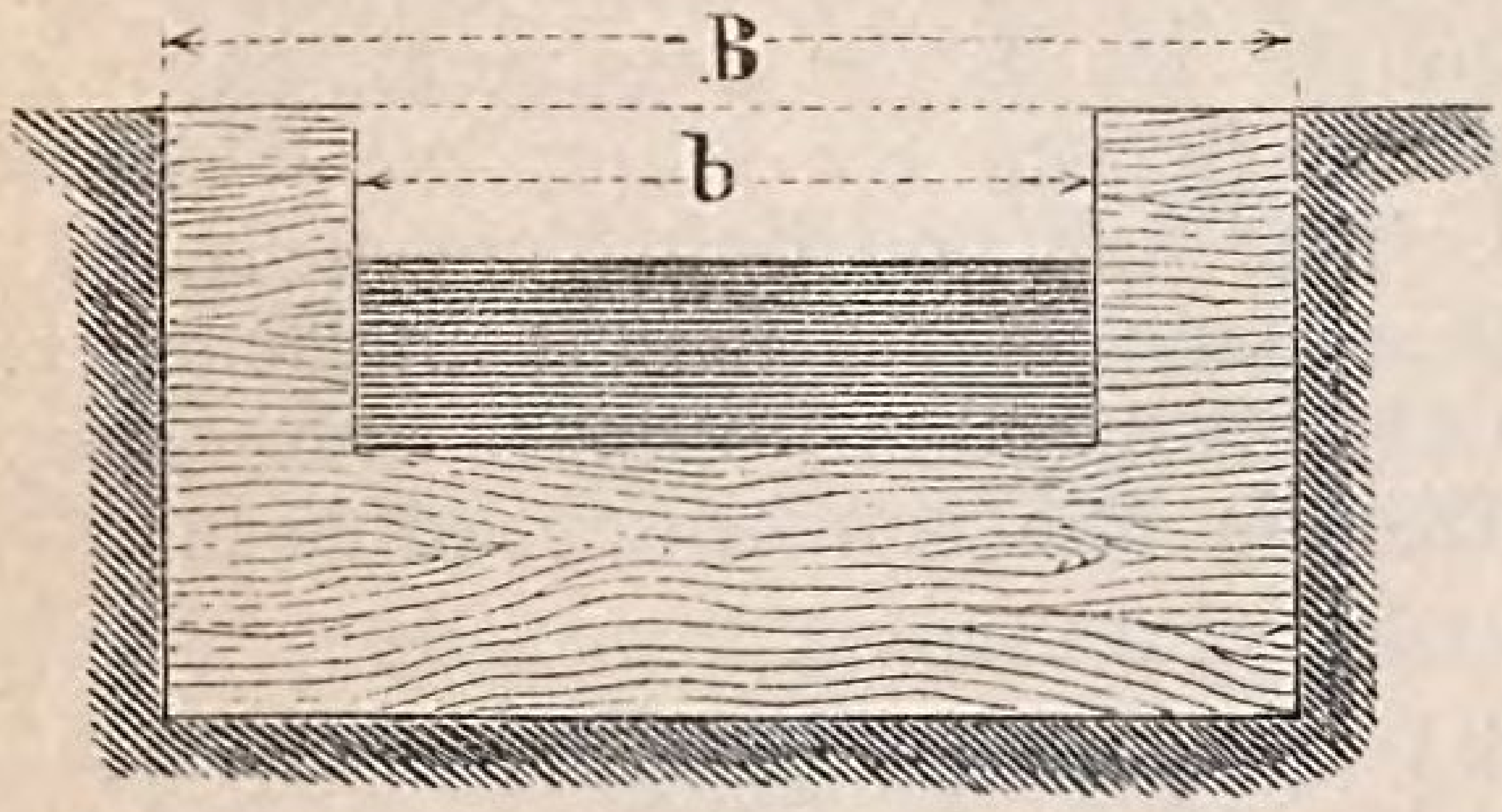


Q die Wassermenge, welche per Sekunde über den Ueberfall fließt,

b die Breite des Ueberfalls,

B die Breite des Behälters oder Kanals, in welchem der Ueberfall angebracht ist (bei trapezförmigem Querschnitt des Kanals, gemessen durch die Mitte der Höhe des Wasserstrahles mn) und

h die Höhe mn des Niveaus über dem Scheitel des Ueberfalls, gemessen in einer Entfernung von 1 bis 2 m hinter dem Ueberfall, wo das Wasser ruhig ist, oder auch gemessen durch die Höhe einer Wassersäule, welche sich in einer oben und unten offenen Glasröhre bildet, die unmittelbar am Ueberfall bis fast an den Boden des Behälters so eingetaucht wird, daß das Wasser ungehindert abfließen kann. Um Schwankungen dieser Wassersäule zu vermeiden, wird die Oeffnung am untern Ende der Röhre verengt.



Nun betrachte man bh als Oeffnung, durch welche das Wasser fließt, so ist $\sqrt{2g\frac{h}{2}} = 0{,}707\sqrt{2gh}$ die theoretische Geschwindigkeit der Wasserschicht in der Mitte der Höhe dieser Oeffnung. Hätten alle Schichten diese Geschwindigkeit und wäre der Ausflußkoefficient $= 0{,}6$, so würde die Wassermenge per Sekunde sein $= 0{,}6 \cdot 0{,}707\, b\, h \sqrt{2gh}$. Bezeichnet man den Zahlenfaktor $0{,}6 \cdot 0{,}707 = 0{,}4242$ allgemein mit k, so erhält man als Wassermenge

$$(1) \qquad Q = k\, b\, h \sqrt{2gh}.$$

Der Wert von k hängt wesentlich vom Verhältnis der Breiten b und B ab. Man nennt dieses Verhältnis relative Breite des Ueberfalls. Wenn sich der Ueberfall auf die ganze Wand ausdehnt, so ist $b = B$.

a) Werte von k nach d'Aubuisson. Wenn die Höhe h zwischen 0,03 m und 0,22 m liegt, wenn ferner h nicht größer als $^1/_3$ von der Höhe der Krone über dem Boden des Ueberfalls ist und wenn endlich der Ueberfall vertikal steht und scharfe Kanten hat, so geben folgende Werte ziemlich genaue Resultate:

Relative Breite	1,00	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30
Werte von k	0,443	0,438	0,431	0,423	0,416	0,410	0,405	0,399.

b) Werte von k nach Lesbros. Die Versuche wurden mit einem Ueberfall gemacht, wo $b = 0{,}20$ m und wo die Krone 0,54 m über dem Boden sich befand.

Relative Breite.	Den Druckhöhen 0,02 m	0,04 m	0,06 m	0,09 m	0,12 m	0,18 m	0,24 m	0,30 m
	entsprechen folgende Werte von k:							
0,054	0,417	0,407	0,401	0,396	0,394	0,392	0,379	0,371
0,156	0,428	0,416	0,407	0,400	0,396	0,393	0,383	0,375
0,833	0,444	0,429	0,424	0,421	0,420	0,424	0,422	0,418
1,000	0,473	0,449	0,437	0,434	0,434	0,432	0,428	0,424

c) Werte von k nach Braschmann. Ist b größer als 0,08 m und liegt die Krone des Ueberfalls wenigstens 0,10 m über dem Boden des Kanals, so findet Braschmann durch Vergleichung vorhandener Versuchsresultate folgende Werte von k für scharfkantige vertikale Ueberfälle im Metermaße:

$$(2) \qquad k = 0,3838 + 0,0386 \frac{b}{B} + 0,00053 \cdot \frac{1}{h}.$$

Man sieht, daß der Wert von k zunimmt, wenn sich b der Größe B nähert und wenn h abnimmt. Hieraus folgende Tabelle:

Relative Breite.	Den Druckhöhen 0,02 m	0,04 m	0,06 m	0,09 m	0,12 m	0,18 m	0,24 m	0,30 m
	entsprechen folgende Werte von k:							
0,05	0,412	0,399	0,394	0,392	0,390	0,389	0,388	0,388
0,07	0,413	0,400	0,395	0,392	0,391	0,389	0,389	0,388
0,10	0,414	0,401	0,396	0,393	0,392	0,391	0,390	0,389
0,15	0,416	0,403	0,398	0,395	0,394	0,393	0,392	0,391
0,20	0,418	0,405	0,400	0,397	0,396	0,394	0,394	0,393
0,30	0,422	0,409	0,404	0,401	0,400	0,398	0,398	0,397
0,40	0,426	0,412	0,408	0,405	0,404	0,402	0,401	0,401
0,50	0,430	0,416	0,412	0,409	0,407	0,406	0,405	0,405
0,60	0,433	0,420	0,416	0,413	0,411	0,410	0,409	0,409
0,70	0,437	0,424	0,420	0,417	0,415	0,414	0,413	0,413
0,80	0,441	0,428	0,424	0,421	0,419	0,418	0,417	0,416
0,90	0,445	0,432	0,427	0,424	0,423	0,422	0,421	0,420
1,00	0,449	0,436	0,431	0,427	0,427	0,425	0,424	0,424

d) Werte von k nach Francis. Die Kante des Ueberfalls, je 0,614 und 1,539 m über dem Boden, war eine stromabwärts abgeschrägte Platte. Für Metermaße ist

$$k = 0,415 \left(1 - 0,1\, n \frac{h}{b}\right),$$

worin n = 2, 1 oder 0 ist, je nachdem Kontraktion auf zwei, auf einer oder gar keiner Seite herrscht.

Hiernach wäre der größte Wert von k = 0,415, selbst für den Fall n = 0, was offenbar andern Angaben widerspricht.

Breite b	Den Druckhöhen 0,05 m	0,10 m	0,15 m	0,20 m	0,25 m	0,30 m	0,35 m	0,40 m
	entsprechen für n = 2 folgende Werte von k:							
m								
0,50	0,407	0,398	0,390	0,382				
0,75	0,409	0,404	0,398	0,393	0,387			
1,00	0,411	0,407	0,403	0,398	0,394	0,390		
1,50	0,412	0,409	0,407	0,405	0,402	0,399	0,397	
2,00	0,413	0,411	0,409	0,407	0,405	0,403	0,407	0,398
3,00	0,414	0,412	0,411	0,409	0,408	0,407	0,405	0,404
4,00	0,414	0,413	0,412	0,411	0,410	0,409	0,408	0,407

e) Werte von Boileau. Querschnitt des Kanals rechtwinklig; relative Breite des Ueberfalls = 1; Ueberfallskante auf 45° abgeschrägt.

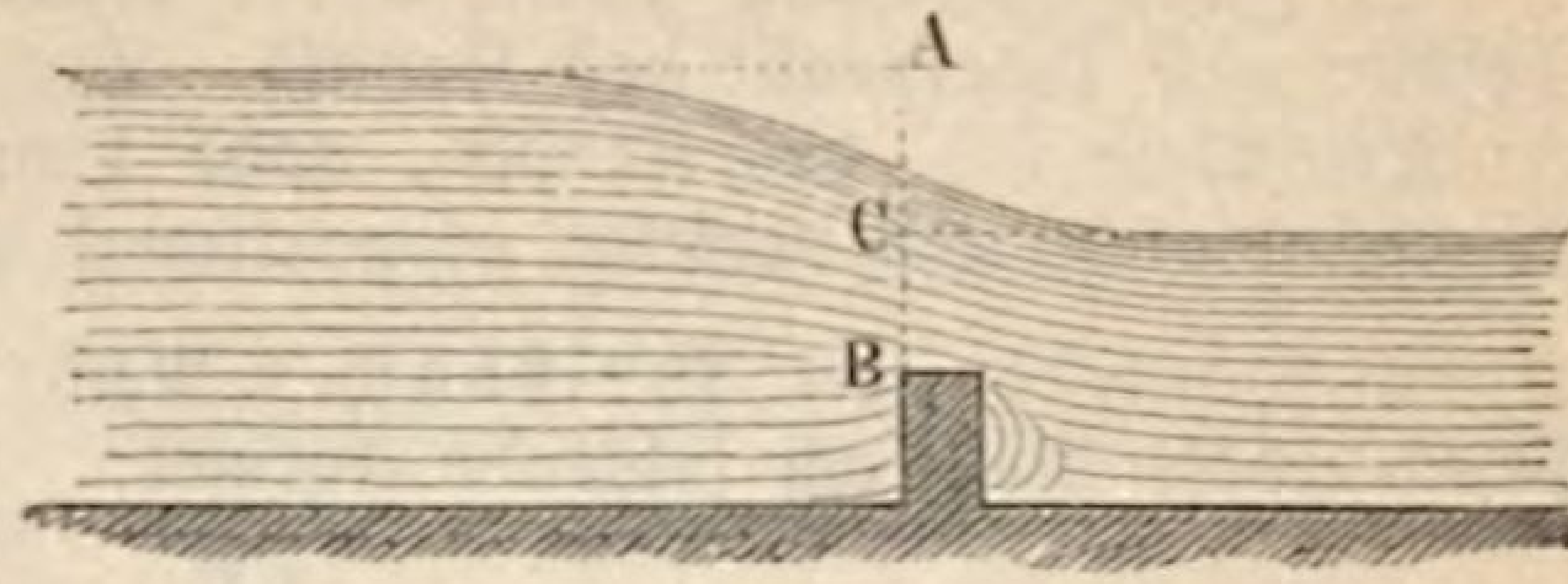
Druckhöhen.	Den Höhen der Ueberfallskante über dem Kanalboden 0,20 m	0,30 m	0,40 m	0,50 m	0,60 m	0,70 m	0,80 m	0,90 m	1,00 m
	entsprechen folgende Werte von k:								
m									
0,04	0,421	0,426	0,418	0,408	0,402	0,404	0,413	0,425	0,418
0,06	0,416	0,422	0,414	0,404	0,438	0,400	0,410	0,422	0,416
0,08	0,418	0,424	0,415	0,405	0,399	0,401	0,411	0,422	0,416
0,10		0,425	0,424	0,418	0,410	0,409	0,413	0,419	0,416
0,12		0,428	0,427	0,421	0,411	0,409	0,412	0,420	0,419
0,14			0,432	0,424	0,413	0,408	0,410	0,422	0,424
0,16			0,436	0,430	0,418	0,408	0,410	0,426	0,425
0,18				0,432	0,424	0,416	0,417	0,428	0,424
0,20				0,436	0,431	0,427	0,428	0,430	0,426
0,22					0,435	0,432	0,433	0,432	0,428
0,24					0,435	0,434	0,437	0,434	0,429
0,26					0,436	0,437	0,439	0,437	0,431
0,30						0,441	0,444	0,444	0,437
0,34							0,443	0,445	0,441
0,38							0,441	0,441	0,443

Beisp. Es seien bei einem scharfkantigen Ueberfall die Größen b = 0,80 m, B = 1,2 m und h = 0,15 m, so wird k nach

d'Aubuisson 0,418; Lesbros 0,415; Braschmann 0,413.
Daher Mittel dieser Werte . . . . k = 0,415.
Ferner für h = 0,15 (S. 236) wird . $\sqrt{2gh} = 1{,}715$ m.
Daher Wassermenge Q = 0,415 . 0,80 . 0,15 . 1,715 = 0,085 kbm.

2. **Unvollständiger Ueberfall.** Der vertikale Abstand des Ober- und Unterwasserspiegels ist kleiner als die Höhe des Oberwasserspiegels über dem Scheitel des Ueberfalls.

Um in diesem Falle die Wassermenge zu bestimmen, denkt man sich die ganze Oeffnung AB aus zwei Teilen bestehend. Die obere Oeffnung bildet einen vollkommenen Ueberfall, ihre Höhe ist der Abstand AC der beiden Wasserspiegel; die untere Oeffnung BC ist so zu betrachten, als läge sie in einer vertikalen Seitenwand. Man bestimme die Wassermenge für beide Oeffnungen, so wird die Summe derselben die verlangte Wassermenge sein.



Beisp. Es sei der Ueberfall so breit wie der Zuflußkanal und zwar = 2 m; ferner sei AC = 0,32 m, BC = 0,28 m.

Durch die obere Oeffnung geht für k = 0,424 die Wassermenge

$$Q = 0{,}424 \,.\, 2 \,.\, 0{,}32 \sqrt{19{,}62 \,.\, 0{,}32} = 0{,}680 \text{ kbm}.$$

Für die untere Oeffnung ist die Druckhöhe $0{,}32 + \frac{0{,}28}{2} = 0{,}46$ m.

Ferner der Kontraktionskoefficient (S. 240), wenn die Zusammenziehung vollständig ist . . . . = 0,60.

Kontraktionskoefficient für Zusammenziehung auf der untern Seite (S. 242) . . 0,60 (1 + 0,1523 . 0,5614) = 0,651.

Folglich Wassermenge $Q = 0{,}651 \,.\, 2 \,.\, 0{,}28 \sqrt{19{,}62 \,.\, 0{,}46} = 1{,}094$ kbm
und die ganze Wassermenge . . . . 0,680 + 1,094 = 1,774 „

64. Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen.

Das Bett des Flusses ist gegen den Horizont geneigt, infolge dessen gleitet das Wasser über dasselbe wie über eine schiefe Ebene hinab. Die Reibung des Wassers am Boden und an den Wänden der Leitung hemmt diese Bewegung in der Art, daß bei einem konstanten Gefälle und Querschnitte die Bewegung eine gleichförmige wird.

Das Wasser geht nicht mit gleicher Geschwindigkeit durch alle Punkte eines und desselben Querschnittes hindurch. Diese Geschwindigkeit ist nahe an der Oberfläche am größten, bei einem Kanal in der Mitte, bei einem Flusse über der größten Wassertiefe. Von da an nimmt die Geschwindigkeit nach dem Grundbett und den Ufern hin ab. Es sei

L die Länge des Kanals,
H das Gefälle (vertikaler Abstand der beiden Enden des Kanals),
S die Querschnittsfläche des Wasserkörpers im Kanal,
U der benetzte Umfang des Querprofils,
V, v die größte und mittlere Geschwindigkeit des Wassers,
g = 9,81 Beschleunigung beim freien Fall und
Q die Wassermenge, welche an irgend einer Stelle per Sekunde durchfließt.

1. **Wassermenge.** Man findet dieselbe, wenn man den Querschnitt des Wasserkörpers mit der mittleren Geschwindigkeit multipliziert. Daher

$$Q = S\,v. \tag{1}$$

2. **Zusammenhang zwischen der mittleren Geschwindigkeit, dem Gefälle und Querprofil des Kanals.** Das Gefälle H ist proportional der Reibfläche LU des Kanals, nahe proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit und verkehrt proportional dem Querschnitt S.

a) Formel von Weißbach. Nach dem eben ausgesprochenen Gesetz erhält Weißbach folgende Formel:

$$H = k\,\frac{LU}{S}\cdot\frac{v^2}{2g}. \tag{2}$$

Hierin bezeichnet $\frac{v^2}{2g}$ die Höhe, von welcher das Wasser herabfallen müßte, um die Geschwindigkeit v zu erreichen (s. Tab. S. 236), und k den Reibungskoefficienten. Dieser ist in folgender Weise von der Geschwindigkeit abhängig:

$$k = 0{,}007409\left(1 + \frac{0{,}05853}{v}\right). \tag{3}$$

Aus dieser Formel ergeben sich folgende zusammengehörige Werte:

v	k	v	k	v	k
0,2 m	0,00958	0,6 m	0,00813	1,0 m	0,00784
0,3	0,00885	0,7	0,00803	1,2	0,00777
0,4	0,00849	0,8	0,00795	1,4	0,00772
0,5	0,00828	0,9	0,00789	1,6	0,00769

b) Formel von Prony. Die von Prony aus Versuchen von Dubuat und Chezy abgeleitete Formel ist

$$H = (0{,}0000444\,v + 0{,}000309\,v^2)\,\frac{LU}{S}. \tag{4}$$

Hieraus folgt zur Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit

$$v = 56{,}85\sqrt{\frac{HS}{LU}} - 0{,}072. \tag{5}$$

c) Formel von Darcy und Bazin. Darcy und Bazin teilen die Kanäle je nach dem Zustand ihrer Oberfläche wie folgt ein:

1. Kanäle mit glatter Oberfläche (Holz, abgeriebener Cement 2c.).
2. Kanäle mit ziemlich glatter Oberfläche (behauene Steine, Backsteine).
3. Kanäle mit ziemlich rauher Oberfläche (Bruchsteinmauerwerk 2c.).
4. Kanäle, deren Boden und Wände aus Erde bestehen.

Für diese Kanäle geben sie folgende Formeln an, mit Beibehaltung der gleichen Reihenfolge:

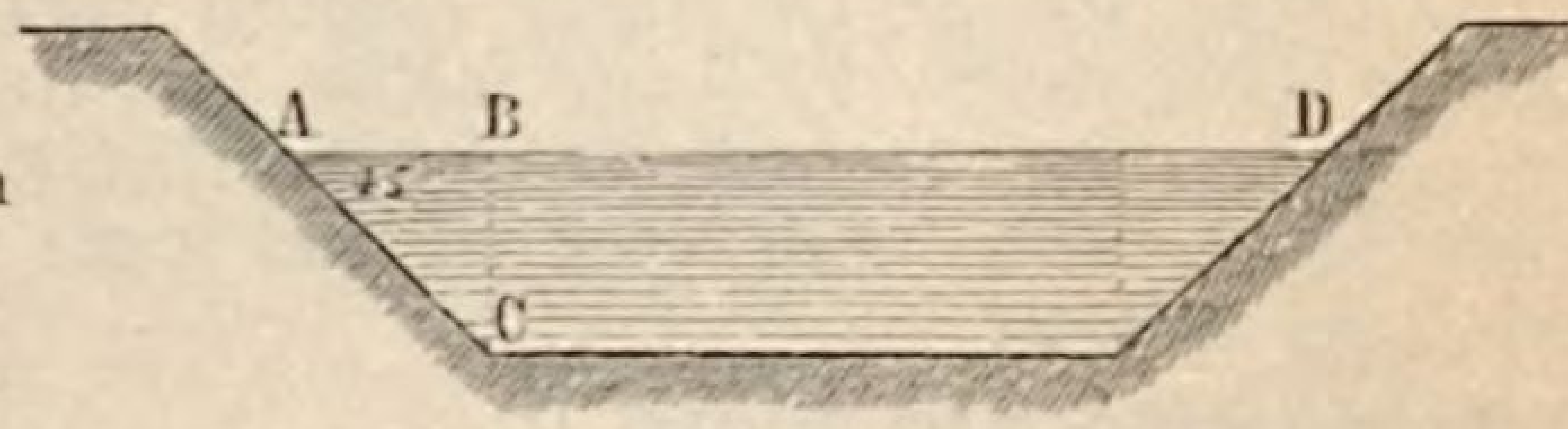
$$(6)\qquad H = 0{,}00015\left(1+\frac{0{,}03\,U}{S}\right)\frac{LU}{S}\,v^2,$$

$$(7)\qquad H = 0{,}00019\left(1+\frac{0{,}07\,U}{S}\right)\frac{LU}{S}\,v^2,$$

$$(8)\qquad H = 0{,}00024\left(1+\frac{0{,}25\,U}{S}\right)\frac{LU}{S}\,v^2,$$

$$(9)\qquad H = 0{,}00028\left(1+\frac{1{,}25\,U}{S}\right)\frac{LU}{S}\,v^2.$$

Beisp. Es sei: Kanallänge L = 1000 m, totales Gefälle H = 0,4 m, untere Breite des Querprofils = 3 m, Böschungswinkel der Wände = 45° und Wassertiefe = 0,6 m. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit des Wassers, und wie viel Wasser liefert der Kanal per Sekunde?



Man erhält:

AB = BC = 0,600 m
AD = 3 + 1,2 = 4,200 „
AC = $BC\sqrt{2}$ = 0,848 „

Folglich Fläche des Querprofils $S = \left(\frac{3+4{,}2}{2}\right)\cdot 0{,}6 = 2{,}160$ qm,
benetzter Umfang . . . . . $U = 3 + 2\,.\,0{,}848 = 4{,}696$ m
und Wert von . . . . . . $\frac{HS}{LU} = \frac{0{,}4\,.\,2{,}16}{1000\,.\,4{,}696} = 0{,}000184.$

Setzt man diese Werte in die obigen Formeln ein, so kommt:

a) Nach Prony. (Formel 5) $v = 56{,}85\sqrt{0{,}000184} - 0{,}072 = 0{,}701$ m.
b) Nach Weißbach. Reibungskoefficient (für v = 0,70) k = 0,00803.

Folglich nach (2) Geschwindigkeit . $v = \sqrt{\frac{2\,.\,9{,}81}{0{,}00803}\cdot\frac{HS}{LU}} = 0{,}67$ m.

c) Nach Darcy. Für sehr glatte Wände folgt aus Formel (6)

$$v^2 = \frac{\frac{HS}{LU}}{0{,}000\,5\left(1+\frac{0{,}03\,U}{S}\right)} = \frac{0{,}000184}{0{,}00015\left(\frac{1+0{,}03\,.\,4{,}696}{2{,}16}\right)} = 1{,}115,$$

folglich die Geschwindigkeit . . . . . $v = \sqrt{1{,}115} = 1{,}05$ m.
Ebenso für ziemlich glatte Wände . . . . . v = 0,92 „
„ für ziemlich rauhe Wände . . . . . v = 0,70 „
„ für Wände und Boden aus Erde . . . v = 0,42 „

Man sieht hieraus, daß die Resultate nach Weißbach und Prony nahe mit einander übereinstimmen, und diese ebenso mit dem von Darcy für eine ziemlich rauhe Oberfläche des Kanals. Nimmt man die Geschwindigkeit = 0,67 m an, so wird:

Wassermenge per Sekunde 2,16 . 0,67 = 1,447 kbm.

3. Anlage eines neuen Kanals. Wenn ein neuer Kanal angelegt werden soll, so ist gewöhnlich seine Länge und die Wassermenge bekannt, welche er per Sekunde zu liefern hat, sowie die mittlere Geschwindigkeit des Wassers.

Läßt man das Wasser schnell fließen, so fällt der Querschnitt des Kanals klein aus und es kostet die Anlage verhältnismäßig wenig; allein dann bedarf es eines großen Gefälles. Wo aber das Wasser Arbeit verrichten soll, ist dieser Verlust an Gefälle nachteilig.

Soll das Wasser sich langsam bewegen, so wird der Querschnitt des Kanals groß und folglich der Kanal kostspielig; dafür reicht dann ein kleines Gefälle aus, um dem Wasser seine geringe Geschwindigkeit zu geben. Der dadurch erzielte Gewinn an Gefälle vermehrt die Arbeit, welche das Wasser leisten soll, und erhöht den Wert der Wasserkraft. In jedem besonderen Falle sind die Vorteile und Nachteile der einen oder anderen Bauart wohl abzuwägen.

Beisp. Es soll ein Kanal angelegt werden von 1500 m Länge, welcher per Sekunde 1,8 kbm Wasser mit einer Geschwindigkeit von 0,5 m liefern soll; der rechtwinklige Querschnitt sei 4mal breiter als die Tiefe des Wassers. Wie groß ist das totale Gefälle und der Querschnitt zu machen?

Querschnitt S nach Formel (1) . . . . . $1{,}8 : 0{,}9 = 2$ qm.
Es sei die Breite des Kanals b, so ist die Wassertiefe $= 0{,}25\,b$.
Folglich der Querschnitt des Wasserkörpers $b \,.\, 0{,}25\,b = 0{,}25\,b^2$.
Beide Werte des Querprofils geben . . . $0{,}25\,b^2 = 2$ qm,
folglich die Kanalbreite . . . . $b = 2{,}828$ m.
und mithin die Tiefe des Wassers . . . . $2{,}828 : 4 = 0{,}707$ m.
Daraus der benetzte Umfang . . $2{,}828 + 2 \,.\, 0{,}707 = 4{,}242$ m.

Setzt man nun die Werte von L, S, U, v in obige Formeln (2), (4) und (8), so ergibt sich nach Weißbach, Prony und Darcy

$$\text{a)}\ (k = 0{,}00828)\ .\ .\ H = 0{,}00828 \cdot \frac{1500 \,.\, 4{,}242}{2} \cdot \frac{0{,}5^2}{2 \,.\, 9{,}81} = 0{,}335\,\text{m}.$$

$$\text{b)}\ H = (0{,}0000444 \,.\, 0{,}5 + 0{,}000309 \,.\, 0{,}5^2)\ \frac{1500 \,.\, 4{,}242}{2} = 0{,}316\ ''$$

$$\text{c)}\ H = 0{,}00024 \left(1 + \frac{0{,}25 \,.\, 4{,}242}{2}\right) \frac{1500 \,.\, 4{,}242}{2} \cdot 0{,}5^2 = 0{,}292\ ''$$

Mittel aus diesen Werten . . . . $= 0{,}314$ „

4. **Direkte Messung der Geschwindigkeit.** Der Kanal oder Fluß habe auf eine längere Strecke ein möglichst konstantes Gefälle und einen möglichst konstanten Querschnitt. Alsdann kann die Geschwindigkeit des Wassers mittelst folgender Vorrichtungen (Tachymeter) ermittelt werden:

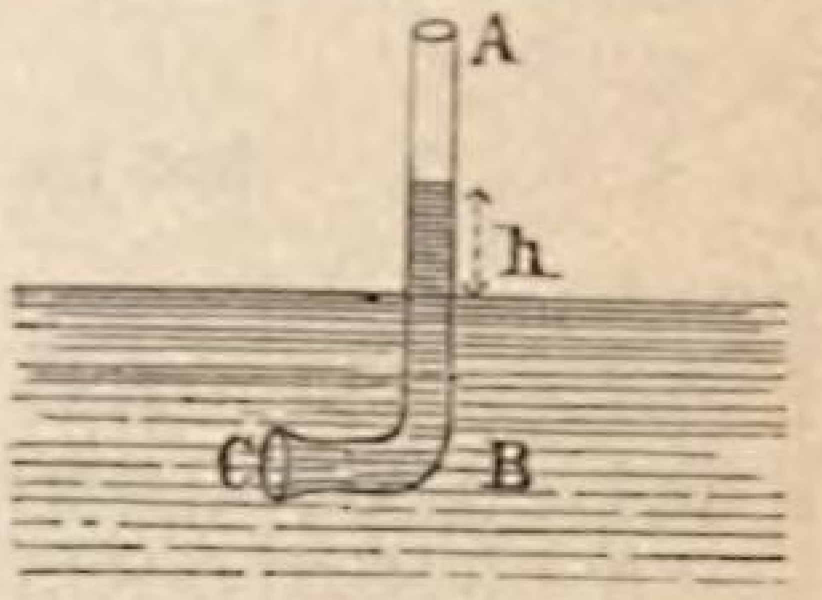
a) Schwimmer. Man nimmt hierzu einen länglichen Körper, welcher, ins Wasser gebracht, so darin schwimmt, daß das eine Ende davon sichtbar wird. Bequem ist hierzu eine Flasche, welche teilweise mit Sand angefüllt ist und bis an den Hals untersinkt. Einen solchen Schwimmer werfe man in das fließende Wasser, so wird derselbe in kurzer Zeit die Geschwindigkeit des Wassers haben. Man beobachte nun vermittelst einer Sekundenuhr die Zeit, während welcher der Schwimmer einen größern Weg von bekannter Länge zurücklegt. Würde er z. B. 200 m in 215 Sekunden zurücklegen, so wäre der Weg per Sekunde, d. h. die Geschwindigkeit $200 : 215 = 0{,}930$ m.

b) Woltmann'scher Flügel. Dieses Instrument hat 2—5 Flügel, welche schräg auf einer horizontalen Achse sitzen. Diese Achse steht mit einem Zählapparat in Verbindung. Wird der Flügel an einer Stange ins Wasser gehalten, so daß die Achse in die Richtung der Strömung fällt, so drehen sich die Flügel. Aus der Anzahl dieser Drehungen kann auf die Geschwindigkeit des Wassers mittelst einer Formel

$$v = a + bu + cu^2 + \ldots$$

geschlossen werden, worin v die gesuchte Geschwindigkeit des Wassers, u die Anzahl Umdrehungen des Flügels in der Minute und a, b, c konstante Größen bezeichnen, welche für jeden Flügel durch Versuche ermittelt werden müssen.

c) Pitot'sche Röhre. Sie wird so in das Wasser gehalten, daß der eine Schenkel AB vertikal, der andere BC horizontal liegt und der Strömung zugekehrt ist. Dadurch steigt das Wasser im vertikalen Schenkel um eine Höhe h über den Wasserspiegel, so daß



$$v = k \sqrt{2gh},$$

wo k eine Konstante bezeichnet, welche durch Versuche ermittelt werden muß an Stellen, wo man v kennt. Nach Dubuat ist im Mittel k = 0,87.

5. **Mittlere Geschwindigkeit des Wassers.** Aus der größten Geschwindigkeit des Wassers ergibt sich annähernd die mittlere:

a) Nach Prony aus Versuchen von Dubuat mittelst der Formel

$$(10) \qquad \frac{v}{V} = \frac{V + 2{,}37}{V + 3{,}15},$$

woraus folgende Tabelle abgeleitet ist:

V	$\frac{v}{V}$	V	$\frac{v}{V}$	V	$\frac{v}{V}$
0,2 m	0,767	0,7 m	0,797	1,2 m	0,821
0,3	0,774	0,8	0,802	1,3	0,825
0,4	0,780	0,9	0,807	1,4	0,829
0,5	0,786	1,0	0,812	1,5	0,833
0,6	0,792	1,1	0,817	1,6	0,836

b) Nach Darcy und Bazin mit Hilfe der Gleichung

$$(11) \qquad \frac{v}{V} = \frac{1}{1 + 14\sqrt{\frac{HS}{LUv^2}}}.$$

Um diese Gleichung zu benutzen, denke man sich z. B. Formel (6) für den Kanalzustand Nr. 1 mit S multipliziert und mit LUv^2

dividiert, so erhält man links gerade die Größe, welche in (11) unter dem Wurzelzeichen vorkommt, und rechts erhält man $0{,}00015\left(1+\frac{0{,}03\,U}{S}\right)$. Daher wird das Verhältnis in diesem speciellen Fall

$$\frac{v}{V}=\frac{1}{1+14\sqrt{0{,}00015\left(1+\frac{0{,}03\,U}{S}\right)}}.$$

Für den Kanalzustand Nr. 2 ist nach Formel (7) die Größe unter dem Wurzelzeichen zu ersetzen durch $0{,}00019\left(1+\frac{0{,}07\,U}{S}\right)$ u. s. w.

Hieraus folgt für gegebene Werte von U : S die Tabelle:

Verhältnis $\frac{U}{S}$	Für die Kanalzustände 1	2	3	4	Verhältnis $\frac{U}{S}$	Für die Kanalzustände 1	2	3	4
	sind die Werte $\frac{v}{V}$:					sind die Werte $\frac{v}{V}$:			
0,2	0,853	0,837	0,818	0,793	4	0,846	0,821	0,765	0,635
0,4	0,853	0,836	0,815	0,777	6	0,843	0,813	0,743	0,593
0,6	0,853	0,835	0,811	0,763	8	0,839	0,805	0,724	0,564
0,8	0,852	0,835	0,808	0,751	10	0,836	0,799	0,709	0,537
1	0,852	0,834	0,805	0,740	12	0,833	0,793	0,696	
2	0,850	0,829	0,790	0,695	14	0,831	0,789	0,684	

Beisp. Es sei die durch einen Schwimmer gefundene größte Geschwindigkeit 0,60 m und das Verhältnis U : S = 2; so wird das Verhältnis von v : V nach Prony = 0,792, nach Darcy und Bazin für einen Kanal, dessen Wände und Boden aus Erde bestehen = 0,695; daher
mittlere Geschwindigkeit nach Prony . . . 0,792 . 0,6 = 0,475 m,
" " " Darcy und Bazin 0,695 . 0,6 = 0,417 "

6. **Geschwindigkeit am Boden der Kanäle.** Nach Dubuat findet man diese Geschwindigkeit durch den Ansatz

$$2v - V,$$

worin v die mittlere und V die größte Geschwindigkeit des Wassers bezeichnen.

7. **Größte Geschwindigkeit, welche das Wasser haben kann, ohne den Boden anzugreifen.** Damit das Wasser den Boden der Kanäle nicht angreife, dürfen nach Telford und Nimmo folgende Grenzen für die Geschwindigkeit des Wassers am Boden nicht überschritten werden:

Kanalbett.	Geschwindigkeit.	Kanalbett.	Geschwindigkeit.
Aufgelöste Erde . .	0,08 m	Eckige Steine . . .	1,22 m
Sand	0,30 "	Konglomerate, Schiefer	1,52 "
Kies	0,61 "	Geschichtete Felsen .	1,84 "
Kieselsteine	0,91 "	Harte Felsen . . .	3,05 "

8. **Stauweite.** Wird in einem Kanal oder Fluß ein Ueberfall (oder ein Wehr) angebracht, so steigt der Wasserspiegel vom Ueberfall an aufwärts auf eine gewisse Strecke. Es sei

t die mittlere Wassertiefe vor Eintritt der Stauung,
z das Gefälle des Kanals per Längeneinheit, vor der Stauung und
h, h' die Stauhöhe am Ueberfall und im Abstand x oberhalb des Ueberfalls; so erhält man für einen Kanal mit konstantem Längen- und Querprofil und einem benetzten Umfang des Querprofils, der wesentlich größer ist als die Wassertiefe, nach Rühlmann annähernd

$$x = (A - A')\,\frac{t}{z},$$

wo A eine Größe bezeichnet, welche aus der folgenden Tabelle für den zugehörigen Wert des Verhältnisses $h : t$ entnommen werden kann. Wenn dabei h in h' übergeht, so wird A zu A'.

Beisp. Es sei die Wassertiefe $t = 0{,}5$ m; das Gefälle z des Kanals $= 0{,}001$ m (per 1 m Länge). Es werde der Wasserspiegel durch den Ueberfall, an der Stelle des Ueberfalls, um $h = 0{,}2$ m in die Höhe getrieben; so gibt die Tabelle für $\frac{h}{t} = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4$ den Wert $A = 1{,}512$; daher die ganze Stauweite (für $h' = 0$, also auch $A' = 0$)

$$x = 1{,}512 \cdot \frac{0{,}5}{0{,}001} = 756 \text{ m}.$$

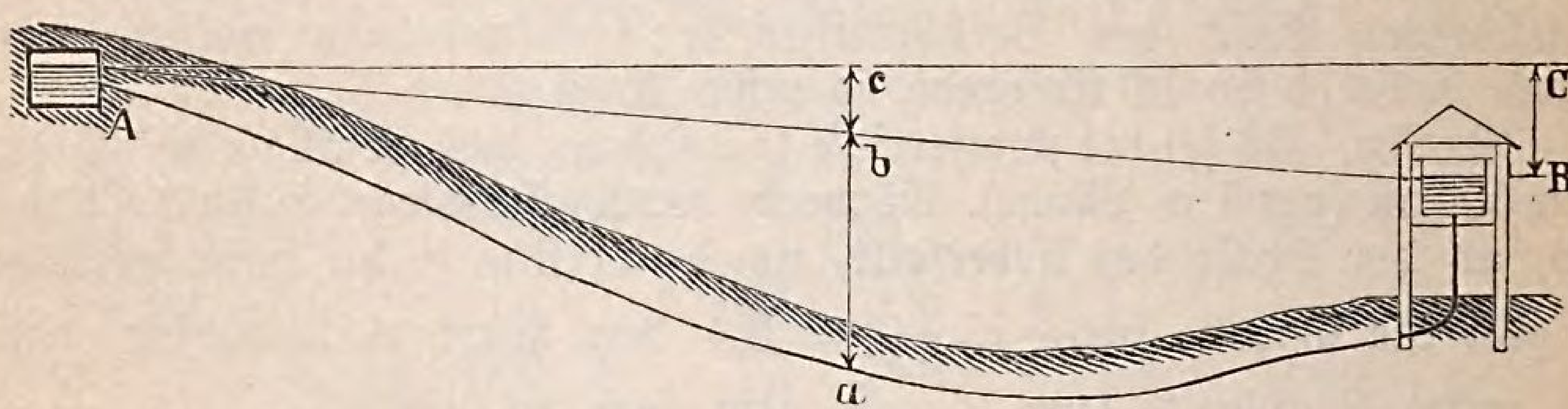
Für eine Stelle, wo z. B. $h' = 0{,}1$ m, wird $h' : t = 0{,}2$; daher $A' = 1{,}136$ und der Abstand vom Ueberfall bis zu dieser Stelle

$$x = (1{,}512 - 1{,}136) \cdot \frac{0{,}5}{0{,}001} = 188 \text{ m}.$$

$\frac{h}{t}$	A	$\frac{h}{t}$	A	$\frac{h}{t}$	A	$\frac{h}{t}$	A	$\frac{h}{t}$	A
0,03	0,386	0,24	1,225	0,45	1,588	0,66	1,876	1,20	2,568
0,04	0,489	0,25	1,246	0,46	1,603	0,67	1,889	1,30	2,618
0,05	0,570	0,26	1,266	0,47	1,618	0,68	1,901	1,40	2,726
0,06	0,638	0,27	1,286	0,48	1,632	0,69	1,914	1,50	2,834
0,07	0,696	0,28	1,305	0,49	1,647	0,70	1,927	1,60	2,940
0,08	0,748	0,29	1,324	0,50	1,661	0,72	1,952	1,70	3,046
0,09	0,793	0,30	1,343	0,51	1,675	0,74	1,976	1,80	3,151
0,10	0,835	0,31	1,361	0,52	1,689	0,76	2,001	1,90	3,255
0,11	0,874	0,32	1,379	0,53	1,703	0,78	2,025	2,00	3,359
0,12	0,910	0,33	1,396	0,54	1,717	0,80	2,049	2,10	3,463
0,13	0,943	0,34	1,414	0,55	1,731	0,82	2,073	2,20	3,556
0,14	0,975	0,35	1,431	0,56	1,744	0,84	2,098	2,30	3,669
0,15	1,005	0,36	1,447	0,57	1,759	0,86	2,121	2,40	3,772
0,16	1,034	0,37	1,464	0,58	1,771	0,88	2,145	2,50	3,875
0,17	1,061	0,38	1,480	0,59	1,785	0,90	2,168	2,60	3,978
0,18	1,087	0,39	1,496	0,60	1,798	0,92	2,197	2,70	4,079
0,19	1,112	0,40	1,512	0,61	1,811	0,94	2,215	2,80	4,181
0,20	1,136	0,41	1,527	0,62	1,824	0,96	2,238	2,90	4,283
0,21	1,159	0,42	1,543	0,63	1,837	0,98	2,261	3,00	4,384
0,22	1,182	0,43	1,558	0,64	1,850	1,00	2,284	3,50	5,437
0,23	1,204	0,44	1,573	0,65	1,863	1,10	2,397	4,00	6,434

65. Bewegung des Wassers in cylindrischen Röhrenleitungen.

Es sei durch eine cylindrische Leitung Wasser aus einem Behälter A nach einem Behälter B zu leiten. Man ziehe vom Oberwasserspiegel eine Horizontale A C, so ist der vertikale Abstand B C der beiden Wasserspiegel das Gefälle, welches auf die Bewegung des Wassers verwendet wird. Man nennt B C Gefällsverlust. Derselbe setzt sich aus Teilen zusammen, die entstehen: beim Uebergang des Wassers aus dem Be-



hälter A in die Leitung, durch Reibung des Wassers in der Leitung, durch Krümmungen und Querschnittsänderungen in der Leitung. Man ziehe von einem Punkte a der Leitung die Vertikale a c nach A C. Es sei auf derselben c b der Gefällsverlust, welcher durch die Bewegung des Wassers im Röhrenstück A a entsteht, so könnte sich das Wasser bei a noch auf die Höhe a b erheben. Bestimmt man eine Reihe solcher Punkte wie b, und verbindet sie unter einander, so entsteht die Drucklinie des Wassers. Es seien

L, D Länge und Durchmesser der cylindrischen Röhre,
v mittlere Geschwindigkeit des Wassers per Sekunde,
g = 9,81 Beschleunigung beim freien Fall,
h Gefälle, verwendet zur Hervorbringung der Geschwindigkeit und
H Gefälle, verwendet auf die Ueberwindung der Reibung.

1. **Wassermenge.** Sie wird erhalten, wenn man die mittlere Geschwindigkeit des Wassers mit dem Querschnitt der Leitung multipliziert.

2. **Gefälle zur Erzeugung der Geschwindigkeit.** Man läßt das Wasser ohne Kontraktion aus dem Reservoir in die Leitung übergehen, um möglichst wenig Gefälle zu verlieren. Dann ist

$$(1) \qquad h = \frac{v^2}{2g}.$$

Zusammengehörende Werte von v und h sind nach S. 236

v =	0,4	0,6	0,8	1,0	1,5	2 m,
h =	0,0082	0,0184	0,0326	0,0510	0,1147	0,204 m.

Diese Werte von h sind so klein, daß sie bei längern Leitungen gegenüber dem folgenden Gefälle fast außer Betracht fallen.

3. **Gefälle zur Ueberwindung der Reibung.** Es gilt das gleiche Gesetz wie für Kanäle, vereinfacht sich jedoch wie folgt.

a) Formel von Weißbach. Dieselbe lautet

$$(2) \qquad H = k\,\frac{L}{D}\cdot\frac{v^2}{2g},$$

worin k den Reibungskoefficienten bezeichnet. Wäre die zweite Potenz von v genau, so würde k konstant sein. Da dies nicht der Fall, so hängt k von v in folgender Weise ab

$$k = 0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}}.$$

Zusammengehörige Werte von k und v sind hiernach:

v	k	v	k	v	k
0,1 m	0,0443	0,6 m	0,0266	1,2 m	0,0230
0,2	0,0356	0,7	0,0257	1,5	0,0221
0,3	0,0317	0,8	0,0250	2	0,0211
0,4	0,0294	0,9	0,0244	3	0,0199
0,5	0,0278	1,0	0,0239	5	0,0186

b) Formel von Prony. Nach ihm ist der Gefällsverlust

$$(3) \qquad H = (0{,}00007\, v + 0{,}001393\, v^2)\, \frac{L}{D},$$

woraus zur Bestimmung der mittlern Geschwindigkeit folgt

$$(4) \qquad v = 26{,}79 \sqrt{\frac{DH}{L}} - 0{,}025.$$

c) Formel von Darcy. Sie ist für neue Leitungen

$$(5) \qquad H = \left(0{,}001014 + \frac{0{,}0000267}{D}\right) \frac{L}{D}\, v^2.$$

Alte Leitungen von Gußeisen, welche eine dünne Schicht Niederschlag oder Rost enthalten, verursachen einen Widerstand, der bis zum doppelten von dem für neue Leitungen steigen kann. Es ist also in solchen Fällen geraten, die konstanten Zahlen in der Klammer der Formel (5) 1,1- bis 2mal größer zu nehmen.

Beisp. 1. Eine cylindrische Röhrenleitung habe 1200 m Länge, 0,25 m Durchmesser und 4,55 m totales Gefälle; wie viel Wasser liefert sie per Sekunde ohne Rücksicht auf Krümmungen und Querschnittsänderungen?

Es ist zuerst v zu berechnen. Man nehme an, es sei h = 0,05 m, so bleibt für H = 4,50 m. Setzt man diesen Wert, sowie den von L = 1200 und D = 0,25 in obige Formeln, so kommt

a) Nach Prony . $v = 26{,}79 \sqrt{\frac{0{,}25 \,.\, 4{,}50}{1200}} - 0{,}025 = 0{,}793$ m.

b) Nach Darcy für neue Röhren

$$v^2 = \frac{DH}{\left(0{,}001014 + \frac{0{,}0000267}{D}\right) L} = \frac{0{,}25 \,.\, 4{,}5}{\left(0{,}001014 + \frac{0{,}0000267}{0{,}25}\right) 1200}.$$

Hieraus folgt $v^2 = 0{,}847$ und $v = \sqrt{0{,}847} = 0{,}92$ m.

Für Leitungen mit Niederschlag oder Rost nehme man v^2 im Verhältnis von 13 zu 10 kleiner, so wird $v^2 = 0{,}651$; $v = 0{,}807$.

Tabelle über Wassermenge und Gefälle per 1 m Länge bei Röhrenleitungen, nach Prony.

Geschwindigkeit per Sek.	Durchmesser 5 cm.		Durchmesser 7 cm.		Durchmesser 10 cm.	
	Wasserm. per Sek.	Gefälle per 1 m.	Wasserm. per Sek.	Gefälle per 1 m.	Wasserm. per Sek.	Gefälle per 1 m.
m	Liter	cm	Liter	cm	Liter	cm
0,02	0,039	0,0039	0,077	0,0028	0,157	0,0019
0,03	0,059	0,0067	0,115	0,0048	0,236	0,0033
0,04	0,078	0,0100	0,154	0,0071	0,314	0,0050
0,05	0,098	0,0138	0,192	0,0099	0,393	0,0069
0,06	0,118	0,0183	0,231	0,0131	0,471	0,0092
0,07	0,137	0,0234	0,269	0,0167	0,550	0,0117
0,08	0,157	0,0289	0,308	0,0207	0,628	0,0144
0,09	0,177	0,0350	0,346	0,0250	0,707	0,0175
0,10	0,196	0,0417	0,385	0,0298	0,785	0,0209
0,12	0,236	0,0568	0,462	0,0405	0,942	0,0284
0,14	0,275	0,0740	0,539	0,0529	1,099	0,0370
0,16	0,314	0,0935	0,416	0,0668	1,257	0,0468
0,18	0,353	0,115	0,693	0,082	1,414	0,058
0,20	0,393	0,139	0,770	0,099	1,571	0,069
0,25	0,491	0,209	0,961	0,149	1,964	0,104
0,30	0,589	0,292	1,154	0,209	2,356	0,146
0,35	0,687	0,390	1,347	0,278	2,749	0,195
0,40	0,785	0,501	1,539	0,358	3,142	0,251
0,45	0,884	0,626	1,732	0,447	3,534	0,313
0,50	0,982	0,766	1,924	0,547	3,927	0,383
0,55	1,080	0,919	2,117	0,656	4,320	0,460
0,60	1,178	1,086	2,309	0,776	4,712	0,543
0,70	1,374	1,146	2,694	1,044	5,498	0,731
0,80	1,571	1,894	3,079	1,353	6,283	0,947
0,90	1,767	2,382	3,464	1,701	7,069	1,191
1,00	1,963	2,925	3,848	2,089	7,854	1,462
1,20	2,356	4,178	4,618	2,985	9,425	2,089
1,40	2,749	5,655	5,388	4,039	10,995	2,827
1,60	3,142	7,354	6,157	5,253	12,566	3,677
1,80	3,534	9,276	6,927	6,626	14,530	4,896
2,00	3,927	11,42	7,697	8,158	15,708	5,711
2,20	4,320	13,78	8,467	9,850	17,279	6,895
2,40	4,712	16,38	9,236	11,700	18,850	8,190
2,60	5,105	19,19	10,006	13,710	20,420	9,597
2,80	5,498	22,23	10,776	15,879	21,991	11,116
3,00	5.890	25,49	11,545	18,208	23,562	12,745

Geschwindigkeit per Sek.	Durchmesser 15 cm.		Durchmesser 20 cm.		Durchmesser 25 cm.	
	Wasserm. per Sek.	Gefälle per 1 m.	Wasserm. per Sek.	Gefälle per 1 m.	Wasserm. per Sek.	Gefälle per 1 m.
m	Liter	cm	Liter	cm	Liter	cm
0,02	0,353	0,0013	0,638	0,0010	0,982	0,0008
0,03	0,530	0,0022	0,942	0,0017	1,473	0,0013
0,04	0,707	0,0033	1,257	0,0025	1,963	0,0020
0,05	0,883	0,0046	1,571	0,0035	2,454	0,0028
0,06	1,060	0,0061	1,885	0,0046	2,945	0,0038
0,07	1,237	0,0078	2,199	0,0058	3,436	0,0047
0,08	1,414	0,0096	2,513	0,0072	3,927	0,0058
0,09	1,590	0,0117	2,827	0,0087	4,418	0,0070
0,10	1,767	0,0139	3,142	0,0104	4,909	0,0083
0,12	2,121	0,0189	3,770	0,0142	5,890	0,0114
0,14	2,274	0,0247	4,398	0,0185	6,872	0,0148
0,16	2,827	0,0312	5,026	0,0234	7,854	0,0187
0,18	3,181	0,0384	5,65	0,0288	8,836	0,0230
0,20	3,534	0,0464	6,28	0,0348	9,817	0,0278
0,22	3,888	0,0551	6,91	0,0413	10,80	0,0331
0,25	4,418	0,0696	7,85	0,0522	12,27	0,0418
0,28	4,948	0,0858	8,80	0,0643	13,74	0,0515
0,32	5,655	0,1099	10,05	0,0824	15,71	0,0659
0,35	6,185	0,1299	10,99	0,0974	17,18	0,0780
0,40	7,069	0,1671	12,57	0,1253	19,63	0,1002
0,45	7,952	0,2088	14,14	0,1566	22,09	0,1253
0,50	8,836	0,2553	15,71	0,1915	24,54	0,1532
0,55	9,719	0,3063	17,28	0,2298	27,00	0,1838
0,60	10,003	0,3621	18,85	0,2725	29,45	0,2172
0,65	11,486	0,4224	20,42	0,3168	31,91	0,2534
0,70	12,370	0,4874	21,99	0,3655	34,36	0,2924
0,75	13,254	0,5570	23,56	0,4178	36,82	0,3342
0,80	14,137	0,6313	25,13	0,4735	39,27	0,3788
0,90	15,904	0,7938	28,27	0,5954	44,18	0,4763
1,00	17,671	0,9749	31,42	0,7312	49,09	0,5849
1,20	21,206	1,3928	37,70	1,0446	58,90	0,8357
1,40	24,740	1,8849	43,98	1,4137	68,72	1,1310
1,60	28,274	2,4514	50,26	1,8385	78,54	1,4708
1,80	31,809	3,0921	56,55	2,3191	88,36	1,8553
2,00	35,343	3,8072	62,83	2,8554	98,17	2,2843
2,25	39,761	4,8058	70,69	3,6041	110,4	2,8833
2,50	44,179	5,9199	78,54	4,4399	122,7	3,5519
2,75	48,597	7,1503	86,39	5,3627	135,0	4,2902
3,00	53,014	8,4969	94,25	6,3727	147,3	5,0981

Geschwindigkeit per Sek.	Durchmesser 30 cm.		Durchmesser 35 cm.		Durchmesser 40 cm.	
	Wasserm. per Sek.	Gefälle per 1 m.	Wasserm. per Sek.	Gefälle per 1 m.	Wasserm. per Sek.	Gefälle per 1 m.
m	Liter	cm	Liter	cm	Liter	cm
0,04	2,827	0,0017	3,848	0,0014	5,027	0,0013
0,05	3,534	0,0023	4,811	0,0020	6,283	0,0017
0,06	4,241	0,0031	5,773	0,0026	7,540	0,0023
0,07	4,948	0,0039	6,735	0,0033	8,796	0,0029
0,08	5,655	0,0048	7,697	0,0041	10,05	0,0036
0,09	6,362	0,0058	8,659	0,0050	11,31	0,0044
0,10	7,069	0,0070	9,621	0,0060	12,57	0,0052
0,12	8,482	0,0095	11,545	0,0081	15,08	0,0071
0,14	9,896	0,0123	13,470	0,0106	17,59	0,0093
0,16	11,310	0,0156	15,394	0,0134	20,11	0,0117
0,18	12,723	0,0192	17,318	0,0165	22,62	0,0144
0,20	14,137	0,0232	19,242	0,0199	25,13	0,0174
0,22	15,55	0,0276	21,17	0,0236	27,65	0,0207
0,25	17,67	0,0348	24,05	0,0298	31,42	0,0261
0,28	19,79	0,0429	26,94	0,0368	35,18	0,0322
0,32	22,62	0,0549	30,79	0,0471	40,21	0,0412
0,35	24,74	0,0650	33,67	0,0557	43,98	0,0487
0,40	28,27	0,0835	38,48	0,0716	50,26	0,0627
0,45	31,81	0,1044	43,29	0,0895	56,55	0,0783
0,50	35,34	0,1276	48,11	0,1094	62,83	0,0957
0,55	38,88	0,1532	52,92	0,1313	69,11	0,1149
0,60	42,41	0,1810	57,73	0,1552	75,40	0,1358
0,65	45,95	0,2112	62,54	0,1810	81,68	0,1584
0,70	49,48	0,2437	67,35	0,2089	87,96	0,1828
0,75	53,01	0,2785	72,16	0,2387	94,25	0,2089
0,80	56,55	0,3157	76,97	0,2706	100,5	0,2367
0,90	63,62	0,3970	86,59	0,3402	113,1	0,2977
1,00	70,69	0,4874	96,21	0,4179	125,7	0,3636
1,15	81,29	0,6407	110,64	0,5491	144,5	0,4805
1,30	91,89	0,8148	125,07	0,6984	163,4	0,6110
1,45	102,49	1,0098	139,51	0,8655	182,2	0,7573
1,60	113,10	1,2257	153,94	1,0506	201,1	0,9193
1,75	123,70	1,4625	168,37	1,2536	219,9	1,0969
1,90	134,30	1,7202	182,80	1,4745	238,8	1,2901
2,10	148,44	2,0962	202,04	1,7968	263,9	1,5722
2,25	159,04	2,4027	216,47	2,0595	282,7	1,8021
2,50	176,71	2,9599	240,53	2,5371	314,2	2,2199
2,75	194,38	3,5752	264,58	3,0644	345,6	2,6814
3,00	212,06	4,2484	288,63	3,6415	377,0	3,1836

Geschwindigkeit per Sek.	Durchmesser 45 cm.		Durchmesser 50 cm.		Durchmesser 55 cm.	
	Wasserm. per Sek.	Gefälle per 1 m.	Wasserm. per Sek.	Gefälle per 1 m.	Wasserm. per Sek.	Gefälle per 1 m.
m	Liter	cm	Liter	cm	Liter	cm
0,10	15,90	0,0046	19,63	0,0042	23,76	0,0038
0,12	19,08	0,0063	23,56	0,0057	28,51	0,0056
0,14	22,27	0,0082	27,49	0,0074	33,26	0,0067
0,16	23,85	0,0103	31,42	0,0094	38,01	0,0085
0,18	28,63	0,0127	35,34	0,0115	42,76	0,0105
0,20	31,81	0,0155	39,27	0,0139	47,51	0,0127
0,25	39,76	0,0232	49,09	0,0209	59,39	0,0190
0,30	47,71	0,0325	58,91	0,0292	71,27	0,0266
0,35	55,66	0,0433	68,72	0,0390	83,15	0,0354
0,40	63,62	0,0557	78,54	0,0501	95,03	0,0456
0,45	71,57	0,0696	88,36	0,0627	106,9	0,0570
0,50	79,52	0,0851	98,47	0,0756	118,8	0,0696
0,55	87,47	0,1021	108,0	0,0919	130,7	0,0835
0,60	95,43	0,1207	117,8	0,1086	142,5	0,0987
0,65	103,4	0,1408	127,6	0,1267	154,4	0,1152
0,70	111,3	0,1625	137,4	0,1462	166,3	0,1329
0,75	119,3	0,1857	147,3	0,1671	178,2	0,1519
0,80	127,2	0,2104	157,1	0,1894	190,1	0,1722
0,85	135,2	0,2367	166,9	0,2131	201,9	0,1937
0,90	143,1	0,2646	176,7	0,2382	213,8	0,2165
0,95	151,1	0,2940	186,5	0,2646	225,7	0,2406
1,00	159,0	0,3249	196,3	0,2925	237,6	0,2659
1,10	174,9	0,3915	215,9	0,3524	261,3	0,3203
1,20	190,8	0,4643	235,6	0,4178	285,1	0,3798
1,30	206,7	0,5432	255,2	0,4889	308,8	0,4444
1,40	222,7	0,6283	274,9	0,5655	332,6	0,5141
1,50	238,5	0,7196	294,5	0,6477	356,4	0,5888
1,60	254,5	0,8171	314,2	0,7354	380,1	0,6686
1,70	270,4	0,9208	333,8	0,8287	403,9	0,7534
1,80	286,3	1,0307	353,4	0,9276	427,6	0,8433
1,90	302,2	1,1468	373,1	1,0321	451,4	0,9383
2,00	318,1	1,2691	392,7	1,1422	475,2	1,0383
2,10	334,0	1,3975	412,3	1,2578	498,9	1,1434
2,20	349,9	1,5322	431,9	1,3790	522,7	1,2536
2,30	365,8	1,6730	451,6	1,5057	546,4	1,3688
2,45	389,6	1,8959	481,0	1,7036	582,1	1,5512
2,60	413,5	2,1327	510,5	1,9194	617,7	1,7449
2,80	445,3	2,4701	549,8	2,2231	665,2	2,0210
3,00	477,1	2,8323	589,0	2,5491	712,7	2,3173

c) Nach Weißbach. Für eine Geschwindigkeit von 0,80 m ist k = 0,025;

$$\text{also } v = \sqrt{\frac{2gHD}{kL}} = \sqrt{\frac{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 4{,}5 \,.\, 0{,}25}{0{,}025 \,.\, 1200}} = 0{,}857 \text{ m.}$$

Das Mittel aus obigen Werten ist 0,819, wofür der Sicherheit wegen nur genommen werden soll 0,75 m.

Nun ist der Querschnitt der Leitung . . . . . = 0,0491 qm.
Folglich Wassermenge per Sekunde 0,75 . 0,0491 = 0,0368 kbm.

Beisp. 2. Es soll der Durchmesser einer cylindrischen Röhrenleitung nach Prony gefunden werden, welche 600 m lang ist, 2 m Gefälle für die Reibung haben darf und per Sekunde 30 Liter Wasser liefern soll.

Diese Aufgabe kann am leichtesten durch einige Annäherungsversuche gelöst werden.

Erster Versuch.

Für D = 0,25 m wird der Querschnitt der Röhre . = 0,049 qm.
Folglich die Geschwindigkeit . . v = 0,030 : 0,049 = 0,612 m.

Setzt man nun 0,61 für v in Formel (3), so findet man:

$$D = (0{,}00007 \,.\, 0{,}61 + 0{,}001393 \,.\, 0{,}61^2) \cdot \frac{600}{2} = 0{,}168 \text{ m.}$$

Da der angenommene Durchmesser 0,25 m, der berechnete 0,168 m ist, so liegt der richtige zwischen beiden.

Zweiter Versuch.

Für D = 0,23 m ist der Querschnitt der Röhre . = 0,0415 qm.
Also die Geschwindigkeit . . v = 0,030 : 0,0415 = 0,722 m.

Setzt man 0,72 für v in Formel (3), so erhält man:

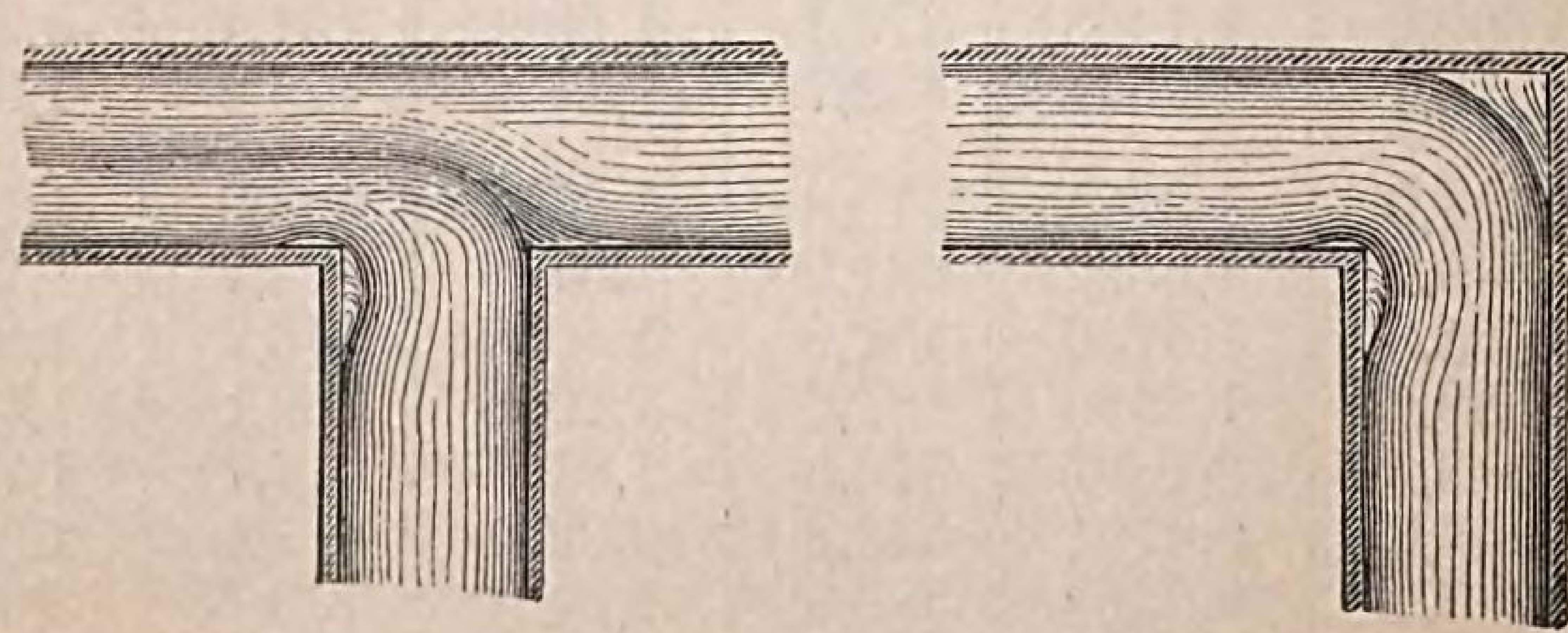
$$D = (0{,}00007 \,.\, 0{,}72 + 0{,}001393 \,.\, 0{,}72^2) \cdot \frac{600}{2} = 0{,}232 \text{ m.}$$

Es ist daher der Durchmesser annähernd = 0,24 m zu nehmen.

4. **Gefällsverlust durch eine Krümmung in der Leitung.** Nach Navier ist für Metermaße

$$\text{Gefällsverlust} = \frac{v^2}{2g}\left(0{,}004\,\frac{1}{r} + 0{,}0186\right)\frac{b}{r};$$

r mittlerer Krümmungshalbmesser der Röhre und
b Länge des gekrümmten Teils der Röhrenachse.

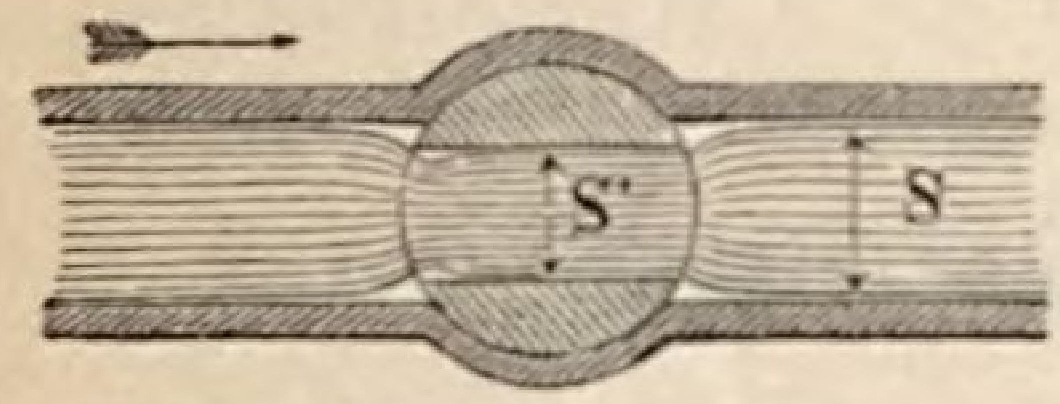


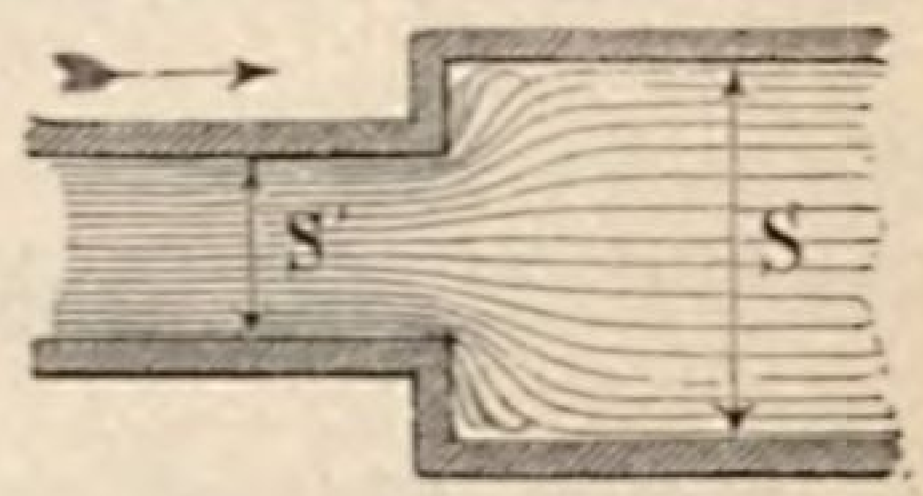
Bei plötzlichen Krümmungen des Wasserstrahls, wie vorstehende Figuren zeigen, ist der Gefällsverlust beträchtlicher. Es entsteht wirbelnde Bewegung, das Wasser bricht sich an scharfen Kanten, welche Kontraktion bewirken; daher entsteht ein Verlust an lebendiger Arbeit, welche im Wasser enthalten ist und der jeden Augenblick durch einen Teil der Wirkung des Gefälles ersetzt werden muß.

5. **Gefällsverluste durch plötzliche Aenderungen des Querschnittes** werden bestimmt durch die Formeln:

für eine Verengerung: $\text{Gefällsverlust} = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{S}{S'k} - 1\right)^2,$

für eine Erweiterung: $\text{Gefällsverlust} = \frac{v^2}{2g}\left(1 - \frac{S'}{S}\right)^2,$





wo v die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre vor der Querschnittsänderung,

S, S′ den größeren und kleineren Querschnitt und

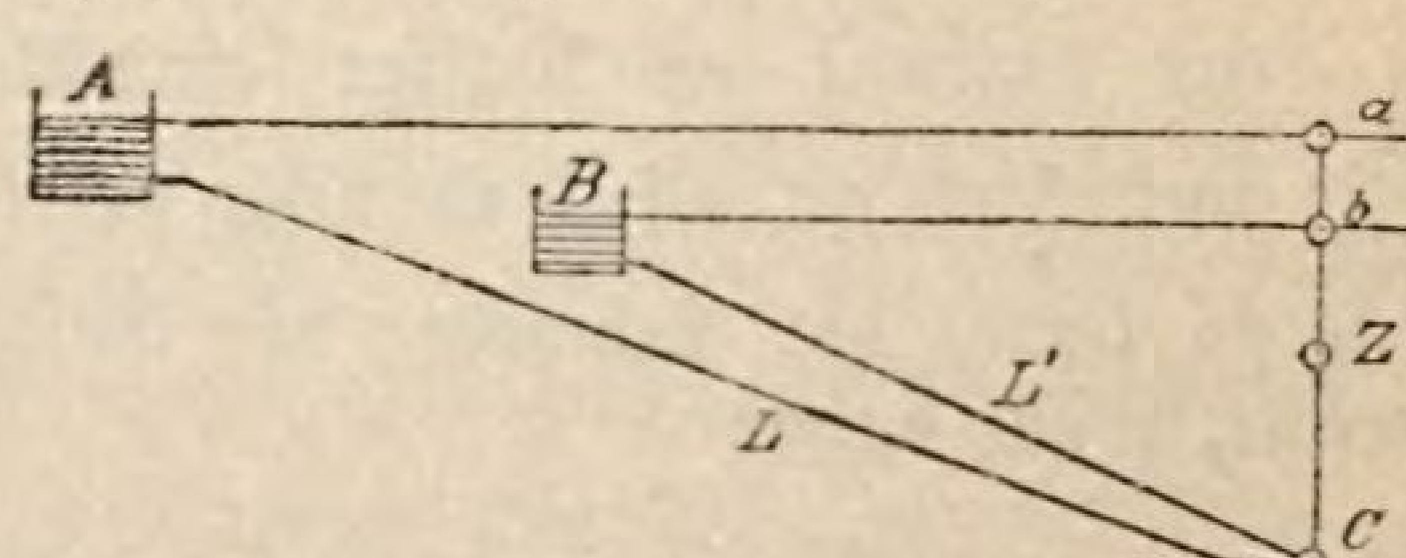
k den Kontraktionskoefficienten für die Verengung bezeichnen.

Beisp. Es sei in einer Röhre von 0,04 qm Querschnitt ein Hahn angebracht, dessen Oeffnung einen Querschnitt von 0,025 qm enthalte. Wie viel Gefälle geht durch diese Verengung, bei einer Geschwindigkeit von 1 m, verloren?

Der Kontraktionskoefficient kann angenommen werden = 0,62. Da ferner S = 0,04, S′ = 0,025, v = 1, so ist

$$\text{Gefällsverlust} = \frac{1\,.\,1}{19{,}62}\left(\frac{0{,}04}{0{,}025\,.\,0{,}62} - 1\right)^2 = 0{,}127 \text{ m}.$$

6. **Zusammenleiten des Wassers aus zwei getrennten Reservoirs.** Aus zwei Reservoirs A und B von verschiedener Höhe soll das Wasser nach einer gemeinschaftlichen Leitung zusammenfließen. Es seien: C die Vereinigungsstelle, Ca die Höhe des Wasserspiegels von A über C, Cb diejenige des Wasserspiegels von B über C. Das Wasser verliere in der Leitung L durch Reibung ein Gefälle az, so muß das Wasser in der Leitung L′ ein Gefälle bz verlieren. Denn alsdann hat das Wasser in C von beiden Leitungen her den gleichen Druck Cz.



Sind die Längen L und L′ gegeben, ebenso die Wassermengen, welche sie per Sekunde liefern sollen, so kann nach dem Vorstehenden der Durchmesser jeder der Leitungen so berechnet werden, daß der Wasserdruck in der einen Leitung um az, in der andern um bz sinkt.

7. **Dicke und Gewicht der Röhren.** Nachzusehen auf S. 224.

8. **Wasserbedarf in Städten.** Man nehme ihn wie folgt an:

		Liter.
Für jeden Bewohner	täglich	20
„ ein Pferd oder ein anderes größeres Haustier .	„	75
„ ein Bad	„	300
„ einen vierrädrigen Wagen	„	75
„ jeden Quadratmeter Fläche eines Gartens . .	„	1,5
„ Bespritzen der Straßen per Quadratmeter Fläche	„	1
„ eine Dampfmaschine ohne Kondensation per Pferd	stündlich	40
„ eine Dampfmaschine mit Kondensation per Pferd	„	420
„ Fabrikation von 1 Liter Bier		2
Man rechnet durchschnittlich per Bewohner .	täglich	70—100

66. Hydraulischer Druck.

Das Wasser übt im Zustand der Ruhe auf jedes eingetauchte Flächenteilchen einen Druck aus, den man den hydrostatischen Druck nennt. Befindet sich jedoch das Wasser in Bewegung, das Teilchen in Ruhe oder das Wasser in Ruhe und das Teilchen in Bewegung oder endlich sind beide in Bewegung, so üben sie gegen einander einen Druck aus, der hydraulischer Druck genannt wird.

1. **Der hydraulische Druck beim Durchgang des Wassers durch ein Gefäß.** Die Figur auf S. 263 stelle ein mit Wasser gefülltes Gefäß dar. Es seien

S, S_0 die Querschnitte der Ausflußöffnung und der Wasseroberfläche, um H von einander abstehend,
S_1 ein Querschnitt durch das Wasser in der Höhe h_1 über S,
p_1, p_0 der Druck auf die Querschnitte S_1 und S_0,
p der Widerstand, welchen der Austrittsstrahl zu überwinden hat, diese Kräfte gemessen durch Wassersäulenhöhen, und
v_0, v_1, v die Geschwindigkeit des Wassers in S_0, S_1 und S.

Nun beginnt das Wasser seine Bewegung in S_0 mit der Druckhöhe $\frac{v_0^2}{2g}$; von hier an wird es noch getrieben durch p_0, so wie längs der Höhe H durch die Schwere; die Geschwindigkeitshöhe, welche es bis S erreicht, wird daher

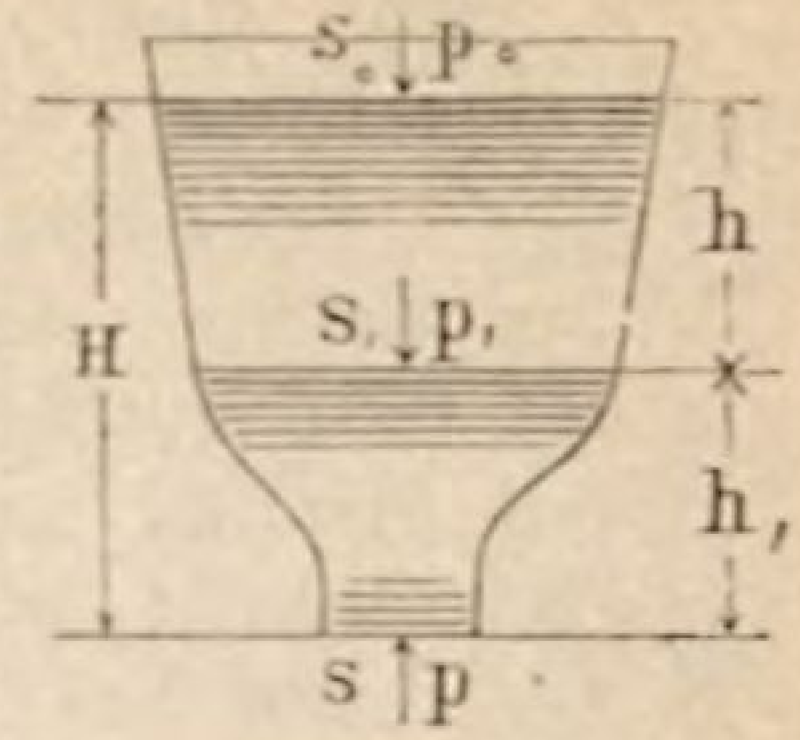
$$\frac{v^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} + p_0 + H - p.$$

Ganz ebenso für den Uebergang von S_1 nach S

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} + p_1 + h_1 - p.$$

Zieht man die letztere Gleichung von der ersten ab und setzt $H - h_1 = h$, so erhält man folgende Gleichung von Daniel Bernoulli

$$(1) \qquad p_1 = p_0 + h + \left(\frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right).$$



Hierin bezeichnet p_1 den hydraulischen und $p_0 + h$ den hydrostatischen Druck des Wassers im Durchschnitt S_1. Man erkennt, daß der hydraulische Druck gleich, größer oder kleiner sein kann, als der hydrostatische, je nachdem die Klammergröße null, positiv oder negativ wird. Beide sind gleich, wenn $v_0 = v_1$, also wenn S_0 und S_1 gleich sind. Wenn $S_1 > S_0$, so wird $v_1 < v_0$ und es könnte das Wasser in einem Seitenröhrchen (Piezometer) von S_1 aus über S_0 emporsteigen. Wenn $S_1 < S_0$, wie in der Figur, so wird $v_1 > v_0$, die Klammergröße also negativ; es könnte daher das Wasser in Seitenröhren von S_1 aus um weniger als h sich erheben.

Es sei $p_0 = p$ der Luftdruck, z. B. 10 m, und der Wasserspiegel werde in gleicher Höhe erhalten, so wird $v_0 = 0$ und Gleichung (1) gibt

$$p_1 - p_0 = h - \frac{v_1^2}{2g}.$$

Hier ist p_1 der Druck des Wassers im Innern, p_0 derjenige der Luft außerhalb des Gefäßes, daher $p_1 - p_0$ der Ueberdruck. Dieser Ueberdruck kann null, positiv oder negativ sein, wie die Größe rechts zeigt. Bringt man bei S_1 eine kleine Oeffnung an, so wird im ersten Fall zwischen Luft und Wasser Gleichgewicht bestehen, im zweiten Wasser hinausgetrieben, im dritten Luft eingesogen.

2. **Arbeitsverlust durch den Stoß des Wassers.** Beim Stoße fester unelastischer Körper entsteht ein Arbeitsverlust, dargestellt durch den Ausdruck (S. 84)

$$\frac{1}{2} \frac{M m}{M + m} (V - v)^2.$$

Es sei nun M die stoßende Wassermasse. Man löse sie in kleine Teile auf und bezeichne die Masse eines solchen Teilchens mit M_1, so wird der Arbeitsverlust, veranlaßt durch M_1, sein

$$\frac{1}{2} \frac{M_1 m}{M_1 + m} (V - v)^2.$$

Allein hierin kann $M_1 + m$, wegen der Kleinheit von M_1 gegenüber der gestoßenen Masse m, ersetzt werden durch m. Dann wird der Arbeitsverlust der Masse $M_1 = \frac{1}{2} M_1 (V - v)^2$. Multipliziert man diesen Wert mit der Anzahl Teile, so wird die Summe aller M_1 zu M; daher der gesuchte Arbeitsverlust

$$(2) \qquad \frac{1}{2} M (V - v)^2 = \frac{P}{2g} (V - v)^2,$$

wo P das Gewicht der Masse M bezeichnet (S. 80). Der Arbeitsverlust ist also proportional der stoßenden Masse und unabhängig von der gestoßenen Masse.

3. **Stoß eines isolierten Wasserstrahles.** Ein Wasserstrahl stoße gegen eine Ebene, in senkrechter Richtung zu derselben. Es seien

S der Querschnitt des Wasserstrahles zunächst der Ebene,
V die Geschwindigkeit des Wassers im Querschnitt S,
v die Geschwindigkeit der gestoßenen Fläche,
P das Gewicht des Wassers, das per Sekunde die Fläche trifft,
γ das Gewicht der Kubikeinheit Wasser und
R der Druck des Wassers gegen die Fläche, so enthält das Wasser vor dem Aufschlagen die Arbeit $\frac{P}{2g}V^2$, verliert nach (2) beim Aufschlagen die Arbeit $\frac{P}{2g}(V-v)^2$ und enthält noch nach dem Stoße die Arbeit $\frac{P}{2g}v^2$. Daher gibt das Wasser folgende Arbeit an die Fläche ab:

$$(3) \qquad \frac{P}{2g}V^2 - \frac{P}{2g}(V-v)^2 - \frac{P}{2g}v^2 = \frac{P}{g}(V-v)\,v.$$

Allein diese Arbeit ist auch Rv; daher durch Gleichsetzen beider Werte

$$(4) \qquad R = \frac{P}{g}(V-v).$$

Der Wasserdruck ist also nichts anderes als die Quantität der Bewegung (S. 66), welche das Gewicht P beim Stoße verliert.

Ist die Fläche in Ruhe, so wird $v = 0$ und $P = \gamma S V$. Daher der Wasserdruck

$$(5) \qquad R = 2\gamma S\,\frac{V^2}{2g}.$$

Hierin stellt $\frac{V^2}{2g}$ die Geschwindigkeitshöhe dar, d. h. die Höhe, von welcher das Wasser frei herabfallen müßte, um die Geschwindigkeit V zu erreichen. Somit ist der Wasserdruck nach (5) gleich dem Gewicht einer Wassersäule, welche zur Grundfläche den Querschnitt des Wasserstrahles und zur Höhe die doppelte Geschwindigkeitshöhe hat.

Der wirkliche Druck, wie ihn direkte Messungen ergeben, ist kleiner als er nach den vorstehenden Formeln erhalten wird. Bezeichnet man das Verhältnis beider mit k, so wird der effektive Druck nach (4)

$$(6) \qquad R = k\,\frac{P}{g}(V-v).$$

Steht die gestoßene Fläche fest, kommt der Wasserstrahl aus der Mündung einer Röhre hervor und ist die Entfernung der Fläche von der Mündung 3mal größer als die mittlere Querschnittsdimension des Strahles, ist ferner die Fläche 10mal größer als der Querschnitt des Strahles und kann endlich das Wasser nach dem Stoße nach allen Richtungen hin auf der Fläche ausweichen, so wird $k = 0{,}975$, also nahe gleich dem theoretischen Werte 1. Für alle anderen Verhältnisse wird k wesentlich kleiner.

Ist die gestoßene Fläche hohl, so daß das Wasser nach dem Stoße gezwungen wird rückwärts auszuweichen, so wird k größer als 1. Wenn die rückläufige Bewegung parallel wäre der des Strahles, so ist der theoretische Wert von $k = 2$.

Die Formel (6) findet auch Anwendung auf unterschlächtige Wasserräder, Schiffmühlenräder ꝛc. In diesem Falle bezeichnet S den benetzten Querschnitt einer Radschaufel, welche vertikal ins Wasser eintaucht. Wert von $k = 0{,}8$ und von $P = \gamma S V$.

4. **Wirkungsgrad beim Stoß des Wassers.** Multipliziert man den Wert von R in (6) mit v, so erhält man nach (3) die Arbeit, welche das Wasser auf die Fläche überträgt. Wird diese durch die absolute Arbeit $\frac{P}{2g} V^2$ des Wassers dividiert, so erhält man als Wirkungsgrad

$$(7) \qquad 2k \frac{(V - v)v}{V^2}.$$

Diese Größe wird ein Maximum, wenn $v = 0{,}5\,V$. Der größte erreichbare Wirkungsgrad wird daher nach $(7) = 0{,}5\,k$.

5. **Stoß und Widerstand im unbegrenzten Wasser.** Eine ebene Fläche vom Inhalte S tauche in Wasser. Sind Fläche und Wasser in Ruhe, so ist die Fläche von beiden Seiten her gedrückt mit dem hydrostatischen Druck $\gamma S h$, wo h den Abstand des Schwerpunktes der Ebene vom Wasserspiegel bezeichnet.

Bewegt sich jedoch das Wasser mit der Geschwindigkeit V gegen die Ebene, senkrecht zur Ebene, so vermehrt sich der Druck des Wassers gegen die Vorderseite um den hydraulischen Druck $k_1 \frac{P}{g} V$ und vermindert sich auf der Gegenseite um $k_2 \frac{P}{g} V$, wo k_1 und k_2 Koefficienten bezeichnen. Die Resultante R aus diesen Kräften ist

$$(8) \qquad R = (k_1 + k_2) \frac{P}{g} V = k \frac{P}{g} V,$$

wo k die Größe $k_1 + k_2$ ersetzt.

Bewegt sich die Fläche gegen das in Ruhe befindliche Wasser und steht die Fläche senkrecht zur Richtung der Bewegung, so gilt das Gesetz (8) ebenfalls und es hat auch k denselben Wert. In diesem Falle wird k zum Widerstandskoefficienten des Wassers.

Bewegt sich das Wasser mit der Geschwindigkeit V, die Fläche mit der Geschwindigkeit v und fallen die Richtungen beider Bewegungen zusammen, so wird der Druck des Wassers gegen die Fläche oder der Fläche gegen das Wasser, entsprechend der Gleichung (6)

$$(9) \qquad R = k \frac{P}{g} (V \mp v),$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn die Bewegungen nach gleicher Richtung, das untere Zeichen, wenn die Bewegungen nach entgegengesetzter Richtung erfolgen.

Wird die Fläche durch einen Körper ersetzt von beliebiger Form, so wird S zur Projektion des Körpers auf einer Ebene, welche senkrecht zur Bewegungsrichtung steht. In diesem Fall hat die Form des Körpers großen Einfluß auf den Wert des Koefficienten k.

Formel (9) findet z. B. Anwendung auf den Widerstand, welchen ein Schiff im ruhigen oder bewegten Wasser findet. Im ersteren Fall ist $P = \gamma S V$, im letzteren $P = \gamma S (V \mp v)$ zu setzen. Es wird daher der Widerstand des Schiffes im letzteren Fall

$$(10) \qquad R = k \frac{\gamma}{g} S (V \mp v)^2.$$

6. **Bestimmung von k.** Für isolierte Strahlen läßt sich der Wert von k dadurch ermitteln, daß hinter die gestoßene Fläche eine Feder gebracht wird, welche den Wasserdruck angibt.

Um k für eine Anordnung von größeren Dimensionen zu bestimmen, mache man ein Modell, das der gegebenen Konstruktion genau ähnlich ist, ermittle den Wert von R für dieses Modell (mittelst Feder, Hebelvorrichtung 2c.) und berechne mit Hilfe der entsprechenden Formel die Größe k, so gilt dieser Wert auch für die größere Konstruktion.

Materielle Flächen, welche dem Stoß senkrecht zur Richtung der Bewegung ausgesetzt sind, können nicht als ähnliche Körper betrachtet werden, da ihre Flächeninhalte bei einer und derselben Dicke sehr verschieden sein können. Daher wird der Wert von k von der Größe der Fläche abhängen.

Häufig bezeichnet man die Konstante $k \frac{\gamma}{g}$ mit K. Dann wird

$$K = \frac{1000}{9,81} k = 51 k.$$

Nun sind

	Werte von k	K
für eine Fläche S, wenn $\sqrt{S} = 0,1$ m	1,41	72
„ eine Fläche S, wenn $\sqrt{S} = 0,3$ m	1,51	77
„ eine größere Fläche, k und K ansteigend bis auf	3,00	153
„ ein Prisma von mäßiger Grundfläche, dessen Kante 6—10mal größer als $\sqrt{S}$	1,10	56
„ eine Kugel mit mäßiger Geschwindigkeit	0,60	30
„ ein Fahrzeug, dessen Hinterteil flach ist, dessen Vorderteil jedoch aus zwei vertikalen Ebenen besteht:		
wenn der Winkel dieser Ebenen 84°	0,60	30
wenn dieser Winkel 60°	0,48	24
und wenn er 36° beträgt	0,46	23

Die Werte für Dampfschiffe sind unter „Dampfschiffe" nachzusehen.

67. Berechnung der Wasserkräfte.

1. **Gefälle.** Das Wasser wird als Triebkraft benutzt, indem man dasselbe auf einen Motor wirken läßt, welcher die im Wasser enthaltene mechanische Arbeit so vollständig als möglich aufnimmt. Dieser Motor ist zwischen den Zufluß- und Abflußkanal gestellt. Der vertikale Abstand der Wasserspiegel beider Kanäle heißt das Gefälle.

2. **Arbeit des Wassers.** Beim Uebergang aus dem einen Kanal in den andern legt das Wasser in vertikaler Richtung einen Weg gleich dem Gefälle zurück und sammelt dabei eine mechanische Arbeit auf, welche gefunden wird, wenn man das Gewicht der Wassermenge per Sekunde mit dem Gefälle multipliziert. Diese mechanische Arbeit heißt der absolute Effekt des Wassers und ist zu unterscheiden von dem Nutzeffekt. Der letztere ist derjenige Teil des absoluten Effektes, welchen das Rad aufnimmt und fortleitet. Er beträgt 0,35 bis 0,85 vom absoluten Effekt.

Beisp. Eine Wassermenge von 0,650 kbm habe ein Gefälle von 2,8 m; wie groß ist ihr absoluter Effekt?

Ein Kubikmeter Wasser wiegt 1000 kg, also ist das Gewicht von 0,650 kbm = 650 kg. Multipliziert man dieses Gewicht mit dem Gefälle, so erhält man als absoluten Effekt 650 . 2,8 = 1820 mkg.

Da ein Pferd zu 75 mkg angenommen wird (S. 74), so beträgt obige Arbeit 1820 : 75 = 24,26 Pferde.

Gehen hiervon 70 Prozent auf das Rad über, so ist

Nutzeffekt = 0,70 . 24,26 = 16,98 Pferde.

3. **Formeln zur Berechnung der vorkommenden Größen.** Es sei

H das Gefälle in Metern,
Q die Wassermenge in Kubikmetern per Sekunde,
N der Nutzeffekt der Wasserkraft in Pferden und
w der Wirkungsgrad, d. h. das Verhältnis zwischen der nützlichen und absoluten Arbeit, so ist 1000 Q das Gewicht des Wassers, 1000 QH seine absolute Arbeit in Kilogramm-Metern und 1000 wQH die nützliche Arbeit in Kilogramm-Metern. Dividiert man diese Größe mit 75, so erhält man den Nutzeffekt in Pferden. Daher ist

(1) $$N = \frac{1000\,wQH}{75} \text{ Pferde,}$$

(2) $$H = \frac{75N}{1000\,wQ} \text{ Meter,}$$

(3) $$Q = \frac{75N}{1000\,wH} \text{ Kubikmeter,}$$

(4) $$w = \frac{75N}{1000\,QH} \text{ Wirkungsgrad.}$$

Beisp. 1. Es sei bei einem Gefälle von 4 m, einem Verhältnis w = 0,60 ein Nutzeffekt von 30 Pferden zu erreichen, so ist hierzu nach Formel (3) folgende Wassermenge nötig:

$$Q = \frac{75 \cdot 30}{1000 \cdot 0{,}60 \cdot 4} = 0{,}937 \text{ kbm.}$$

Beisp. 2. Wenn 1,5 kbm Wasser bei 0,6 m Gefälle eine nützliche Leistung von 8 Pferden geben, so ist nach Formel (4)

$$\text{Wirkungsgrad } w = \frac{75 \cdot 8}{1000 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}6} = 0{,}66.$$

4. **Lebendige Arbeit des Wassers.** Taucht das Rad, wie z. B. bei einer Schiffmühle, in ein fließendes Wasser so ein, daß der Höhen-

unterschied zwischen den Wasserspiegeln vor und hinter dem Rad wegen seiner Kleinheit nicht gemessen werden kann, so ist der absolute Effekt des Wassers nach der Größe der lebendigen Arbeit zu beurteilen, welche im Wasser enthalten ist (S. 78). Zieht man von dieser Arbeit ab den Arbeitsverlust durch Stoß und die Arbeit, welche im Wasser beim Austritt aus dem Rad noch enthalten ist, so erhält man den Nutzeffekt (S. 263).

68. Von den vertikalen Wasserrädern.

Man teilt diese Räder ein in:

1. Unter-, mittel- und oberschlächtige Räder, je nachdem das Wasser auf der untern Seite, oder annähernd in der Höhe der Radachse oder auf der obern Seite in das Rad tritt.

2. Schaufel- und Zellenräder, je nachdem das arbeitende Wasser ein Gerinne zu bestreichen hat oder nicht. Die erstern werden eingeteilt in Räder mit ebenen und gekrümmten Schaufeln.

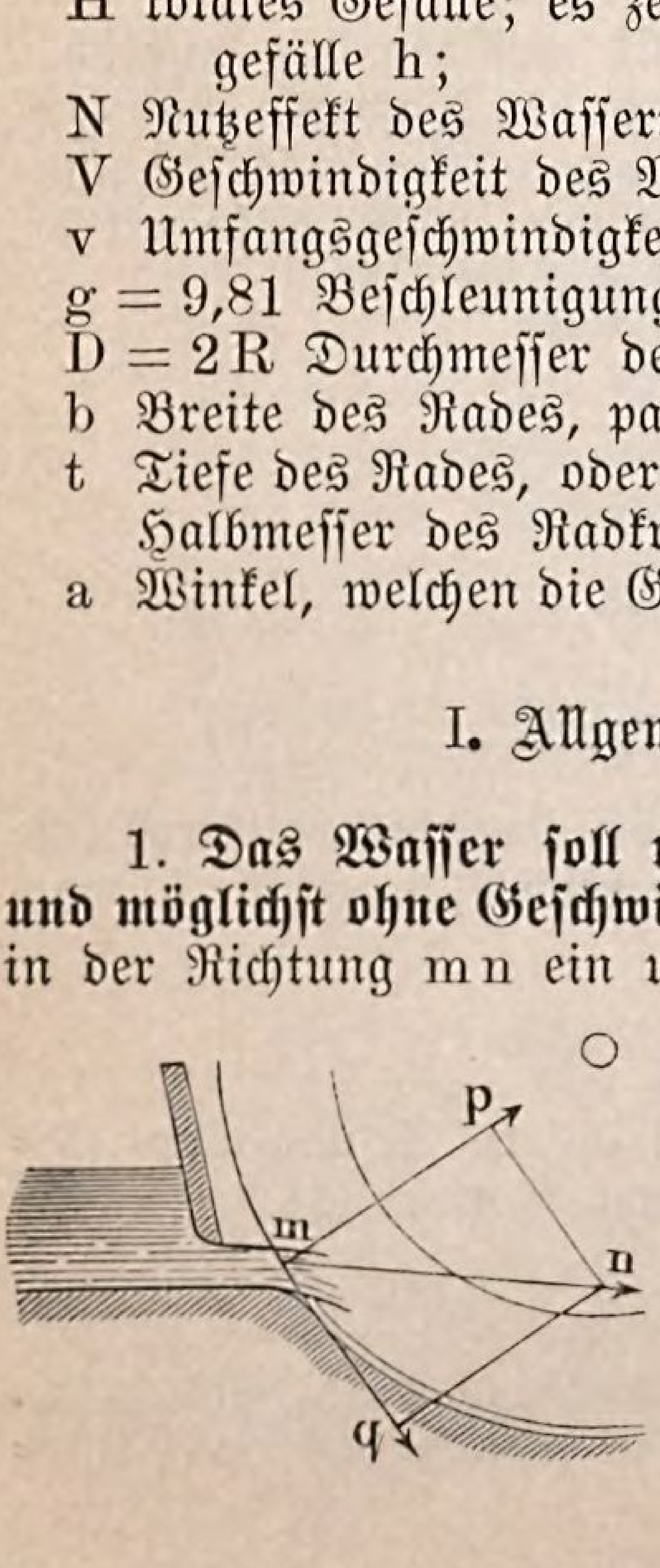
3. Aeltere und neuere Räder. Zu den letztern gehören z. B. die Räder von Poncelet, Sagebien 2c.

In den folgenden Abschnitten bezeichnen:

Q Wassermenge per Sekunde;
H totales Gefälle; es zerfällt in das Stoßgefälle h′ und das Druckgefälle h;
N Nutzeffekt des Wasserrades, in Pferden;
V Geschwindigkeit des Wassers beim Eintritt in das Rad per Sek.;
v Umfangsgeschwindigkeit des Rades per Sek.;
$g = 9{,}81$ Beschleunigung beim freien Fall;
$D = 2R$ Durchmesser des Rades;
b Breite des Rades, parallel zur Welle;
t Tiefe des Rades, oder Unterschied zwischen dem äußern und innern Halbmesser des Radkranzes, und
a Winkel, welchen die Geschwindigkeit V mit dem Radumfang bildet.

I. Allgemeine Konstruktionsregeln.

1. **Das Wasser soll möglichst ohne Stoß in das Rad gelangen und möglichst ohne Geschwindigkeit dasselbe verlassen.** Gesetzt, es trete in der Richtung mn ein und es sei $mn = V$. Man zerlege mn durch das Parallelogramm in die Seitengeschwindigkeiten $mp = V \sin a$ und $mq = V \cos a$. Die erstere Seitengeschwindigkeit ist gegen die Achse gerichtet und geht verloren, sobald das Wasser an den Radboden anschlägt. Die zweite Seitengeschwindigkeit geht beim Eintritt plötzlich in v über und verliert also den Teil $V \cos a - v$. Hierauf



folgt das Wasser der Bewegung des Rades und verläßt dasselbe mit der Geschwindigkeit v. Die beim Eintritt und Austritt entstehenden Gefällsverluste sind daher

$$\frac{V^2 \sin^2 a}{2g}, \quad \frac{(V \cos a - v)^2}{2g}, \quad \frac{v^2}{2g}.$$

Dividiert man die Summe derselben mit H, so entsteht folgendes Verhältnis:

$$\text{(1)} \qquad \frac{V^2 - 2Vv\cos a + 2v^2}{2gH},$$

das zu einem Minimum wird:

a) wenn bei gegebenen Geschwindigkeiten a = 0 ist, das Wasser also tangential an den Radumfang eintritt, und

b) wenn v = 0,5 V cos a, d. h. wenn die Umfangsgeschwindigkeit des Rades die Hälfte ist von der Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser in der Richtung der Drehung in das Rad gelangt. Eine gute Eigenschaft der Wasserräder besteht indessen darin, daß der Wert von v herabsinken kann auf 0,4 V cos a und hinaufsteigen auf 0,6 V cos a, ohne daß das Verlustverhältnis (1) beträchtlich größer wird.

Da der Wert (1) dem Gefälle H verkehrt proportional ist, so fällt dieser Verlust verhältnismäßig groß aus bei kleinem Gefälle und klein bei großem Gefälle.

Beisp. Es seien: das Gefälle = 0,5 m, die Geschwindigkeiten des Wassers und Rades = 3 m und 1,4 m und Winkel a = 30°. Wie groß ist der Verlust an Gefälle beim Ein- und Austritt des Wassers?

Es ist cos 30° = 0,866 und sin 30° = 0,500; folglich

erster Verlust . . . $\frac{3^2 \cdot 0{,}5^2}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5} = 0{,}229$ vom Gefälle,

zweiter Verlust $\frac{(3 \cdot 0{,}866 - 1{,}4)^2}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5} = 0{,}146$ " "

dritter Verlust . . . $\frac{1{,}4^2}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5} = 0{,}200$ " "

Summe der Gefällsverluste . . = 0,575 " "

Davon kommen auf den Eintritt 0,229 + 0,146 = 0,375 und auf den Austritt 0,200 vom ganzen Gefälle.

2. **Die Wasserverluste sollen möglichst klein sein.** Bei den Wasserrädern unterscheidet man das Stoßgefälle h′ und das Druckgefälle h (Fig. S. 271). Längs des letztern finden Wasserverluste statt.

a) Schaufelräder. Zwischen Schaufel und Gerinne entweiche per Sekunde eine Wassermenge Q′. Es findet dies statt längs der Höhe h; es geht also ein Effekt verloren, proportional Q′h. Das Verhältnis desselben zum absoluten Effekt der ganzen Wassermenge ist daher

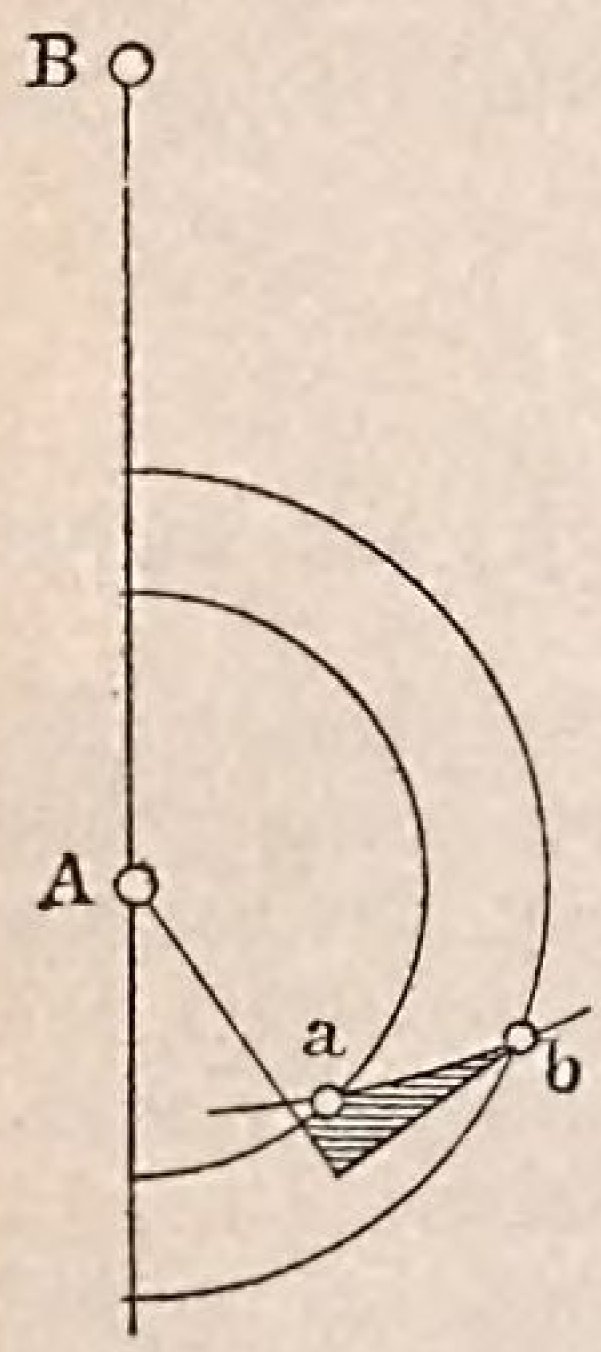
$$\text{(2)} \qquad \frac{Q'h}{QH}.$$

Die Größe Q′ kann berechnet werden mittelst der Formel

$$\text{(3)} \qquad Q' = kbe\sqrt{2gz},$$

wo e die Breite des Spielraums zwischen Schaufel und Gerinne, z den mittlern Abstand der Wasserspiegel zweier auf einander folgender Schaufelräume und k den Ausflußkoefficienten (cirka 0,7) bezeichnen.

b) Zellenräder. Hier tritt das Wasser aus dem Rad, noch bevor es die tiefste Stelle erreicht hat. In dem Verhältnis (2) wird Q′ = Q und h die mittlere Austrittshöhe über dem Unterwasser. Bei Bestimmung von h ist die Centrifugalkraft zu berücksichtigen, welche das Wasser im Zellenraum nach außen treibt. Durch sie wird das Niveau eine Cylinderfläche mit einer Achse in B, wo B vertikal über der Radachse A liegt und Abstand



$$(4) \qquad AB = \frac{894}{n^2}$$

wird, wenn n die Anzahl Touren des Rades per Minute bezeichnet.

Man konstruiere das Rad, zeichne die Kurve ab für verschiedene Stellen ein, so ergibt sich aus der Füllung der Zellen die Höhe, bei welcher die Entleerung des Rades beginnt.

3. **Durchmesser der Wasserräder.** Beim oberschlächtigen Rad ist D durch das Gefälle bestimmt, bei den übrigen Rädern richtet sich D nach lokalen Verhältnissen und liegt gewöhnlich zwischen 4 und 6 m.

4. **Anzahl Umgänge der Räder.** Um die Anzahl Umgänge des Rades per Minute zu erhalten, dividiere man den Weg 60v, welchen der Radumfang in der Minute macht, durch den Umfang $D\pi$.

5. **Anzahl Radarme.** Diese Anzahl wird erhalten, wenn man den Durchmesser D, in Metern ausgedrückt, um 1 vermehrt und statt des Resultates die nächste ganze Zahl nimmt.

6. **Füllung der Räder.** Eine Ebene durch die Achse schneidet den Radkranz längs eines Rechteckes bt. Dasselbe beschreibt in der Sekunde nahe den Raum btv, welcher die Wassermenge Q aufzunehmen hat. Nun soll aber Q diesen Raum nicht ganz ausfüllen. Man nennt das Verhältnis Q : btv Füllungsverhältnis oder auch Füllungskoefficient. Er soll bei mittlerem Wasserzufluß betragen: bei Schaufelrädern gewöhnlich ½, höchstens ⅔, bei Zellenrädern gewöhnlich ¼, höchstens ⅓.

7. **Verhältnis zwischen Tiefe und Breite der Räder.** Man nehme

für den absoluten Effekt =	5	10	25	50	100 Pferde,
bei Schaufelrädern b : t =	3	4	5	6	7
bei Zellenrädern b : t =	4	5	6	7,5	9

Der Einlauf zum Rad wird um 6 bis 10 cm kleiner genommen als die Radbreite b.

8. **Anzahl Schaufeln und Zellen.** Für Räder, deren Verhältnis zwischen Tiefe und Breite nach dem Vorhergehenden bestimmt ist, nehme man am äußern Umfang

Teilung bei unterschlächtigen Schaufelrädern . = 0,3 t + 0,10 m.
Teilung bei mittelschlächtigen Schaufelrädern . = 0,4 t + 0,12 „
Teilung bei Zellenrädern . . . . = 0,4 t + 0,24 „

Dividiert man den Radumfang $D\pi$ mit der so erhaltenen Teilung, so erhält man die Anzahl Schaufeln. Für dieses Resultat nimmt man nun diejenige zunächst gelegene ganze Zahl, welche sich durch die Zahl der Radarme teilen läßt.

9. **Luftentweichung.** Sobald Wasser in einen Zellen- oder Schaufelraum gelangt, muß ein entsprechendes Volumen Luft entweichen können. Daher muß bei Schaufelrädern der innere Radboden Luftspalten haben, und bei Zellenrädern die Schlucköffnung der Zellen größer sein als die Strahldicke.

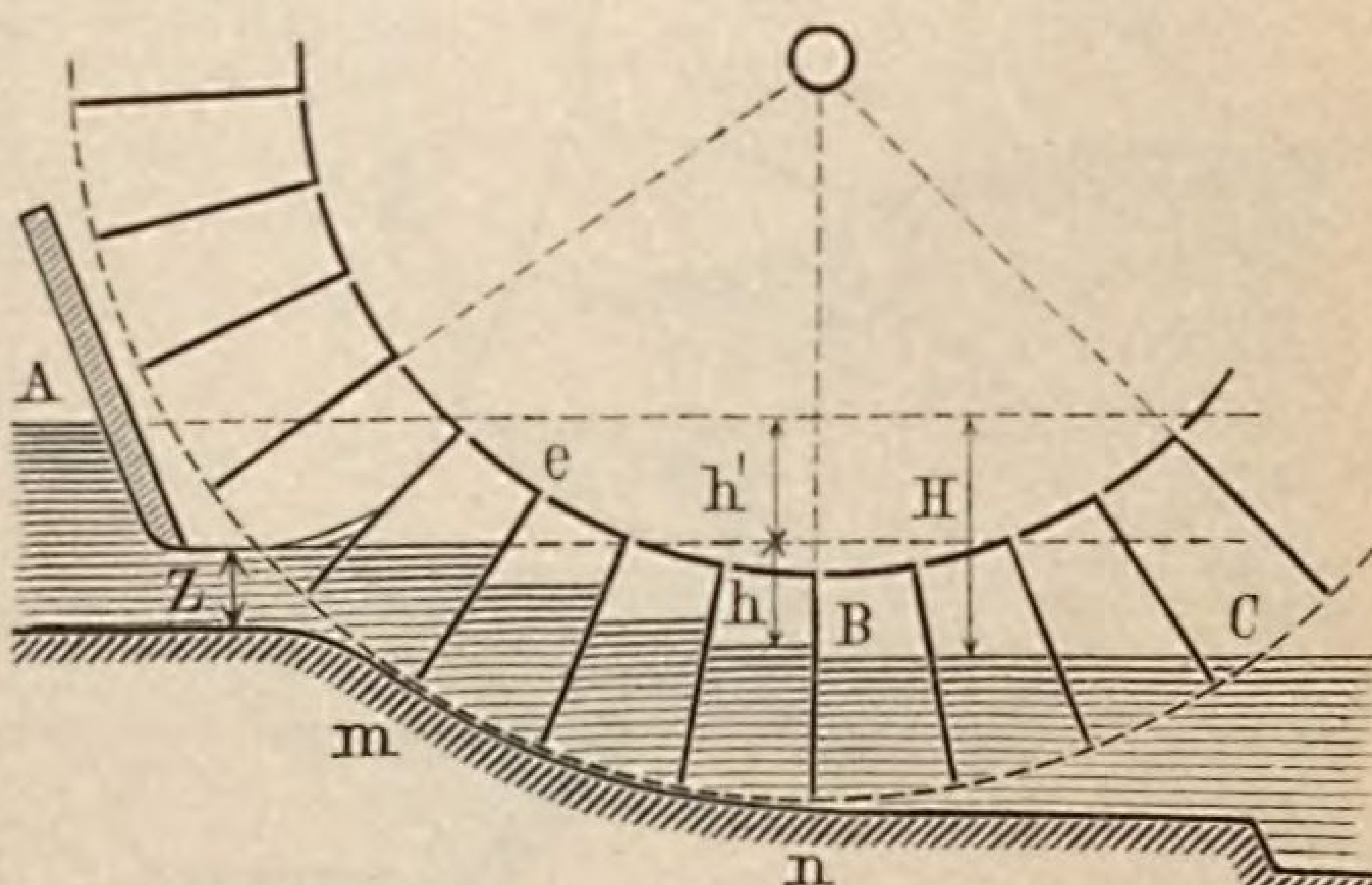
II. Specielle Konstruktionsregeln.

1. **Schiffmühlenrad.** Für ein neu zu bauendes Rad ist v zwischen 0,4 V und 0,5 V zu nehmen und die Schaufelfläche F zu berechnen nach der Formel

$$F = \frac{N}{1{,}07\,V\,(V - v)\,v}\ \text{qm}.$$

2. **Unterschlächtiges Rad im Gerinne.** Man baut dieses Rad für 0,2 bis 1,5 m Gefälle. Ist ein neues Rad zu erstellen, so muß man Q und H kennen und sich entscheiden über die Größe des Durchmessers D, des Verhältnisses b : t und des Füllungskoefficienten k.

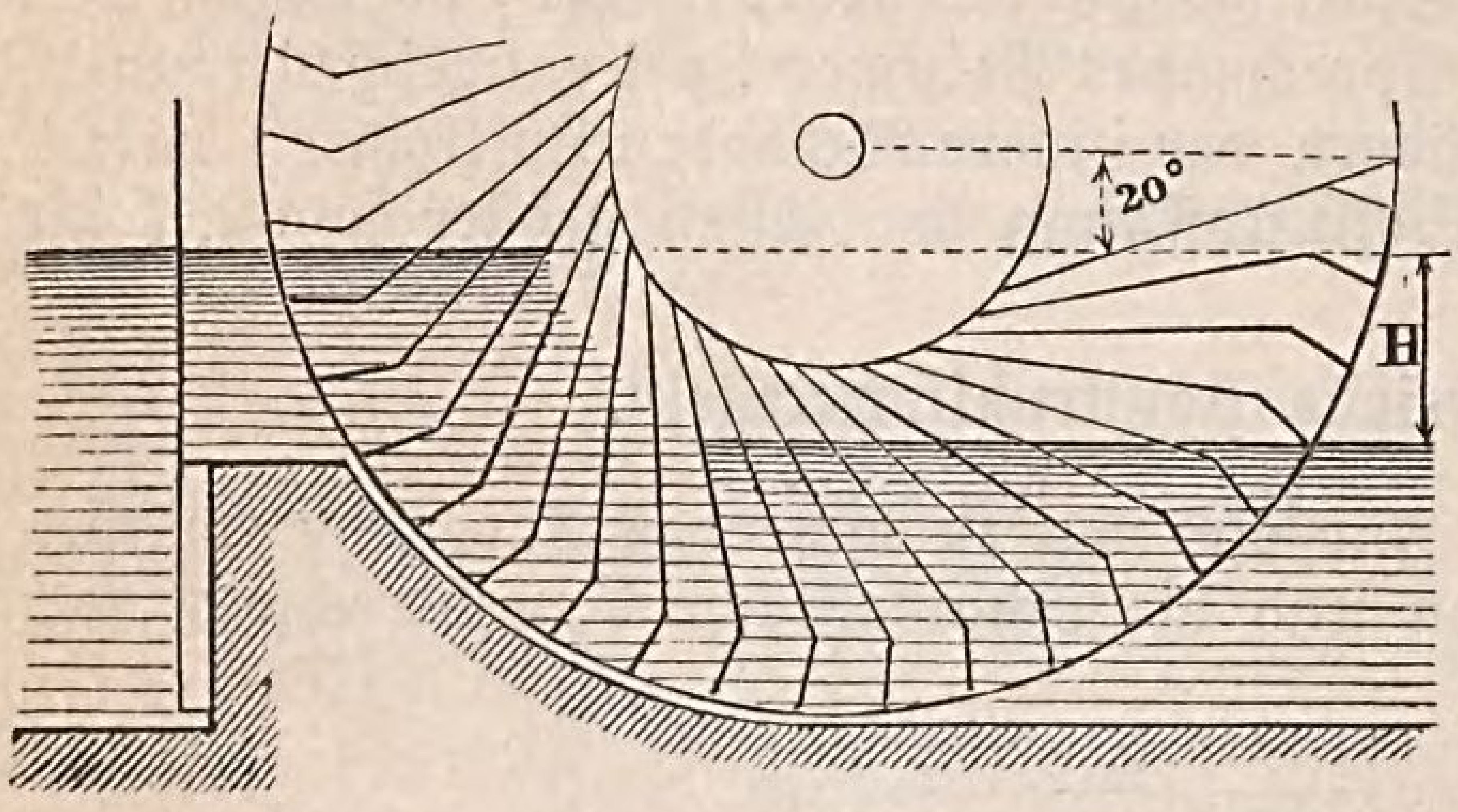
a) Gewöhnlicher Typus. Man zeichne die beiden Wasserspiegel A und BC; nehme das Stoßgefälle h′ an und berechne damit die Geschwindigkeit $V = \sqrt{2gh'}$; mache $v = 0{,}5\ V \cos a$; berechne mittelst der Gleichung $Q = kbtv$ die Breite und Tiefe des Rades; nehme die Wassertiefe $Bn = 0{,}6t$ und zeichne den äußern und innern Radumfang; bestimme die Radteilung und verzeichne die Schaufeln, die hier gegen die Achse gerichtet sind und bringe bei e Spalten für das Entweichen der Luft an. Die Schütze stelle man geneigt unmittelbar vor das Rad und runde sie auf der Zuflußseite ab.



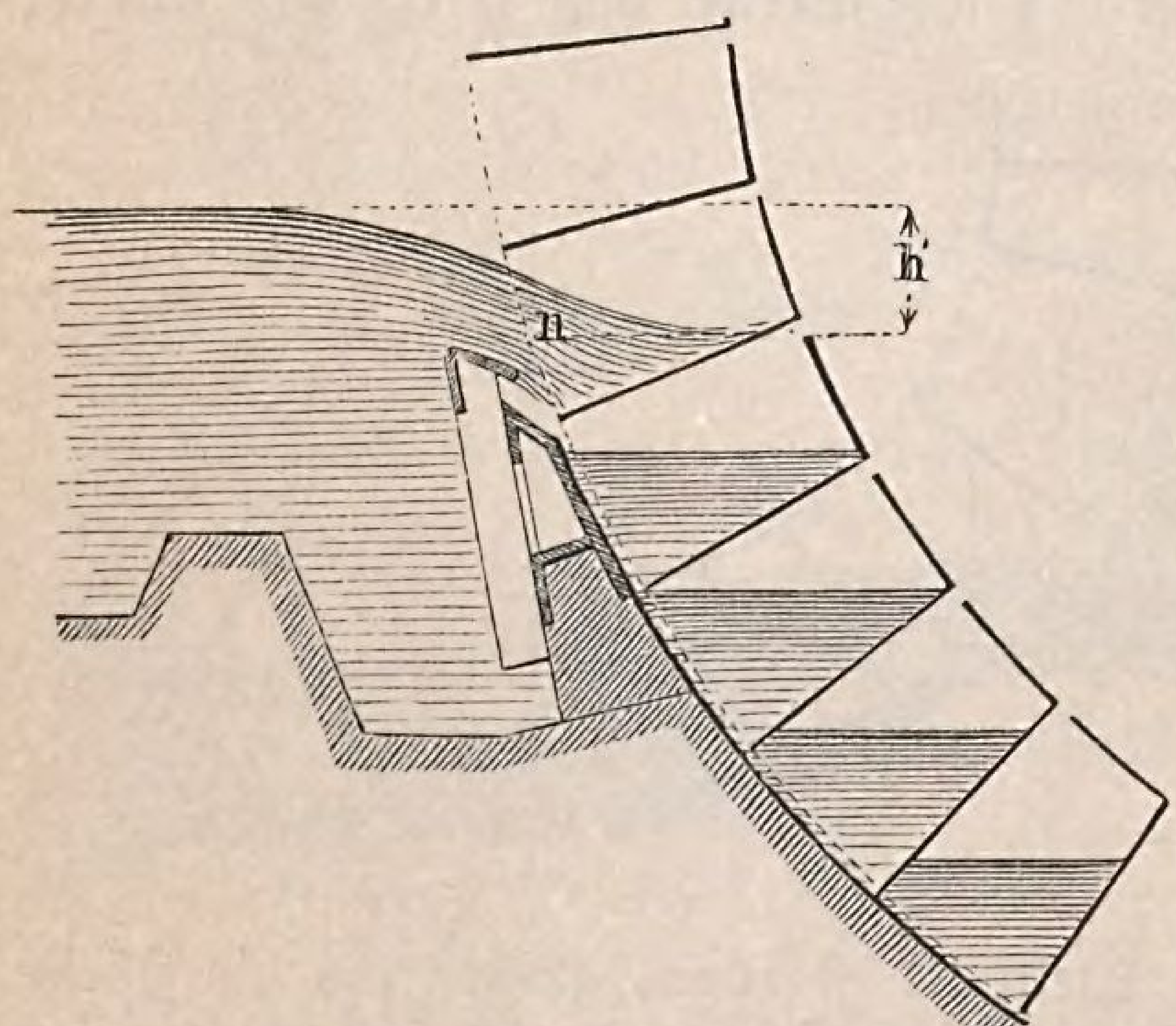
Die Strahldicke Z unter der Stellfalle ist etwas größer als die Hälfte von Bn. Der kreisförmige Teil mn des Gerinnes reicht bis zum tiefsten Punkt des Rades. Boden und Wände des Gerinnes sollen sich möglichst an das Rad anschließen, der Spielraum soll nicht mehr betragen als 5 mm bei eisernen und 10 mm bei hölzernen Rädern. Es sei C die Stelle, wo die Schaufeln aus dem Wasser hervortreten; von B bis C soll das

Wasser mit der Geschwindigkeit v abfließen; es soll also auch der vertikale Querschnitt des Wassers zwischen B und C gleich bleiben oder sich nur um wenig vergrößern. Bei kleinem Gefälle H kann das Druckgefälle h ganz fehlen; alsdann verwandelt sich der Kreisbogen mn in eine Gerade. Wenn H hinreichend groß ist, nehme man h′ zwischen 0,45 und 0,65 m. Wirkungsgrad 0,45 bis 0,60.

b) Rad von Sagebien. Es ist ein unterschlächtiges Rad von großer Tiefe und großer Füllung, eignet sich daher besonders für große Wassermengen. Seine Teilung ist sehr klein; es enthält daher eine große Anzahl Schaufeln. Das Wasser soll langsam dem Rade zufließen, also wenig Stoß verursachen. Dadurch wird auch die Umfangsgeschwindigkeit des Rades klein, z. B. 0,60 bis 0,90 m. Die innere Ablenkung der Radschaufeln von der Richtung des Radius beträgt annähernd 20°. Wenn das Gerinne gut schließt, so kann der Wirkungsgrad für größere Gefälle bis auf 0,75 steigen.



3. **Schaufelrad mit Ueberfalleinlauf.** Es wird gebaut für Gefälle von 1,5 bis 2,5 m. Durchmesser, Breite und Tiefe des Rades, Füllung, Kreisgerinne 2c. wie beim unterschlächtigen Rad. Die Stellfalle ist oben in der Richtung des eintretenden Strahles abzurunden. Man bestimme aus der Wassermenge Q und aus der Breite b des Ueberfalls die Tiefe des oberen Randes der Stellfalle unter dem horizontalen Oberwasserspiegel vermittelst der Formel (1) S. 244



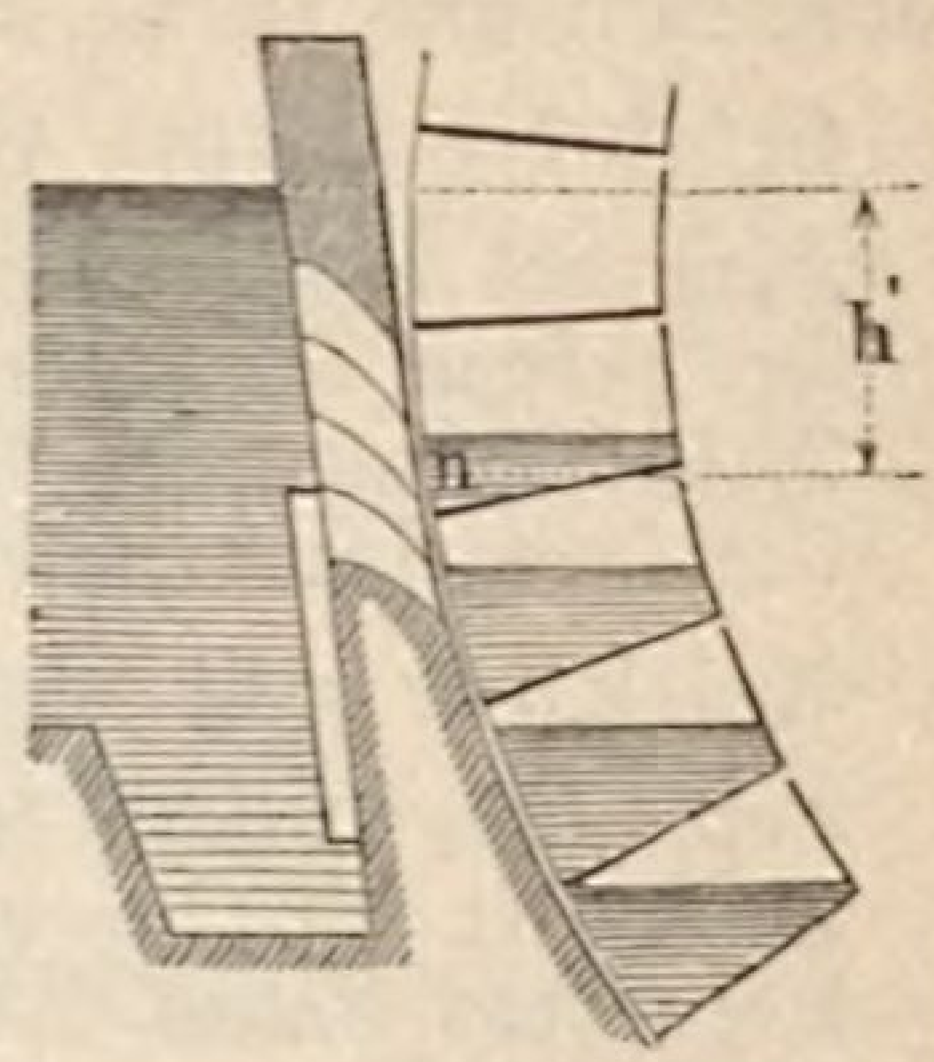
$$h' = \sqrt{\frac{Q^2}{19{,}62 \,.\, 0{,}42 \,.\, 0{,}42 b^2}}.$$

Ist hier die Stellfalle und der Wasserstrahl gezeichnet, so ergibt sich die Stelle n, wo der Strahl das Rad trifft, also auch das Stoßgefälle h′. Hiernach ist die Eintrittsgeschwindigkeit

$$V = \sqrt{19{,}62\, h'},$$

und somit die Umgangsgeschwindigkeit des Rades v = 0,5 Vcos a. Wirkungsgrad 0,55 bis 0,65.

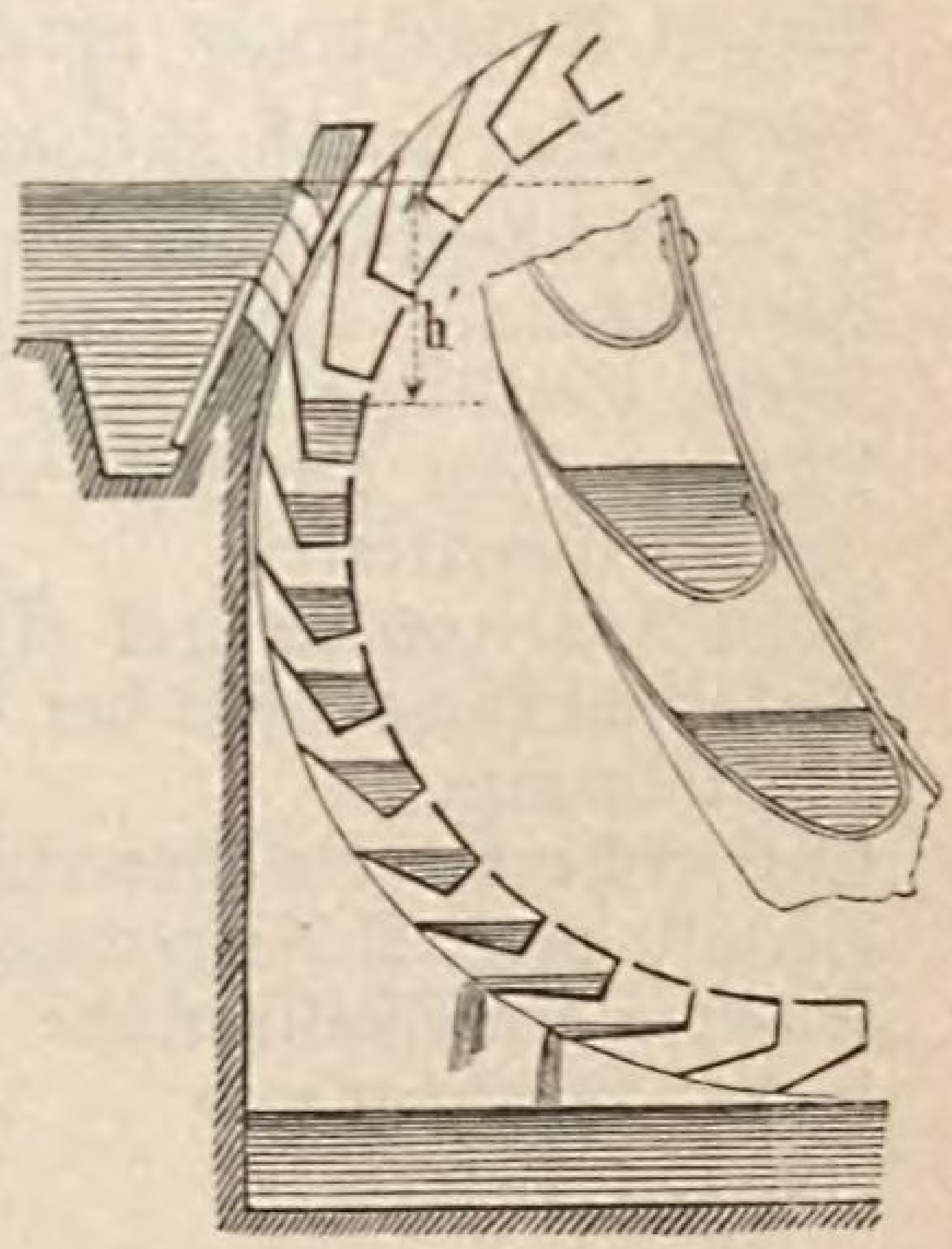
4. **Schaufelrad mit Kulisseneinlauf.** Anwendung für Gefälle von 2,5 bis 4 m. Durchmesser für kleinere Gefälle = 2 H, für größere = 1,8 H. Ueber die Verzeichnung des Rades siehe „Unterschlächtiges Rad". Die aus Blechtafeln gebildeten Kanäle oder Kulissen sollen das Wasser möglichst tangential gegen den Radumfang leiten, ohne jedoch zu rasch gekrümmt zu sein. Nachdem 3 bis 5 Kanäle verzeichnet sind, messe man ihre untern Oeffnungen, senkrecht zur Richtung des Wasserstrahles, sowie die Druckhöhe für jede Oeffnung, und bestimme daraus die Wassermenge, welche durch die erste, die erste und zweite, die erste, zweite und dritte 2c. Oeffnung fließt, bis man auf eine Anzahl Kanäle kommt, welche die erforderliche Wassermenge durchlassen können. Als Ausflußkoefficienten nehme man hierzu 0,70, als Stoßgefälle h′ (Tiefe des Punktes n, wo der mittlere Wasserstrahl das Rad trifft, unter dem Oberwasserspiegel) zwischen 0,45 und 0,60 m, als Umfangsgeschwindigkeit des Rades



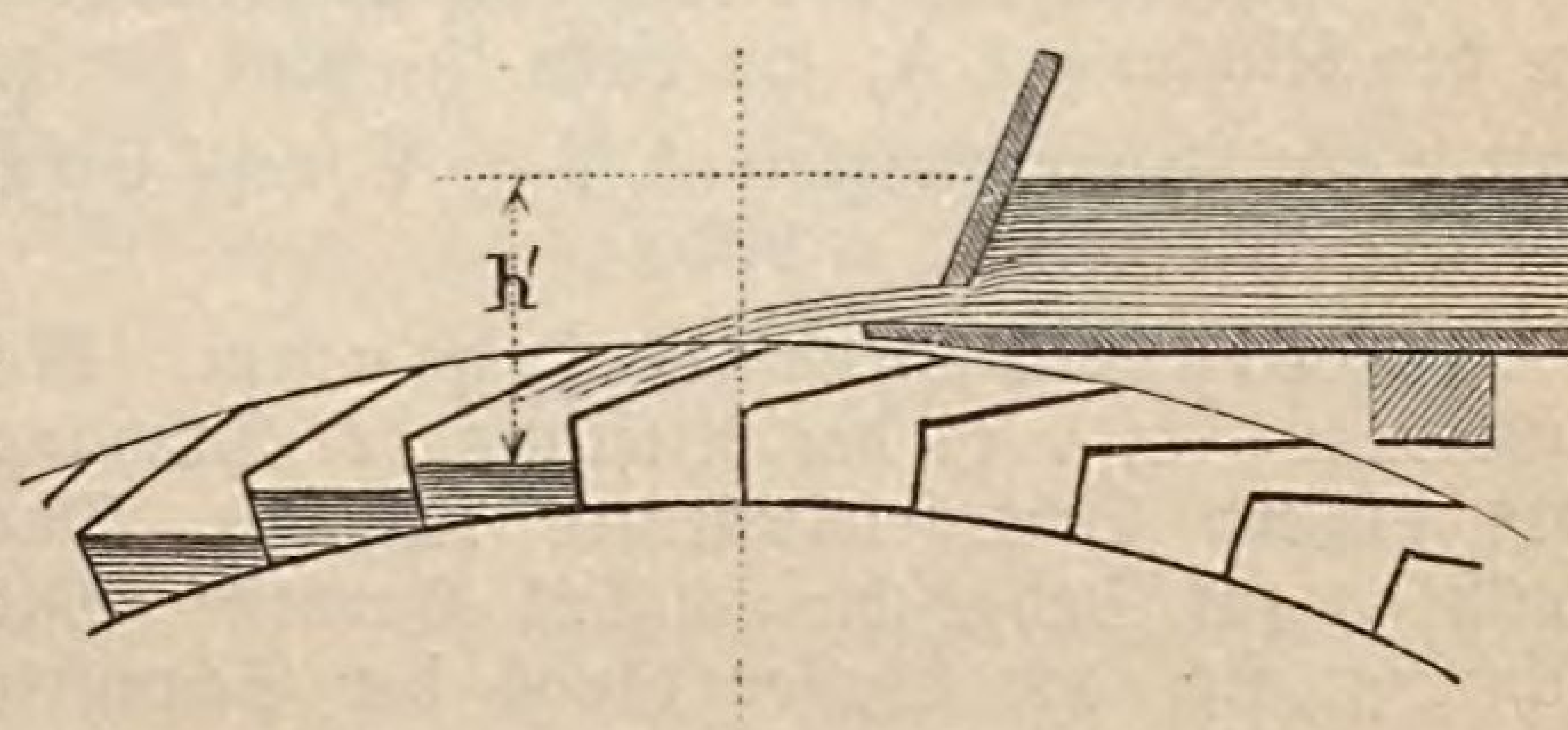
$$0{,}5 \cos a \sqrt{19{,}62\, h'}.$$

Wirkungsgrad 0,60 bis 0,66.

5. **Rückschlächtiges Zellenrad.** Gefälle von 3,5 bis 6,5 m, Durchmesser $^{13}/_{10}$ bis $^{14}/_{10}$ vom Gefälle. Der Einlauf besteht aus Kulissen von Blech, wie beim vorigen Rad. Das Wasser soll durch sie in der Richtung der äußern Zellenwände in das Rad gelangen. Das Stoßgefälle h′ reicht bis an das Wasser der zu oberst gefüllten Zelle. Es soll h′ zwischen 0,45 m und 0,70 m sein, wodurch sich v wie bei den vorhergehenden Rädern ergibt. Wirkungsgrad 0,65 bis 0,75.



6. **Oberschlächtiges Wasserrad.** Angewendet für Gefälle von 3,5 m an. Für Gefälle über 10 m wird das Rad groß und schwer. Die äußern Zellenwände dieses Rades sind in der Richtung des eintretenden Wasserstrahles zu stellen. Das Stoßgefälle h′ = 0,45 bis 0,70, wodurch V = 2,97 m bis 3,70 m wird. Das Rad soll vom Unterwasserspiegel bis an den Zuleitungskanal reichen, damit kein Gefälle ver-



loren geht. Wirkungsgrad: für kleinere Gefälle 0,65 bis 0,70, für größere 0,75 bis 0,80.

Beisp. Für eine Wassermenge von 0,48 kbm und ein Gefälle von 6,5 m soll ein oberschlächtiges Rad gebaut werden. Wie ist es anzulegen und welche nützliche Arbeit liefert dasselbe?

Es ist der absolute Effekt . . . . . . $\frac{480 \cdot 6,5}{75} = 41,6$ Pferde.
Höhe des Wasserspiegels über dem Rad (angenommen) $= 0,34$ m.
Freihängen des Rades (angenommen) . . . . $= 0,06$ m.
Daher Durchmesser des Rades . $6,5 - 0,34 - 0,06 = 6,10$ m.
Umfangsgeschwindigkeit (angenommen) . . . . $v = 2,00$ m.
Aus $k b t v = Q$ folgt (für $k = 0,25$) $b t = \frac{0,48}{2 \cdot 0,25} = 0,96$.
Verhältnis zwischen Breite und Tiefe (angenommen) $= 6$.
Daher $b t = 6 t^2 = 0,96$; woraus folgt . . . $t = 0,40$ m.
Breite des Rades . . . . $6 \cdot 0,40 = 2,40$ m.
Anzahl Arme . . . . $D + 1 = 7$.
Schaufelteilung, versuchsweise . . $0,4 \cdot 0,4 + 0,24 = 0,40$ m.
Daher Anzahl Schaufeln . . . . . $\frac{D\pi}{t} = \frac{19,16}{0,4} = 47,9$.
Wofür zu nehmen ein Vielfaches von 7 . . . . $= 49$.
Anzahl Umdrehungen per Minute . . . . . $\frac{60\,v}{D\pi} = 6,26$.
Stoßgefälle, gemäß Zeichnung . . . . $= 0,69$ m.
Daher Eintrittsgeschwindigkeit . $V = \sqrt{2g \cdot 0,69} = 3,68$ „
Eintrittswinkel, laut Zeichnung . . . . $a = 23^0$.
Daher Gefällsverlust nach Formel (1) . . . . $= 0,07$ m.
Mittlere Höhe der Entleerung ohne Rücksicht auf die Centrifugalkraft . . . . $= 0,60$ „
Höhe AB nach Formel (4) . . . . $894 : (6,26)^2 = 23$ „
Daher wirkliche Höhe der Entleerung, der Zeichnung entnommen . . . . $= 0,69$ „
Entsprechender Gefällsverlust . . . . . $0,69 : 6,5 = 0,11$.
Verlust durch Achsenreibung, angenommen . . . $= 0,02$.
Summe der Effektverluste . . $0,07 + 0,11 + 0,02 = 0,20$.
Daher Wirkungsgrad . . . . $1 - 0,20 = 0,80$.
Nützliche Arbeit . . . . $0,8 \cdot 41,6 = 33,3$ Pfd.

7. **Unterschlächtiges Rad von Poncelet** (1828). Das Wasser gelange in der Richtung CA, um cirka $^1/_{12}$ zum Horizont geneigt, in das Rad, mit einer Geschwindigkeit $AV = V = \sqrt{2gH}$, welche mit dem Radumfang den Winkel α bilde.

a) Eintrittsparallelogramm. Man zerlege V in $Av = v$ und $Au = u$, v in der Richtung der Drehung und u in der Richtung des äußern Schaufelelementes liegend. Damit kein Stoß entsteht, muß v zur Radgeschwindigkeit werden. Mit der Geschwindigkeit u schwingt sich das Wasser längs der Schaufeln aufwärts. Seine Bewegung wird verzögert durch die Schwerkraft und Centrifugalkraft des

Wassers. Von da geht das Wasser abwärts, beschleunigt durch die gleichen Kräfte. Daher sind die Geschwindigkeiten beim Steigen und Fallen in gleicher Höhe gleich.

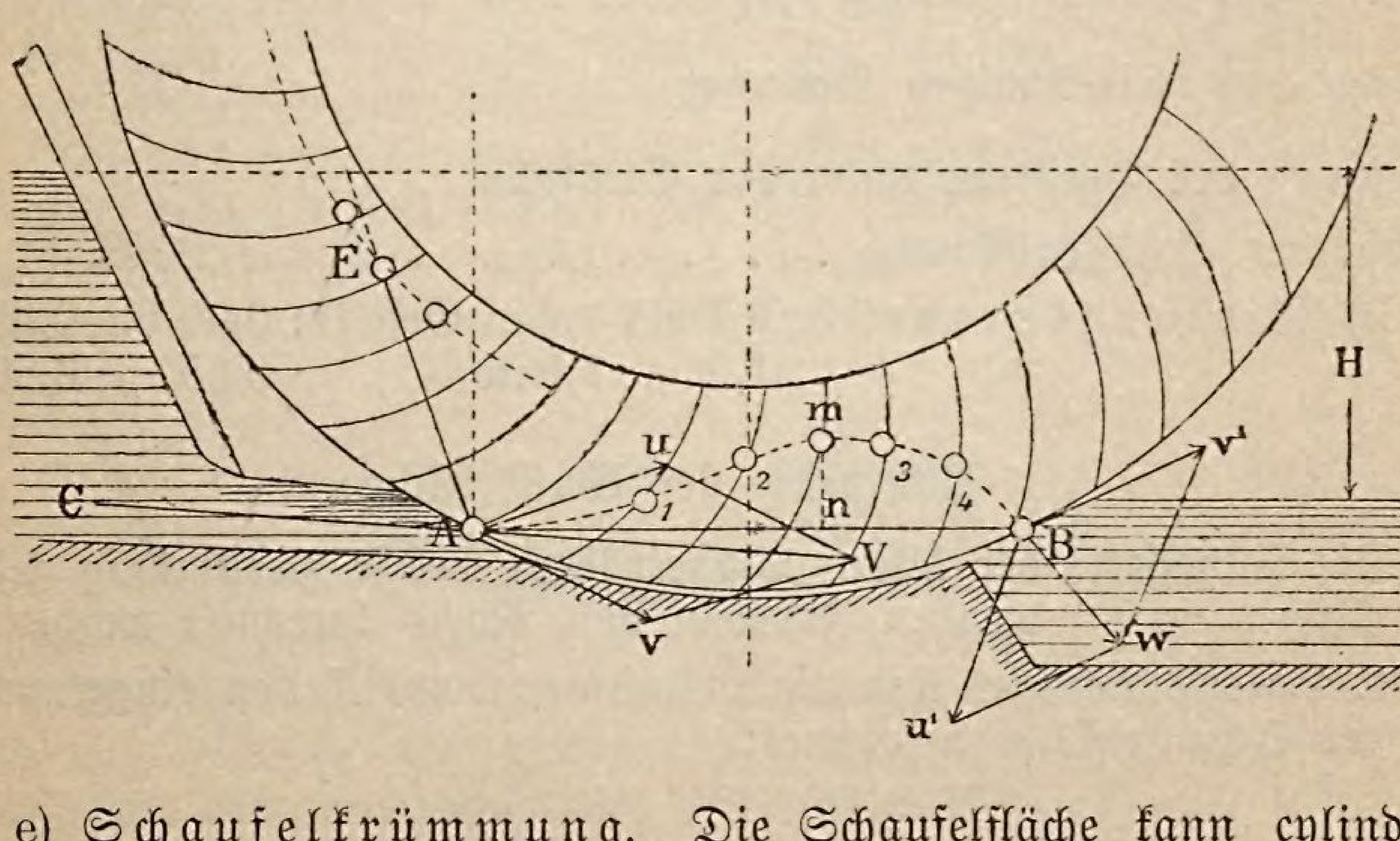
b) Austrittsparallelogramm. Es sei Sehne AB waagrecht, so soll das Wasser das Rad in B verlassen. Dabei hat das Wasser eine Geschwindigkeit $B v' = v'$ in der Richtung der Drehung und eine solche $B u' = u'$ in der Richtung des äußern Schaufelelementes. Beide geben die mittlere Geschwindigkeit $B w = w$. Damit beim Austritt wenig Arbeit verloren gehe, soll w klein sein. Man erreicht dies, wenn sich Winkel $v' B u'$ möglichst 180^0 nähert und wenn zudem $u' = v'$ wird.

Da B und A gleich hoch liegen, so ist $u' = u$, und da auch $v' = v$, so wird das Eintrittsparallelogramm gleichseitig, also Winkel $u A V = \alpha$.

c) Steighöhe des Wassers. Ohne Rücksicht auf die Centrifugalkraft ist die Steighöhe $m n = \frac{u^2}{2g}$. Allein wegen dieser Kraft ist g zu vermehren um $\frac{v_{\prime\prime}^2}{r}$, wo $v_{\prime\prime}$ die mittlere Drehgeschwindigkeit des Wassers und r ihren Abstand von der Radachse bezeichnen. Daher

$$m n = \frac{u^2}{2\left(g + \frac{v_{\prime\prime}^2}{r}\right)}.$$

d) Wirklicher Wasserweg. Ein Wasserteil steigt längs der Punkte A, 1, 2, m und sinkt längs der Punkte m, 3, 4, B. Diese Punkte sind in der Richtung der Drehung gleichförmig verteilt. Enthält mn neun gleiche Teile, so müssen die Punkte 2 und 3 um einen, 1 und 4 um vier, A und B um neun solcher Teile unter m liegen. Die Kurve nimmt beim Austritt die Richtung Bw an.



e) Schaufelkrümmung. Die Schaufelfläche kann cylindrisch angenommen werden, mit einem Radius AE, welcher senkrecht zu Au steht und mit der vertikalen Richtung den Winkel β bilde. Die Länge

A E ist so zu wählen, daß die Schaufel vom tiefsten Punkt des äußern Radumfanges ausgehend oben annähernd vertikal ausmündet.

f) Bogenlänge A B. Man kann annehmen, das Wasser schwinge sich der Schaufel entlang auf und ab wie der schwere Punkt eines Pendels. Läge A E vertikal, so wäre die Schwingungszeit für kleine Schwingungsbogen $T = \pi \sqrt{\frac{AE}{g}}$. Allein hier geht die Pendelstange nicht durch den tiefsten Punkt. Als Ausgleich dafür kann man annähernd $AE \cos \beta$ statt A E nehmen; ebenso muß g in $g + \frac{v_{''}^2}{r}$ übergehen. Daher die Schwingungszeit annähernd

$$T = \pi \sqrt{\frac{AE \cos \beta}{g + \frac{v_{''}^2}{r}}}.$$

In der Zeit T muß der Bogen A B vom Radumfang durchlaufen werden. Daher ist $AB = vT$; woraus A B berechnet werden kann.

g) Schaufelteilung. Sie soll klein sein, damit die Wasserstrahlen in den Schaufelräumen nicht dick ausfallen. Je dicker nämlich diese Strahlen sind, um so eher werden die Schichten, welche zunächst der Schaufel liegen, unter jenen weggleiten, welche später nachfolgen, und dadurch Arbeitsverluste herbeiführen.

h) Füllung. Sie kann zu $^3/_5$ angenommen werden.

i) Allgemeine Regeln.

Aeußerer Durchmesser des Rades gewöhnlich .	$D = 4 H$.
Eintrittsgeschwindigkeit des Wassers annähernd	$V = \sqrt{19{,}62 H}$.
Günstigste Umfangsgeschwindigkeit	$v = 0{,}55 V$.
Tiefe des Rades	$t = 0{,}5 H$.
Breite des Rades (Füllung $^3/_5$)	$b = \frac{10 Q}{3 v H}$.
Länge des kreisförmigen Gerinnes	$= \frac{1}{12} D \pi$.
Neigung des Gerinnes unter der Stellfalle .	$= \frac{1}{12}$.
Höhe der Schützenöffnung	$= 0{,}20 H$.

k) Wirkungsgrad. Für 0,7 bis 1,2 m Gefälle: 0,60 bis 0,65;
„ 1,2 „ 1,5 m „ 0,55 „ 0,60.

III. Nutzeffekte der Wasserräder.

Die Nutzeffekte der ältern Wasserräder, welche zweckmäßig gebaut sind, können nach folgenden Formeln von Morin berechnet werden.

1. Unterschlächtiges Rad ohne Gerinne, wenn F den eingetauchten Teil der Schaufelfläche bezeichnet:

$$N = 1{,}07 F V (V - v) v.$$

2. Unterschlächtiges Rad im Gerinne:

$$N = 0{,}83 Q (V - v) v.$$

3. Mittelschlächtige Räder, wenn h das Druckgefälle bezeichnet (vertikaler Abstand von der Stelle, wo das Wasser in das Rad tritt, bis zum Unterwasserspiegel):

$$N = 10\,Q\,h + 1{,}02\,Q\,(V \cos a - v)v.$$

4. Rückschlächtige und oberschlächtige Räder, wobei h die gleiche Bedeutung hat wie bei mittelschlächtigen Rädern:

$$N = 10{,}4\,Q\,h + 1{,}31\,Q\,(V \cos a - v)\,v.$$

Beisp. Bei einem oberschlächtigen Rade sei $Q = 0{,}24$ kbm; $h = 6$ m; $h' = 0{,}46$ m; $v = 1{,}5$ m; $a = 25^0$. Wie groß ist die nützliche Arbeit und der Wirkungsgrad des Rades?

Aus dem Stoßgefälle h' folgt (S. 236) . . . $V = 3$ m.

Ferner ist, da $a = 25^0$ . . . . $\cos 25^0 = 0{,}9063$.

Mit Hilfe der letzten Formel wird Nutzeffekt

$N = 10{,}6 \,.\, 0{,}24 \,.\, 6 + 1{,}31 \,.\, 0{,}24\,(3 \,.\, 0{,}9063 - 1{,}5)\,1{,}5 = 15{,}84$ Pfd.

Allein es ist das totale Gefälle . . . . $6 + 0{,}46 = 6{,}46$ m.

Mithin die absolute Arbeit . . . . $\frac{240\,.\,6{,}46}{75} = 20{,}67$ Pfd.

Somit der Wirkungsgrad . . . . . $15{,}84 : 20{,}67 = 0{,}766$.

69. Von den Turbinen.

Bei den gewöhnlichen Wasserrädern tritt das Wasser in Schaufel- oder Zellenräume, um darin zu wirken, und fließt wieder aus diesen Räumen in der nämlichen Richtung ab, in welcher es eingetreten. Bei den Turbinen dagegen geht das Wasser durch Kanäle hindurch, ohne darin wieder umzukehren.

Das Wasser geht bei den einen Turbinen in der Richtung der Radachse (Achsialturbinen), bei andern in der Richtung des Radhalbmessers (Radialturbinen) durch die Radkanäle. Zu den erstern gehören die Turbinen von Jonval und Girard, zu den letztern diejenigen von Segner, Poncelet und Fourneyron.

Je nach der Wirkungsweise des Wassers unterscheidet man Aktions- und Reaktionsturbinen. Bei den erstern tritt das Wasser mit einer Geschwindigkeit, welche dem ganzen Gefälle entspricht, in die Turbine. Somit arbeitet das Wasser vermöge der in ihm enthaltenen lebendigen Arbeit (Turbinen von Poncelet und Girard). Bei dem zweiten System kommt das Wasser mit einer Geschwindigkeit, die kleiner ist, in die Turbine. Mithin wirkt das Gefälle in zwei Teilen. Der Teil, welcher der Geschwindigkeit entspricht, setzt sich in lebendige Arbeit um. Der andere Teil wirkt als Druck auf die Schaufeln des Rades (Räder von Segner, Fourneyron und Jonval).

Wenn das Wasser allen Kanälen der Turbine zugleich zugeleitet wird, so heißt sie Vollturbine; trifft dagegen das Wasser nur einen Teil des Turbinenkranzes, so entsteht die Partialturbine.

Man unterscheidet auch Turbinen mit vertikaler und horizontaler Achse.

Für die folgenden Turbinen bezeichne:

Q größte Wassermenge, welche die Turbine durchlassen soll,
h, h′ Gefälle vom Oberwasserspiegel bis an den obern und untern Rand des Laufrades,
H totales Gefälle,
D, D′, d äußerer, innerer und mittlerer Durchmesser der Turbine,
t Tiefe des Leitrades, also $= 0{,}5\,(D - D')$,
v Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser das Leitrad verläßt,
p Druck des Wassers, unmittelbar beim Eintritt in das Turbinenrad, gemessen durch die Höhe einer Wassersäule,
u Anzahl Schaufeln des Leitrades, und
$g = 9{,}81$ Beschleunigung beim freien Fall.

I. Turbine von Jonval.

1. Einrichtung im allgemeinen. Fig. 1, 2, 3. Das Wasser fließt aus dem Zulaufkanal durch ein vertikales Rohr A auf das Leitrad B, dessen Schaufeln feststehen und das Wasser aus der vertikalen Richtung, in schraubenförmig gewundenen Kanälen, seitwärts ablenken. Von da tritt das Wasser in die Kanäle C des Turbinen- oder Laufrades, dessen Schaufeln nach entgegengesetzter Seite gekrümmt sind. Wegen dieser entgegengesetzten Lage drückt das Wasser gegen die Schaufeln der Turbine, dreht diese um ihre vertikale Welle D und fällt mit geringer Geschwindigkeit, annähernd vertikal, in den Abzugskanal. Um das Wasser stetig in die Leitkanäle B zu leiten, wird öfters ein Trichter F um die Welle herum angebracht und durch eine cylindrische Hülle nach oben erweitert, um den Zutritt des Wassers zur Welle zu verhindern. Der Mantel K, welcher die Turbine umgibt, soll in das Unterwasser eintauchen und luftdicht schließen. Dadurch bildet das Wasser bei seinem Uebergang aus dem Oberkanal in den Unterkanal durch den luftdicht schließenden Mantel LM, Fig. 4, eine zusammenhängende Masse, die alle Räume ausfüllt. Vermöge dieses Zusammenhanges ist es gleichgültig, in welcher Höhe die Turbine über dem Unterwasser aufgestellt wird, wenn diese Höhe nur nicht diejenige einer Wassersäule, welche an Ort und Stelle den Luftdruck mißt, überschreitet. Gesetzt, diese letztere sei 10 m. Würde nun die Turbine höher als 10 m über dem Unterwasserspiegel aufgestellt, z. B. um 2 m, so würde sich unmittelbar unter der Turbine ein leerer Raum bilden von 2 m Höhe; der Zusammenhang zwischen der Wassersäule, welche über der Turbine liegt, und der Wassersäule von 10 m, welche vom Luftdruck von unten her getragen wird, wäre aufgehoben. Das arbeitende Gefälle wäre dann: die Größe h′ und der Luftdruck von 10 m Höhe, welcher Druck sich auf dem Oberwasserspiegel geltend macht.

Bei ganz großen Gefällen wird das Wasser, Fig. 5, durch ein Rohr N seitwärts in den Cylinder P geleitet, unter dem sich das Leit- und Turbinenrad befinden. Der Verschluß zwischen der Welle und dem Deckel des Cylinders P wird durch eine gewöhnliche Stopfbüchse bewirkt,

oder es führt eine luftdicht geschlossene Röhre vom Leitrad zum Deckel, wodurch die Stopfbüchse überflüssig wird.

Fig. 1.

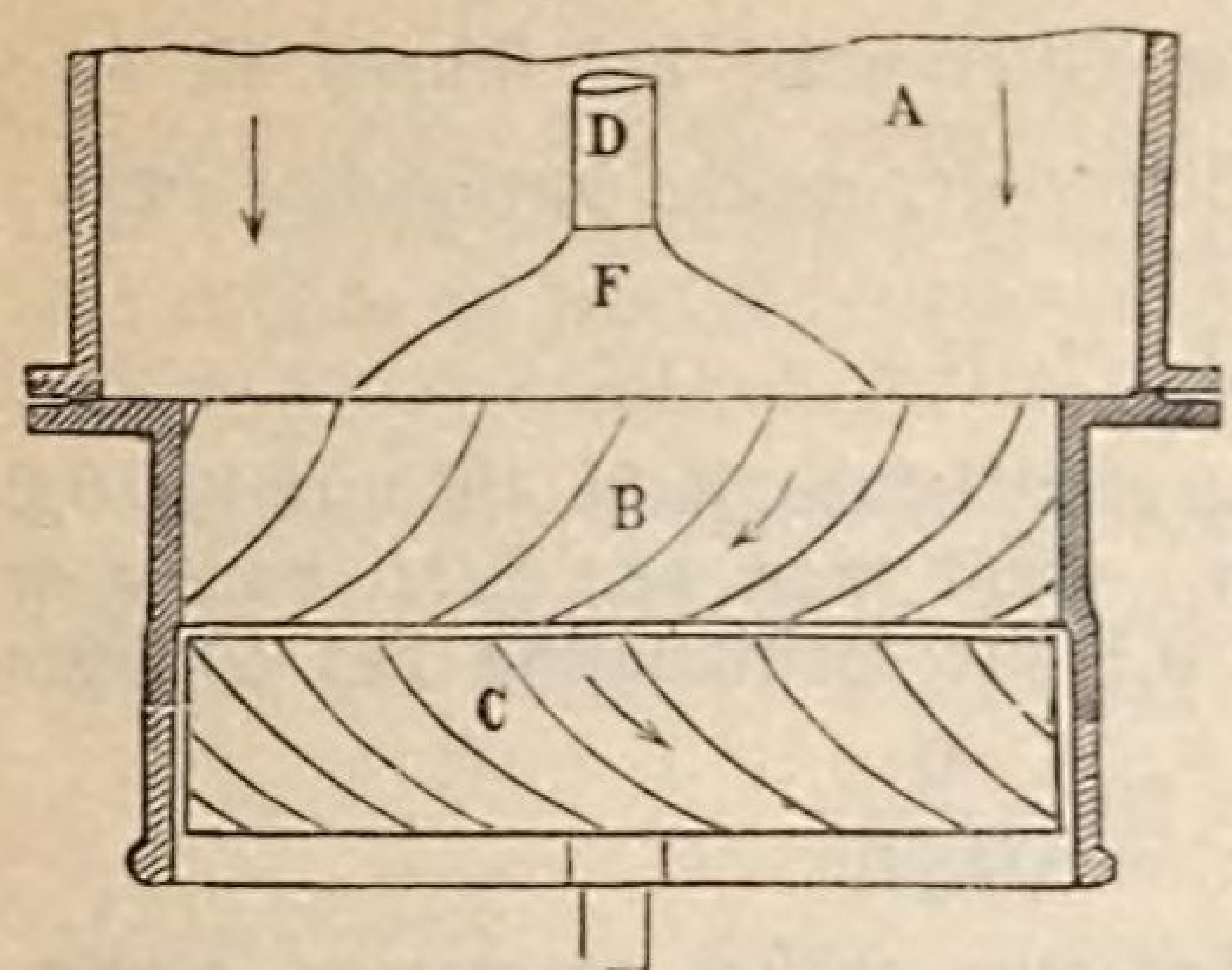


Fig. 4.

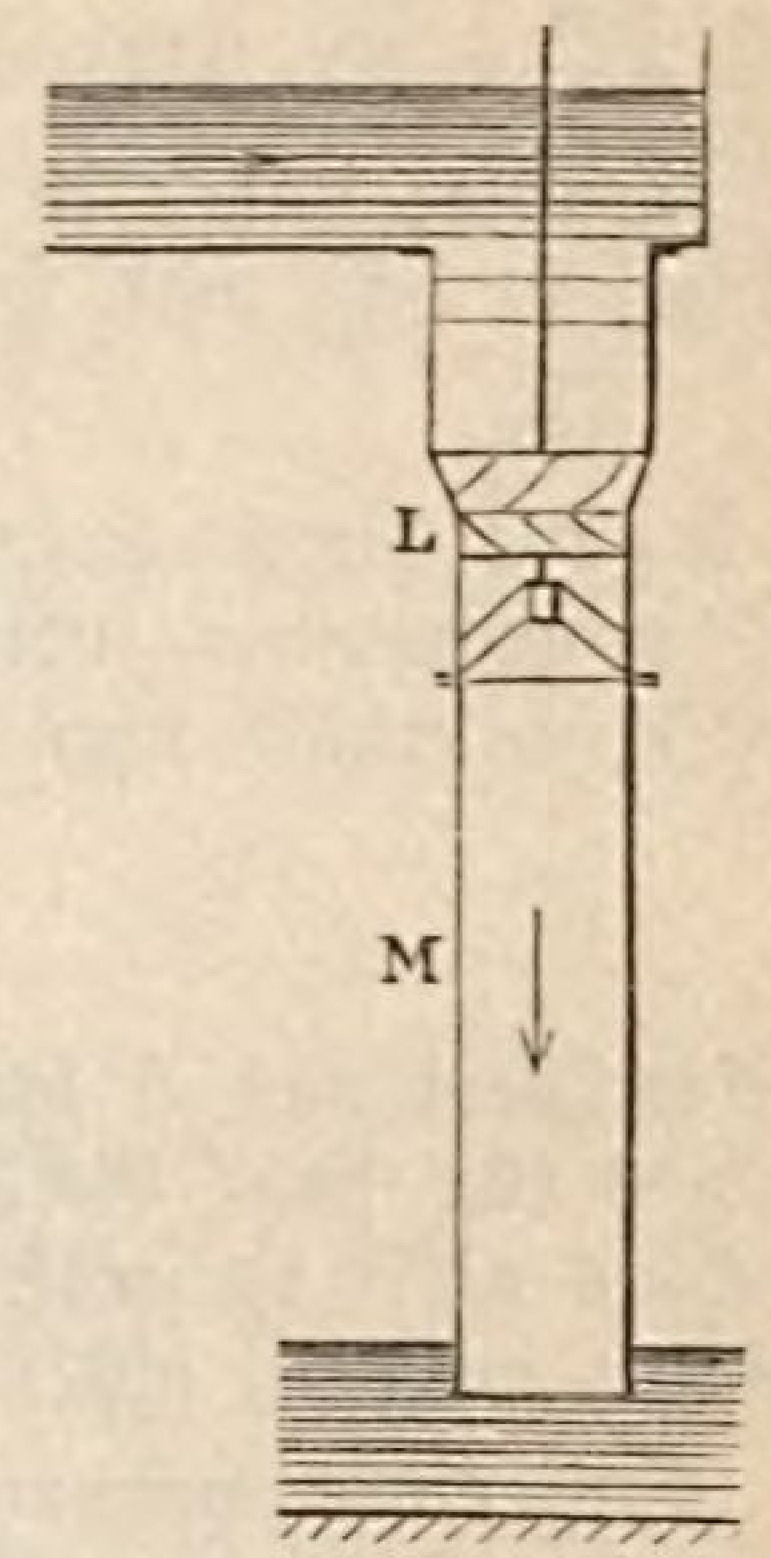


Fig. 2.

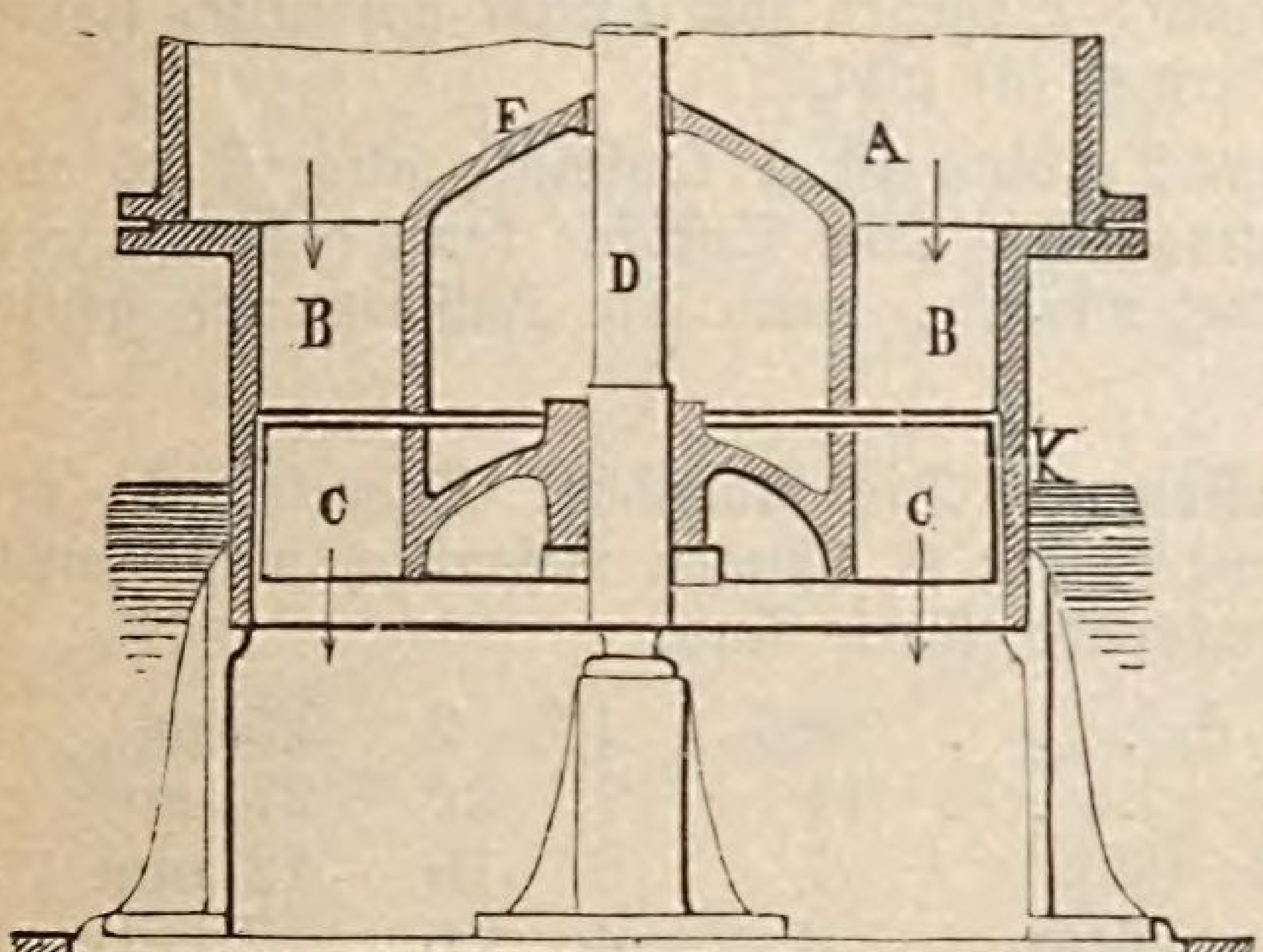


Fig. 5.

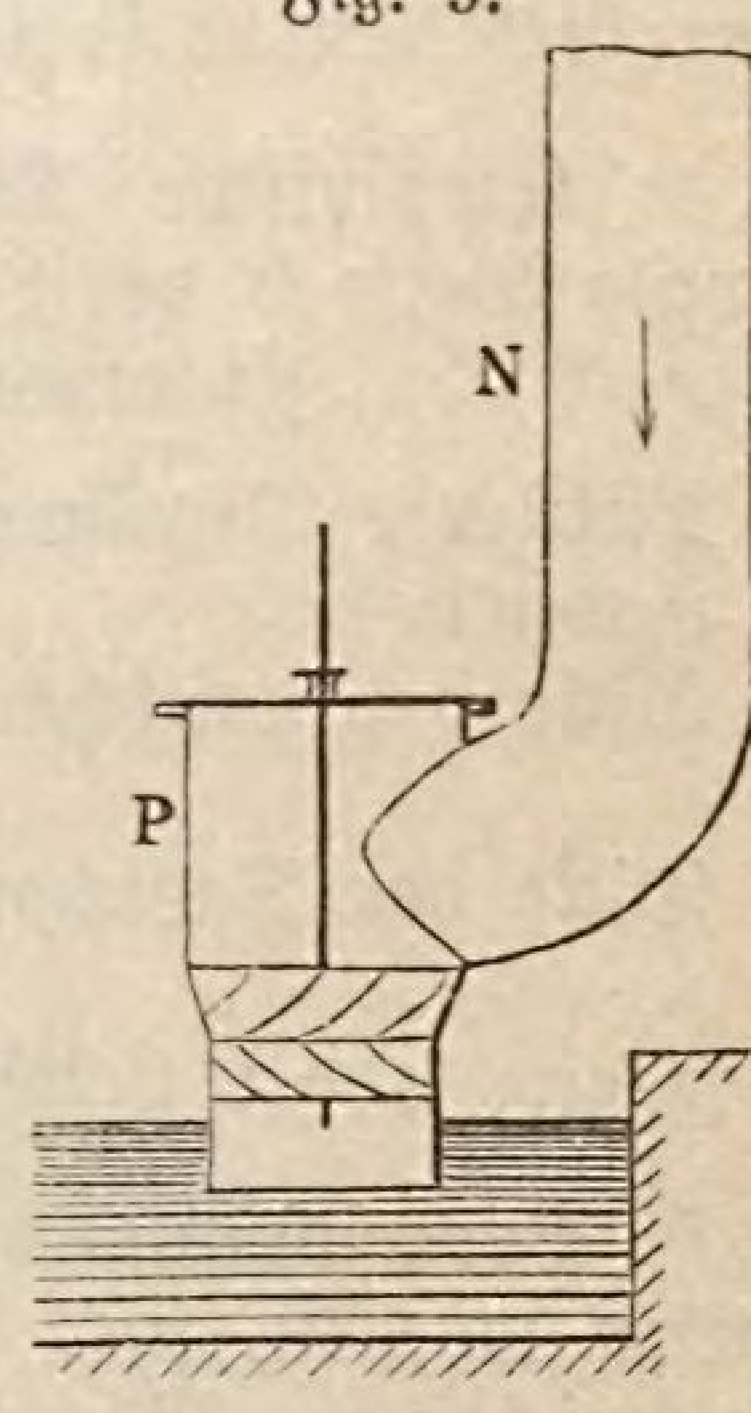
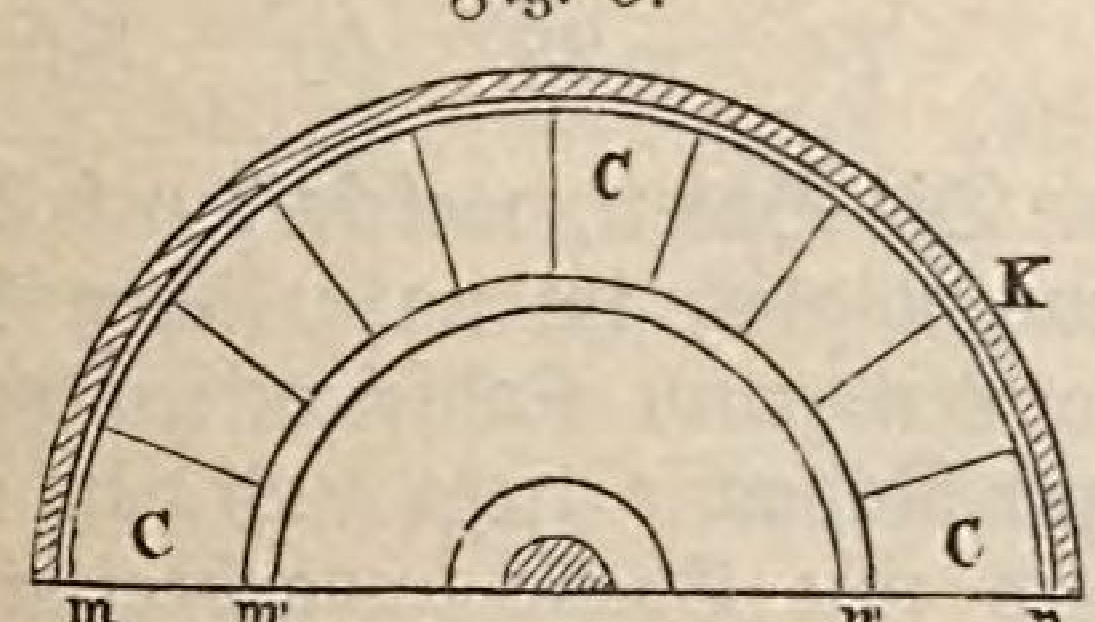


Fig. 3.



2. **Zerlegung des Gefälles.** Bei dieser Turbine zerlegt sich das Gefälle H in zwei Teile. Der eine Teil H′ bewirke die Geschwindigkeit v, mit welcher das Wasser die Leitkanäle unten verläßt, so wird ohne Rücksicht auf Nebenhindernisse

$$(1) \qquad v = \sqrt{2gH'}.$$

Gewöhnlich nimmt man H′ = 0,5 H bis 0,9 H an.

3. **Durchmesser der Turbine.** Es ist, Fig. 3, mn der äußere, m'n' der innere Durchmesser der Turbine und d das Mittel aus beiden. Wäre das Leitrad eine Röhre vom Durchmesser d, so müßte für den Durchgang des Wassers durch das Rad die Gleichung gelten $Q = \frac{d^2 \pi}{4} v$ (S. 254); allein der Querschnitt des Rades ist beschränkt auf Kanäle; daher ist die Wassermenge, welche durchgehen kann, weit kleiner, so daß man setzen kann

$$(2) \qquad Q = k d^2 v,$$

wo k eine durch Erfahrung zu ermittelnde Zahl ist und zu 0,08 bis 0,11 angenommen werden kann. Setzt man den Wert von v aus (1) in (2), so erhält man für $k = 0{,}1$ zur Bestimmung des Durchmessers

$$(3) \qquad d^2 = 10 \frac{Q}{\sqrt{2gH'}}.$$

Dieser Wert von d kann indessen auch größer genommen werden. Es ist dies für hohe Gefälle sogar zweckmäßig, damit die Tourenzahl der Turbine nicht zu groß ausfalle. Dagegen soll d nicht wesentlich kleiner gewählt werden, als ihn Formel (3) gibt.

Bei einer vorhandenen Turbine ist d konstant; also ist es auch die rechte Seite der Gleichung (3). Eine Turbine kann daher zu verschiedenen Gefällen verwendet werden, wenn die Wassermenge gerade diesen Gefällen entspricht.

4. **Empirische Dimensionen.** Die Radhöhe, Schaufeldicke und normale Weite b der Leitkanäle, Fig. 6, hängen wesentlich vom Durchmesser d ab. Zusammengehörende Werte sind:

Mittlerer Durchmesser d . . .		0,5	1	2	2,5	m
Radhöhe		11	17	22	27	cm
Dicke der Leitschaufeln:	Guß .	7	8	10	12	mm
	Blech .	3	4	6	7	"
Dicke der Radschaufeln:	Guß .	6	7	9	10	"
	Blech .	2,5	3	5	6	"
Weite b der Leitkanäle . . .		18	28	40	50	"

5. **Verzeichnung der Schaufeln.** Die Daten, welche durch Rechnung erhalten werden, sind im großen, wo möglich im natürlichen Maßstabe zu verzeichnen. Man denke sich die Leit- und Radschaufeln durch eine Cylinderfläche, welche konzentrisch zur Radachse liegt und den mittleren Durchmesser d hat, geschnitten und in eine Ebene ausgebreitet. Fig. 6 enthält die entstandenen Schnittkurven. Die Schaufelflächen werden beschrieben durch eine Gerade, welche senkrecht zur Achse steht und längs der erwähnten Schnittkurven fortgleitet. Bei beiden Rädern sollen die Schaufeln unten möglichst geradlinig und parallel zu einander laufen, um die Kontraktion des Wassers zu verhindern. Die Leitschaufeln beginnen oben vertikal und treffen unten die Radebene unter einem kleinen Winkel $vAv' = a$. Ist nun eine der Leitschaufeln am untern Ende eingezeichnet, so kann auch die Weite b aufgetragen werden,

wodurch sich die Entfernung der Schaufeln in horizontaler Richtung, d. h. die Teilung xx', yy', ergibt.

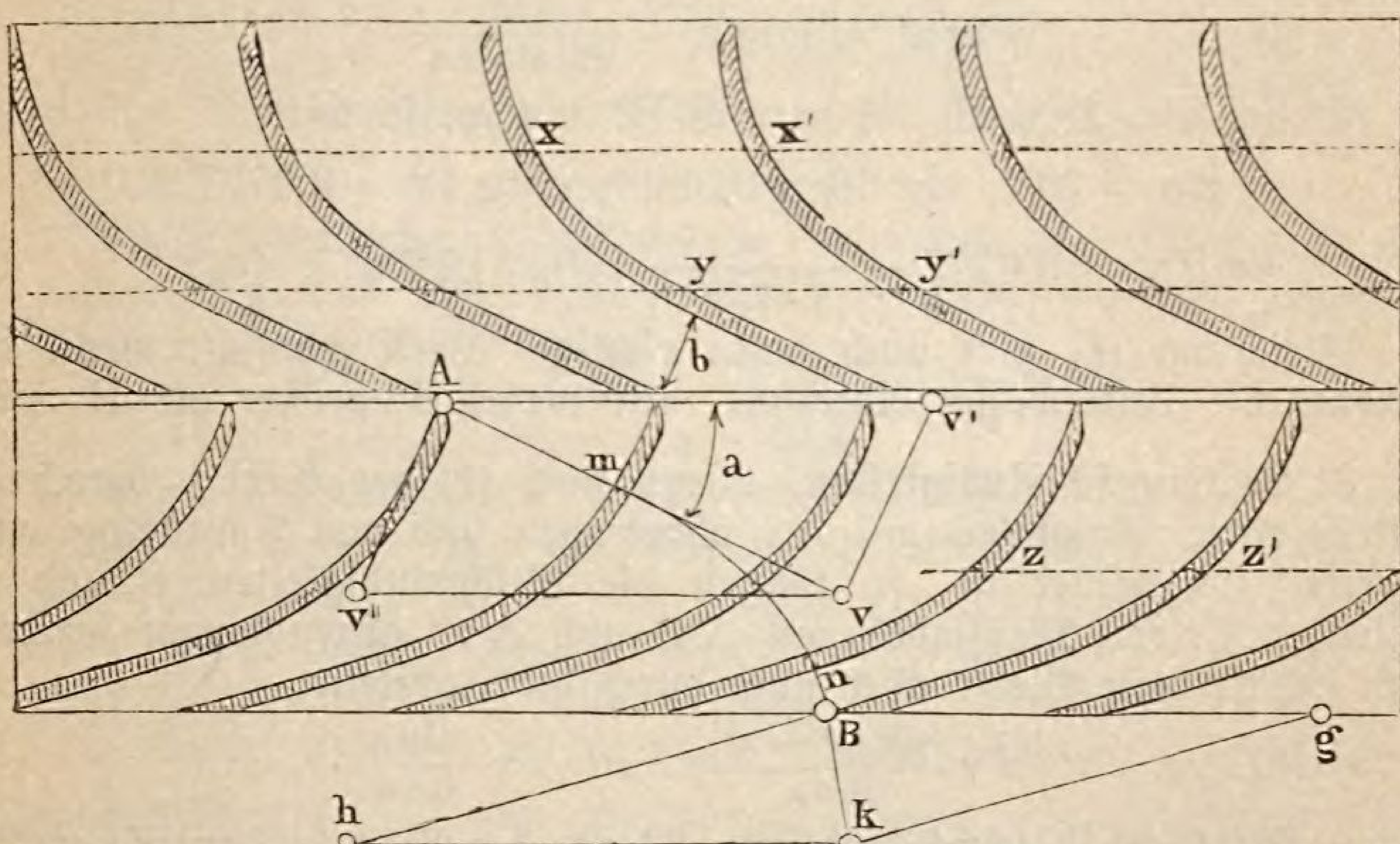
Dividiert man den mittleren Umfang $d\pi$ durch die Teilung, so erhält man die Anzahl Schaufeln. Diese muß notwendig eine ganze Zahl sein. Fände man aber z. B. 23,4, so könnte dafür 23 oder 24 genommen werden. Es wäre dann darnach die Weite b zu korrigieren.

Dem Laufrad gibt man häufig einige Kanäle mehr als dem Leitrad.

Die Richtung der Schaufeln des Laufrades ergibt sich unter Beachtung folgender Lehren.

6. **Bewegung des Wassers im Rade.** Das Wasser trete in der Richtung Av aus dem Leitrade. Man trage den Wert von v, wie er nach Formel (1) berechnet wird, auf der Linie Av, Fig. 6, ab und

Fig. 6.



vollende das Parallelogramm Av'vv'', so ist Av'' = v'' die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser oben in die Turbinenkanäle tritt, und Av' = v' die Geschwindigkeit in der Richtung der Drehung. Damit das Wasser keinen Stoß auf die Radschaufeln ausübe, soll v' die Rotationsgeschwindigkeit der Turbine am mittleren Umfang sein und ebenso das obere Ende der Radschaufel in der Richtung von v'' liegen. Das Wasser folgt nun von A aus zwei Bewegungen, einer in der Richtung der Radschaufeln und einer in der Richtung der Drehung. Kombiniert man die Geschwindigkeiten beider Bewegungen für einen und denselben Wassertropfen, so erhält man den wirklichen Weg, den das Wasser verfolgt, indem es die Turbine durchfließt. Dieser Weg ist in Fig. 6 durch die Linie AmBk dargestellt.

Der Wassertropfen, in B angekommen, hat eine Geschwindigkeit Bg = v' in der Richtung der Drehung und eine solche Bh in der Richtung der Schaufel. Man konstruiere über diesen Geschwindigkeiten

das Parallelogramm B g k h, so ist B k = w die absolute Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser das Rad verläßt. Durch diese Geschwindigkeit geht ein Gefälle $\frac{w^2}{2g}$ verloren; es soll also w klein sein. Man erreicht dies, wenn B h = B g und wenn der Winkel, welchen B h mit der untern Radebene bildet, klein wird.

7. **Winkel a und a'.** Man nimmt a zwischen 16° und 22°. Je kleiner dieser Winkel, um so größer wird die Tiefe t. Der Winkel a' kann, theoretisch genommen, alle möglichen Werte annehmen von 2 a bis 180°. Gewöhnlich geht man nicht über 90 + a hinaus. Je größer a' angenommen wird, um so mehr ist der Durchgang des Wassers durch die Räder gehemmt, um so kleiner fällt v aus. Hat man indessen über H' entschieden, so ist a' nicht mehr willkürlich, sondern zu berechnen nach folgender Gleichung

$$(4) \qquad \operatorname{cotg} a' = \operatorname{cotg} a - \frac{H}{H' \sin 2a}.$$

Es sei a = 18°, H = 5 m und H' = 4 m, so wird

$$2a = 36°; \ \sin 36 = 0{,}5878; \ \operatorname{cotg} 18 = 3{,}0777$$

$$\operatorname{cotg} a' = 3{,}0777 - \frac{5}{4 \cdot 0{,}5878} = 0{,}9512; \ a' = 46{,}5°.$$

Gleichung (4) gibt auch dann richtige Werte von a', wenn die Turbine ins Unterwasser eintaucht, also wenn H' größer als H wird.

8. **Seitengeschwindigkeiten.** Wenn nach (1) der Wert v berechnet, mittelst eines Maßstabes auf A v abgetragen und das Parallelogramm A v' v v'' verzeichnet ist, so können die Geschwindigkeiten v' und v'' mittelst desselben Maßstabes auf A v' und A v'' abgenommen werden. Man erhält diese Werte aber auch durch die Formeln

$$(5) \qquad v' = v \frac{\sin (a' - a)}{\sin a}, \quad v'' = v \frac{\sin a}{\sin a'}.$$

9. **Wirkliche Geschwindigkeiten.** Wegen der Nebenhindernisse, welche das Wasser beim Durchgang durch die Zuleitung und das Leitrad findet, nehme man cirka 0,96 v statt v. Beim Uebergang des Wassers aus dem Leitrad in das Laufrad entstehen Störungen: das Wasser aus zwei benachbarten Leitkanälen vereinigt sich im Turbinenkanal, wodurch Wirbel entstehen; eine Radschaufel, zwischen zwei benachbarten Leitschaufeln liegend, spaltet den herabkommenden Wasserstrahl. Es sollten daher die Schaufeln dünn sein; allein dann nützen sie sich rasch ab, besonders an ihren obern Enden.

Das Geschwindigkeitsparallelogramm A v' v v'' paßt für die Schaufelform, wie sie oben angegeben worden, nur für den mittlern Cylindermantel; bei den betreffenden Parallelogrammen am innern und äußern Cylindermantel ist zwar v gleich groß wie am mittlern, dagegen ändern sich v' und v''. Es nimmt v'' von der Mitte nach innen zu, nach außen ab; daher hat das Wasser die Tendenz, mit ungleicher Geschwindigkeit die Bewegung längs des Radkanales zu beginnen. Von der Mitte aus nimmt die Radgeschwindigkeit rascher ab als die Wasser-

geschwindigkeit, nach auswärts ist es umgekehrt. Daher werden auf der innern Seite die Schaufeln vom Wasser, auf der äußern das Wasser von den Schaufeln geschlagen. Die dadurch entstehenden Arbeitsverluste werden um so erheblicher, je größer t im Verhältnis zu d ist. Aus diesen Gründen muß 0,96 v wieder reduciert werden um 4 bis 6 Prozente. Für 5 Prozente hat man als Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser in das Rad tritt, $0{,}95 \cdot 0{,}96\,v = 0{,}91\,v$. Dieser Wert zerlegt sich in die Seitengeschwindigkeiten $0{,}91\,v'$ in der Richtung der Drehung und in $0{,}91\,v''$ in der Richtung der Radschaufel.

Die mittlere Drehgeschwindigkeit des Rades kann daher zu $0{,}91\,v'$ angenommen werden.

10. **Weite der Leitkanäle.** Die Tiefe t des Rades ist der Unterschied m m', Fig. 3, des äußern und innern Radhalbmessers. Daher ist u b t der Querschnitt aller Leitkanäle am untern Ende, also $u\,b\,t\,v = Q$ die Wassermenge per Sekunde. Allein nach S. 239 muß hierin sowohl die Geschwindigkeit v, als auch der Querschnitt u b t korrigiert werden. Bezeichnet man den Ausflußkoefficienten mit k, so wird

$$k\,u\,b\,t\,v = Q. \tag{6}$$

Nach Obigem nimmt man 0,91 v für v und sehr häufig 0,94 u b t für u b t. Da nun $0{,}91 \cdot 0{,}94 = 0{,}855$, so kann somit für gewöhnlich $k = 0{,}85$ angenommen werden.

Mittelst Gleichung (6) kann t berechnet werden, wenn man b annimmt oder b, wenn t angenommen wird.

Um die Arbeitsverluste, welche durch eine große Tiefe t entstehen, zu vermeiden, ändere man die Richtung der Leitschaufeln auf der untern Seite so, daß der ganzen Tiefe t entlang die beiden Geschwindigkeiten v und v'' gleich bleiben, während die dritte Geschwindigkeit des Parallelogramms sich proportional zum Abstand von der Achse ändert. Am mittlern Cylindermantel ist die dritte Geschwindigkeit $= v'$, am äußern Cylindermantel $= \frac{D}{d}\,v'$ und am innern $= \frac{D'}{d}\,v'$. Die Aufgabe läuft darauf hinaus, je ein Dreieck zu konstruieren mit drei gegebenen Seiten. Diese Dreiecke enthalten die Werte des Winkels a, d. h. sie zeigen, wie sich die Richtung von v von außen nach innen ändert. Die verschiedenen Werte von a müssen bei der Richtung der Radschaufel an ihrem obern Ende berücksichtigt werden.

11. **Zusammenhang zwischen d, b, t und a.** Man denke sich, Fig. 6, ein rechtwinkliges Dreieck mit einer Hypotenuse gleich der Teilung $\frac{d\,\pi}{u}$ und der Kathete $b + e$, welche dem Winkel a gegenüberliegt, so wird

$$b + e = \frac{d\,\pi}{u}\,\sin a. \tag{7}$$

Setzt man den hieraus folgenden Wert von b aus (7) in (6), so folgt

$$k\,(d\,\pi \sin a - e\,u)\,t\,v = Q, \tag{8}$$

eine Gleichung, mit welcher z. B. d berechnet werden kann, wenn t und a angenommen werden.

12. **Weite der Turbinenkanäle.** Diese Weiten seien, Fig. 6, am obern Ende A m, am untern B n. Bei A m fließt das Wasser mit der Geschwindigkeit 0,91 v'', bei B n mit der Geschwindigkeit 0,91 v' hindurch. Daher ist u' . A m . t . 0,91 v'' = der Wassermenge Q. Hieraus folgt für die Kanalweiten:

$$(9) \qquad A\,m = \frac{Q}{0{,}91\,u'\,t\,v''}; \qquad B\,n = \frac{Q}{0{,}91\,u'\,t\,v'}.$$

Die Schaufeln sind so zu legen und zu krümmen, daß den vorstehenden Bedingungen entsprochen wird.

Die Tiefe des Laufrades auf der obern Seite soll um einige Millimeter größer sein als t; nach unten kann sich diese Tiefe noch vergrößern, wodurch die Austrittsgeschwindigkeit B k, Fig. 6, möglichst klein ausfällt.

13. **Wasserdruck zwischen den Radebenen.** Dieser Druck werde gemessen durch die Höhe p einer Wassersäule, derjenige einer Atmosphäre durch 10 m, so ist

$$(10) \qquad p = 10 + h - H'.$$

Damit dieser Druck gerade 1 Atmosphäre werde, muß p = 10 m sein; also müssen sich die beiden letzten Glieder aufheben und h = H' werden.

Ist in diesem Fall $a = 18^0$, $a' = 46{,}5^0$, so wird nach S. 282 H' = 0,8 H, also auch h = 0,8 H. Stellt man daher die Turbine so auf, daß ihre obere Ebene um 0,8 H unter dem Oberwasserspiegel liegt, so könnte der Mantel, welcher die Räder umgibt, zwischen beiden Rädern geöffnet werden, ohne daß Wasser durch die Spalte ausfließen, noch daß Luft von außen hineingedrückt würde.

Würde diese Turbine jedoch um h = H unter dem Oberwasserspiegel aufgestellt, so wäre nach (10) p = 10 + 0,2 H. Hätte der Radmantel in der Höhe der obern Laufradebene eine Oeffnung, so würde Wasser von innen nach außen getrieben mit einem Ueberdruck = 0,2 H.

14. **Druck auf den Zapfen.** Die Wasserdrücke auf die verschiedenen Flächenelemente der Radschaufeln geben eine Resultante, die zerlegt werden kann in einen horizontalen und vertikalen Druck. Der erstere liefert die nützliche Arbeit, der letztere drückt auf den Zapfen. Wenn die Resultante = 1, so wird der horizontale Druck bei 75 Prozent nützlicher Arbeit = 0,75; folglich der Vertikaldruck $\sqrt{1 - (0{,}75)^2} = 0{,}66$, d. h. der Druck abwärts entspricht dem Gefällsteil 0,66 H. Allein davon ist noch abzuziehen die Gefällshöhe $\frac{w^2}{2g}$, oder von 0,66 das Verhältnis $\frac{w^2}{2gH}$, das bei guter Ausführung höchstens 0,06 betragen kann. Also bleiben noch 0,60 H. Daher annähernd der Druck auf die horizontale Projektion $d\pi t$ der Schaufeln oder der Druck auf den Zapfen

$$(11) \qquad 1000\, d\pi t \,.\, 0{,}6\,H.$$

Kann das Wasser, welches durch die Spalte gegen die Achse hin dringt, nicht abfließen, so wird auch die Fläche mit dem Durchmesser D'

gedrückt. Zu diesem Wasserdruck kommt noch das Gewicht der Turbine mit Welle und Rad.

Der specifische Druck auf die Zapfenfläche soll 100 kg per 1 qcm nicht übersteigen und bei größern Tourenzahlen auf 75, 50 kg und noch tiefer sinken.

15. **Die Anzahl Umgänge der Turbine** per Minute wird gefunden, wenn man den Weg, welchen ein Punkt am mittlern Umfang in dieser Zeit durchläuft, durch den Umfang $d\pi$ dividiert.

16. **Nutzleistung.** Diese Turbine gibt bei richtiger Konstruktion und vollem Wasserzufluß cirka 75 Prozent Nutzeffekt. Die Effektverluste in Teilen der absoluten Arbeit sind annähernd:

durch die Zuleitung bis zur untern Leitradebene . .	0,07,
beim Uebergang von Leitrad in das Laufrad . . .	0,09,
durch die Austrittsgeschwindigkeit w	0,05,
durch Wasserverlust zwischen Rad und Mantel . . .	0,02,
durch die Achsenreibung	0,02,
Summe	0,25.

Nimmt die Wassermenge ab, so nimmt auch rasch der Wirkungsgrad der Turbine ab, wie sich aus dem Folgenden ergibt.

17. **Regulierung.** Es kommen folgende Mittel zur Anwendung:

a) Drosselklappe oder Schütze im Abzugsrohr. Bei dieser Regulierungsweise nimmt die Leistung des Rades bei verminderter Wassermenge rasch ab. Denn fließt z. B. nur die halbe Wassermenge auf die Turbine, so wird, da die Kanäle des Leit- und Laufrades alle offen bleiben, die Schütze so gestellt werden müssen, daß das Wasser nur mit der halben Geschwindigkeit durch diese Kanäle fließt. Also wird auch die Wassergeschwindigkeit v′ auf die Hälfte sinken, während die Drehgeschwindigkeit die gleiche bleibt. Also wird das Wasser, beim Uebergang in das Rad, von diesem geschlagen, wodurch ein großer Teil Arbeit verloren geht. Dieses Mittel ist daher für erhebliche Schwankungen im Wasserzufluß verwerflich.

b) Klappen, Deckel oder Schieber, durch welche eine entsprechende Anzahl Oeffnungen des Leitrades geschlossen werden können. Dadurch kann sich der hydrostatische Druck, der sonst auf die Radschaufeln wirken würde, an den betreffenden Stellen nicht geltend machen; ebenso nicht die lebendige Arbeit, welche das Wasser enthält, wenn es unter den Klappen vorbei geht; es wird im Gegenteil dieses Wasser durch den Druck p im Leitrad zurückgehalten. Wegen dieser Druckverminderung und der eintretenden Störungen nimmt daher der Wirkungsgrad rasch ab. Man kann diese Abnahme teilweise beseitigen, wenn man den abgeschlossenen Leitkanälen in besondern Röhrchen Luft zuleitet. Damit dies möglich sei, müssen alsdann die Größen h, a und a′ so gewählt werden, daß p kleiner wird als die Höhe der Luftsäule, welche den Druck der Atmosphäre mißt.

c) Einsatzstücke, welche in die Kanäle des Leit- und Turbinenrades gelegt und an den innern Radkränzen festgeschraubt werden. Um

sie anzumachen, müssen beide Räder gehoben werden. Dieses Mittel ist daher unbequem.

d) Cylindrische Ringe in den Leit- und Radkanälen, konzentrisch zu dem Turbinenmantel, wodurch die Kanäle in innere, mittlere und äußere Räume nach einem bestimmten Verhältnis abgeteilt werden. Man läßt das Wasser entweder nur durch die innere, oder nur durch die äußere Abteilung 2c. treten, je nach dem Wasserzufluß, und verbindet damit die Deckel oder Drosselklappe.

e) Zwei Turbinen statt einer, wovon die kleinere beim kleinsten Wasserzufluß, die größere beim mittlern und beide beim größten Wasserzufluß arbeiten, und verbindet damit Deckel, Einsatzstücke 2c.

Beisp. Welches sind die Dimensionen einer Turbine, die mit einer Wassermenge von 1,41 kbm und einem Gefälle von 2,5 m arbeiten soll?

Es werde angenommen Winkel $a = 18°$ und Gefälle $H' = 1{,}90$ m
Daher mittelst Tabelle S. 237 . . . . $v = 6{,}105$ „
Nach (3) Quadrat des mittl. Durchmessers $d^2 = \frac{10 \,.\, 1{,}41}{6{,}105} = 2{,}310$ qm.
Mittlerer Durchmesser . . . . . . $d = \sqrt{2{,}310} = 1{,}52$ m
Nun kann man auch annehmen: Schaufeld. $e = 0{,}01$; Weite $b = 0{,}04$ „
Da nun $d\pi = 4{,}7752$; $\sin 18° = 0{,}309$ und $b + e = 0{,}05$ „
so wird die Anzahl Leitschaufeln nach (7) $u = \frac{4{,}7752 \,.\, 0{,}309}{0{,}05} = 29{,}51$
wofür angenommen werden soll $u = 30$ und außerdem $u' = 33$
daher korrigierter Wert von $b = \frac{d\pi \sin a}{u} - e = \frac{1{,}4755}{30} - 0{,}01 = 0{,}0392$ m
Nach (4) wird $\operatorname{cotg} a' = \operatorname{cotg} 18 - \frac{2{,}5}{1{,}9 \sin 36} = 0{,}8392$; $a' = 50°$
Wirkl. Seitengeschwindigkeit v' nach (5) $0{,}91 \,.\, 6{,}105 \,.\, \frac{\sin 32}{\sin 50} = 3{,}837$ m
Desgleichen für v'' nach (5) . . $0{,}91 \,.\, 6{,}105 \,.\, \frac{\sin 18}{\sin 50} = 2{,}241$ „

Diese Geschwindigkeiten können auch der Zeichnung entnommen werden.

Anzahl Umdrehungen per Minute . . $60 \,.\, 3{,}837 : d\pi = 48{,}2$
Tiefe des Leitrades nach (6) $t = \frac{1{,}41}{0{,}85 \,.\, 6{,}105 \,.\, 0{,}0392 \,.\, 30} = 0{,}231$ m
Aeußerer Durchmesser des Leitrades . . $1{,}52 + 0{,}231 = 1{,}751$ „
Innerer Durchmesser desselben . . . . $1{,}52 - 0{,}231 = 1{,}289$ „
Die Tiefe des Laufrades nehme man oben $= 0{,}235$, unten $= 0{,}300$ „
Weite Am des Turbinenkanals oben . $\frac{1{,}41}{33 \,.\, 0{,}235 \,.\, 2{,}241} = 0{,}0811$ „
Weite Bn für unten . . . . . . $\frac{1{,}41}{33 \,.\, 0{,}3 \,.\, 3{,}837} = 0{,}0371$ „
Wasserdruck auf den Zapfen nach Formel (11)
$1000 \,.\, 4{,}775 \,.\, 0{,}231 \,.\, 0{,}6 \,.\, 2{,}5 = 1655$ kg
Absolute Arbeit . . . . $1000 \,.\, \frac{1{,}41 \,.\, 2{,}5}{75} = 47$ Pfd.
Nützliche Arbeit (zu 75 %) . . . . $0{,}75 \,.\, 47 = 35{,}25$ Pfd.

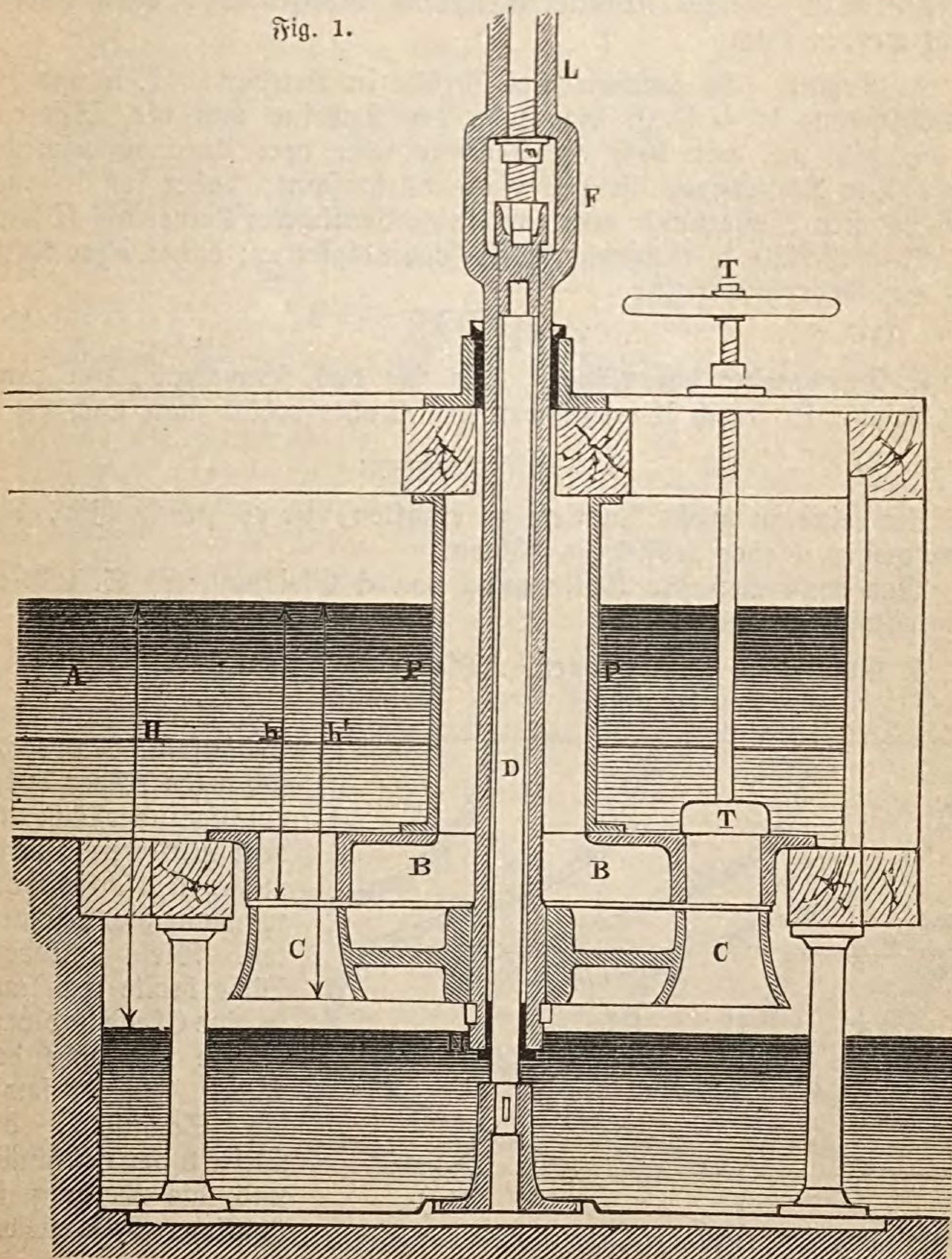
II. Turbine von Girard.

Leit- und Turbinenrad sind ähnlich wie bei dem Jonvalsystem; nur soll die Turbine immer über dem Unterwasserspiegel laufen, so daß das Wasser aus derselben in die freie Luft abfließt. Hierin liegt die wesentlichste Eigentümlichkeit dieses Systems.

a. Vollturbine.

1. **Einrichtung.** Die allgemeine Anordnung ersieht man aus Fig. 1. A Zuflußkanal; B Leitrad; C Turbinenrad. Originell ist die Aufhängung der Turbine: D eine vertikale Welle, welche unten auf

Fig. 1.



einem Ständer festgekeilt ist; LF eine vertikale Welle, welche über die Achse D gestellt ist und getragen wird durch einen Zapfen (Oberwasserzapfen), so daß die Schmierung nicht unter Wasser zu erfolgen hat. Das Laufrad ist auf der hohlen Welle LF festgemacht. Der Zapfen hat auf der obern Seite ein Gewinde. Dreht man die Schraubenmutter n auf oder zu, so kann die Turbine gesenkt oder gehoben werden. Um die feste Welle D sind oben und unten cylindrische Lagerbüchsen, um welche sich die hohle Welle dreht. Am Halse L der hohlen Welle kann ein Rad zur Fortleitung der Bewegung festgemacht werden. PP ist ein Mantel, welcher den Zutritt des Wassers zum innern Raum der Räder verhindert; TT vertikale Schieber zum Oeffnen und Schließen der Leitkanäle, welche Reguliereinrichtung indessen auch durch andere ersetzt werden kann.

2. **Gefälle.** Es kommen drei Gefälle in Betracht: H, h und h′. Die Differenz h′ — h ist die Höhe der Turbine und die Differenz H — h′ gibt an, wie hoch die Turbine über dem Unterwasserspiegel liegt. Der Wasserstand ist fast nirgends konstant; daher soll h′ auch beim höchsten Wasserstand noch um einige Centimeter kleiner als H sein.

Dem Gefälle h entspricht die Geschwindigkeit v; daher ohne Rücksicht auf Nebenhindernisse

$$(1) \qquad v = \sqrt{2gh}.$$

3. **Durchmesser der Räder.** Wie für das Jonvalrad, nur muß das Gefälle H′ durch h ersetzt werden. Daher erhält man nach (1)

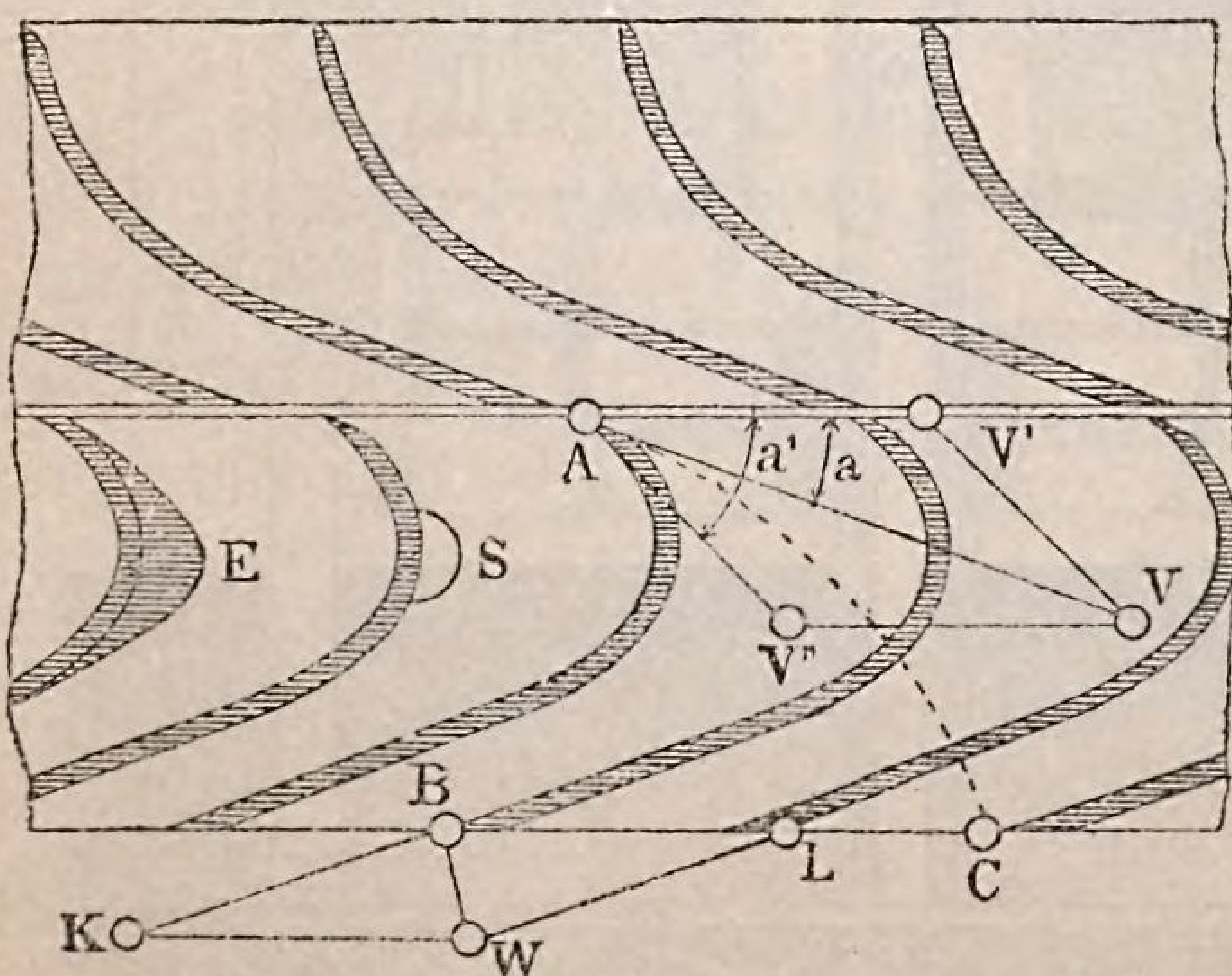
$$(2) \qquad d^2 = 10 \frac{Q}{\sqrt{2gh}}.$$

Um keine zu große Radtiefe zu erhalten, ist es zweckmäßig, den Durchmesser d eher größer zu wählen.

Man kann auch zur Bestimmung von d Gleichung (8) S. 283 in Anwendung bringen.

4. **Empirische Dimensionen.** Wie beim Jonvalrad.

Fig. 2.



5. **Verzeichnung der Schaufeln.** Man denke sich beide Räder durch eine Cylinderfläche mit dem mittleren Durchmesser d, konzentrisch zur Radachse, geschnitten. Diese Cylinderfläche breite man aus in eine Ebene und verzeichne die Höhe der Räder, Fig. 2, sowie die Schaufeln, die Weite b der Leitkanäle und die Teilung in ähnlicher Weise wie bei

der Jonval-Turbine, so ergibt sich auch die Anzahl der Leitschaufeln. Die Turbinenschaufeln werden verzeichnet unter Berücksichtigung der nachstehenden Regeln.

6. **Bewegung des Wassers im Rade.** Das Wasser verläßt das Leitrad in der Richtung A v mit einer Geschwindigkeit v, berechnet nach Gleichung (1), unter einem Winkel v A v′ = a, der zwischen 16° und 22° liegen soll. Man zerlege v in die Seitengeschwindigkeiten A v′ = v′ und A v″ = v″, wovon die erstere in der Richtung der Drehung, die andere in der Richtung liegt, welche die Radschaufeln an ihrem obern Ende mit der Radebene A v′ bildet. Dadurch entsteht der Winkel v′ A v″ = a′, der zu berechnen ist nach folgender Gleichung

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{cotg} a' = \operatorname{cotg} a - \frac{h'}{h \sin 2a}.$$

Diese Gleichung geht aus (4) der Jonval-Turbine hervor, wenn man daselbst H mit h′ und H′ mit h vertauscht.

Man kann auch Formel (3) umgehen und v′ und v″ direkt ausrechnen mittelst der Gleichungen

$$\text{(4)} \qquad v' = \frac{g\,h'}{v \cos a};$$

$$\text{(5)} \qquad (v'')^2 = v'^2 - 2g\,(h' - h).$$

Indessen mag es angezeigt sein, der Kontrolle wegen beide Berechnungen auszuführen.

Diese Geschwindigkeiten v, v′, v″ sind die theoretischen. Ihre wirklichen Werte sind kleiner wie bei der Jonval-Turbine (S. 282). Man kann nehmen: 0,91 v für v und, je nach der Radtiefe und Schaufeldicke, ebenso 0,91 v′ für v′, sowie 0,91 v″ für v″. Der Wert 0,91 v′ ist die Geschwindigkeit des Wassers in der Richtung der Drehung. Ebenso schnell soll der mittlere Radumfang ausweichen. Dieser Wert ist also die mittlere Rotationsgeschwindigkeit.

Es sei B k die Richtung der Turbinenschaufeln am untern Ende. Man mache B k = B L = der mittleren Rotationsgeschwindigkeit und ziehe das Parallelogramm B L w k, so ist B k die Geschwindigkeit des Wassers längs der untern Radkanäle und B w die absolute Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser das Rad verläßt. Diese Geschwindigkeit B w = w soll klein sein, damit möglichst wenig von der lebendigen Arbeit, welche im Wasser enthalten ist, verloren geht. Es sei z. B. w = ¼ von $\sqrt{2gH}$, so geht ¼ . ¼ oder 1/16 vom Gefälle H verloren. Es fällt w klein aus, wenn der Winkel a klein gewählt und die Radkanäle nach unten tiefer gemacht werden, wie dies in Fig. 1 bei C sichtbar ist.

Auch hier geht das Wasser, wie beim Jonvalrad, längs einer Kurve A C durch das Rad. Das untere Ende der Kurve ist parallel zu B w.

7. **Querschnitt der Kanäle.** Die Leit- und Radkanäle sind gerade so weit zu machen, daß sie die größte Wassermenge bei den respektiven Geschwindigkeiten noch durchzulassen vermögen. Mithin müssen die Querschnitte der Kanäle zusammen für mittlere Verhältnisse sein

(6) Leitkanäle unten: $\frac{Q}{0{,}85\,v}$; Radkanäle oben: $\frac{Q}{0{,}91\,v''}$; Radkanäle unten: $\frac{Q}{k\,.\,0{,}91\,v'}$;

wo k den Kontraktionskoefficienten bezeichnet, der zwischen 0,94 und 1 liegt, je nachdem die Schaufeln an den Ausflußstellen mehr oder weniger konvergieren oder parallel sind.

Die Bewegung des Wassers im Radkanal wird annähernd gleichförmig. Da nun der Querschnitt der Radkanäle in der Mitte größer ist als unten und oben, so bildet sich bei S, Fig. 2, ein leerer Raum, der sich mit Luft füllt, wenn man bei S in dem äußern Radmantel Oeffnungen anbringt. Es wird hierbei immer vorausgesetzt, daß das Rad nicht in das Unterwasser tauche, sondern in freier Luft sich drehe. Sollte das Rad wegen Stauungen im Abzugskanal zeitweise ins Unterwasser eintauchen, so ist es zweckmäßig, die Schaufelräume in der Mitte, wie bei E in Fig. 2 angegeben, auszufüllen und die Oeffnungen S wegzulassen.

8. **Tiefe der Räder.** Wie bei der Jonval-Turbine. Die Tiefe des Laufrades unten macht man bis 3mal größer als die des Leitrades.

9. **Zusammenhang zwischen d, b, t und a, sowie Weite der Turbinenkanäle.** Wie bei der Jonval-Turbine.

10. **Wasserdruck zwischen den Radebenen.** Dieser ist = 1 Atmosphäre. In der That gibt Gleichung (10) der Jonval-Turbine p = 10 m, weil die Differenz h − H′ = o wird.

11. **Druck auf den Zapfen.** Wie bei der Jonval-Turbine.

12. **Anzahl Umgänge.** Wie bei der Jonval-Turbine. Bei einer gußeisernen Turbine soll der äußere Kranz nicht mehr als 30 m Umfangsgeschwindigkeit (S. 138) haben; daher kann auch das Gefälle nicht beliebig groß sein. Bei sehr großem Gefälle lege man Reifen aus Schmiedeisen oder Stahl um das Rad.

13. **Regulierung.** Die Regulierung mittelst Schieber, Klappen, Deckel, sowie das gänzliche Verschließen einzelner Leitkanäle hat hier nicht jene nachteilige Wirkung wie bei der Jonval-Turbine, weil das Wasser, einmal in das Turbinenrad übergetreten, die Kanäle dieses Rades in gleicher Weise durchfließt und seine lebendige Arbeit abgibt, ob einzelne darüber liegende Leitkanäle offen oder geschlossen seien.

14. **Wirkungsgrad.** Diese Turbinen machen bei vollem Wasserzufluß 74 bis 77 Prozent vom Arbeitsgefälle h′ nutzbar. Dieser Wirkungsgrad nimmt bei abnehmendem Wasserzufluß nur langsam ab, besonders wenn die Reguliervorrichtung zweckmäßig angeordnet ist. Wenn ein Konstrukteur bei vollem Wasserzufluß 75 Prozent garantiert, so garantiert er bei $^2/_3$ der vollen Wassermenge noch 72 und bei $^1/_3$ der vollen Wassermenge noch 67 Prozent der absoluten Arbeit.

Taucht das Rad in das Unterwasser ein, so stößt das von oben kommende Wasser gegen das Unterwasser, wodurch ein Teil der lebendigen Arbeit des erstern verloren geht. Der Wirkungsgrad der Turbine nimmt daher rasch ab mit der Tiefe der Eintauchung.

15. **Die Girard-Turbine als Jonval-Turbine.** Wenn der Unterwasserspiegel stark steigt und sinkt, so konstruiert man die Turbine häufig so, daß sie sowohl unter Wasser wie über Wasser arbeiten kann. In diesem Falle muß sie eine Jonval-Turbine sein, bei welcher sich sehr nahe das ganze Gefälle H in Geschwindigkeit umsetzt. Es muß also der Druck p gleich dem äußern Luftdruck werden und H' nur um wenig Prozente von H abweichen. Nun ist H sehr veränderlich, daher h so zu wählen, daß die Turbine immer voll beaufschlagt wird, wenn der Radmantel einzutauchen beginnt. Solche Turbinen heißen auch Grenzturbinen.

b. Partialturbine.

Bei kleinen Wassermengen und hohen Gefällen fällt der Durchmesser der Turbine klein und die Anzahl Umdrehungen groß aus. Um dies zu vermeiden, leitet man das Wasser nur auf einen beschränkten Teil von Radkanälen, konstruiert indessen die Leit- und Radkanäle wie für volle Beaufschlagung.

Beisp. Es sei das totale Gefälle H = 30 m und die Wassermenge Q = 0,185 kbm. Wie ist die Turbine zu bauen?

a. Zuleitung. Das Wasser ist der Turbine durch eine eiserne cylindrische Röhre zuzuleiten; ihre Länge sei 70 m und die Geschwindigkeit des Wassers in ihr 0,85 m, so wird der Querschnitt der Leitung 0,185 : 0,85 = 0,2177 qm. Daher ihr innerer Durchmesser = 0,527 m, wofür zu nehmen 0,53 m.

In dieser Leitung wird nach Prony (S. 255) durch Reibung ein Gefälle verbraucht gleich

$$\left(0{,}00007 \cdot 0{,}85 + 0{,}001393 \cdot 0{,}85^2\right) \cdot \frac{70}{0{,}53} = 0{,}141 \text{ m},$$

wofür indessen wegen Krümmungen 2c. zu nehmen = 0,20 m.

b. Leitapparat. Die Turbine werde um 0,14 m über dem Unterwasserspiegel aufgestellt und erhalte 0,16 m Höhe, so wird

$$\text{Gefälle } h = 30 - 0{,}20 - 0{,}16 - 0{,}14 = 29{,}50 \text{ m}.$$

Daher fließt das Wasser aus dem Leitapparat, ohne Rücksicht auf Nebenhindernisse, mit einer Geschwindigkeit (Tab. S. 238) v = 24,06 m. Also wird der theoretische Querschnitt aller Leitkanäle an ihren engsten Stellen

$$\frac{Q}{v} = \frac{0{,}185}{24{,}06} = 0{,}0077 \text{ qm},$$

welcher Betrag aber wegen der oben angegebenen Einflüsse vergrößert werden soll im Verhältnis von 0,85 auf 1. Daher

Querschnitt aller Leitkanäle 0,0077 : 0,85 = 0,0091 qm.

Nimmt man die Radtiefe t = 0,10 m an, so wird die Summe aller Weiten b = 0,0091 : 0,10 = 0,091 m. Gibt man dem Leitapparat 5 Kanäle, so ist die Weite eines Kanales b = 0,091 : 5 = 0,0182 m.

Nimmt man die Schaufeldicke e = 0,006 m und Winkel a = 18°, so beträgt die Teilung des Leitapparates, Gleichung (7), S. 283

$$\frac{b + e}{\sin a} = \frac{0,0182 + 0,006}{0,309} = 0,0783 \text{ m.}$$

Daher dehnen sich alle 5 Kanäle dem mittleren Radumfang nach aus um 5 . 0,0783 = 0,3915 m.

c. Turbine. Man nehme nun an, diese Strecke sei ein bestimmter Teil des Umfanges, z. B. $^1/_{12}$, so wird der Umfang $d\pi = 12 . 0,3915 = 4,698$ m; also d = 1,496 m.

Die Tiefe des Rades sei: oben = 0,104, unten = 0,200 m, so wird äußerer Durchmesser = 1,600, innerer Durchmesser = 1,392 m.

Die theoretischen Seitengeschwindigkeiten des Laufrades sind:

Nach Gleichung (5) . . . . . $v' = \frac{9,81 . 29,66}{24,06} = 12,19$ m

Nach Gleichung (6) $(v'')^2 = (12,19)^2 - 2 . 9,81 . 0,16$; $v'' = 12,06$ „

und die entsprechenden wirklichen Werte:

in der Richtung der Drehung . . . . 0,91 . 12,19 = 11,093 „

der Radschaufel nach . . . . 0,91 . 12,06 = 10,970 „

Hat man v und v' verzeichnet, so ergibt sich die Richtung von v''; nach Gleichung (4) erhält man . . . . a' = 36,5°.

Für die 12fache Wassermenge und 50 Schaufeln ergibt sich nach S. 284:

Weite Am beim Eintritt . . . $\frac{12 . 0,185}{50 . 0,104 . 10,97} = 0,0389$ m

Weite Bn beim Austritt . . . $\frac{12 . 0,185}{50 . 0,2 . 11,093} = 0,0200$ „

Anzahl Umdrehungen per Min. 60 . 11,093 : 4,698 = 141,6.

Wasserdruck a. d. Zapfen 1000 . 0,3915 . 0,1 . 0,6 . 29,5 = 693 kg.

III. Turbine von Poncelet.

Dieses Rad ist über das Unterwasser aufzustellen wie das Girard-Rad, so daß das Wasser aus der Zuleitung in das Rad gelangt, wie wenn es aus einem Behälter in die freie Luft abfließen würde; daher wird es häufig auch Girard-Rad genannt. Das Rad erhält eine vertikale oder horizontale Achse. Beim erstern ist die Beaufschlagung eine äußere (von Poncelet 1826 vorgeschlagene) oder innere, bei letzterm eine innere, jedoch immer eine partielle.

Bei allen drei Rädern wirkt die Centrifugalkraft auf das Wasser ein, während es durch die Radkanäle geht; bei den Jonval- und Girard-Turbinen ist dies nicht der Fall.

A. Turbine mit äußerer Beaufschlagung und vertikaler Achse.

In Fig. 1 bezeichnen A das Rad, welches auf einer vertikalen Welle S befestigt wird; B das Wasserzuleitungsrohr, das sich mit seiner Mündung genau an den äußern Radumfang anschließt; C einen Schieber, welcher aus- und eingezogen werden kann, je nachdem das Wasser durch den Kanal 1, oder durch die Kanäle 1 und 2, oder durch 1, 2 und 3 ꝛc. gleichzeitig dem Rade zufließen soll; I, I die Radkanäle. Das Wasser

gelangt am äußern Radumfang in diese Kanäle, drückt auf die Radschaufeln in der Richtung der Drehung, gibt hierdurch den größern Teil seiner lebendigen Arbeit an das Rad ab und tritt am innern Umfang mit einer kleinen absoluten Geschwindigkeit aus dem Rad.

1. **Gefälle.** Es reicht von der Mitte der Radhöhe bis zum Oberwasserspiegel. Bezeichnet man dasselbe mit h_0, so wird $h_0 = 0,5\ (h + h')$.

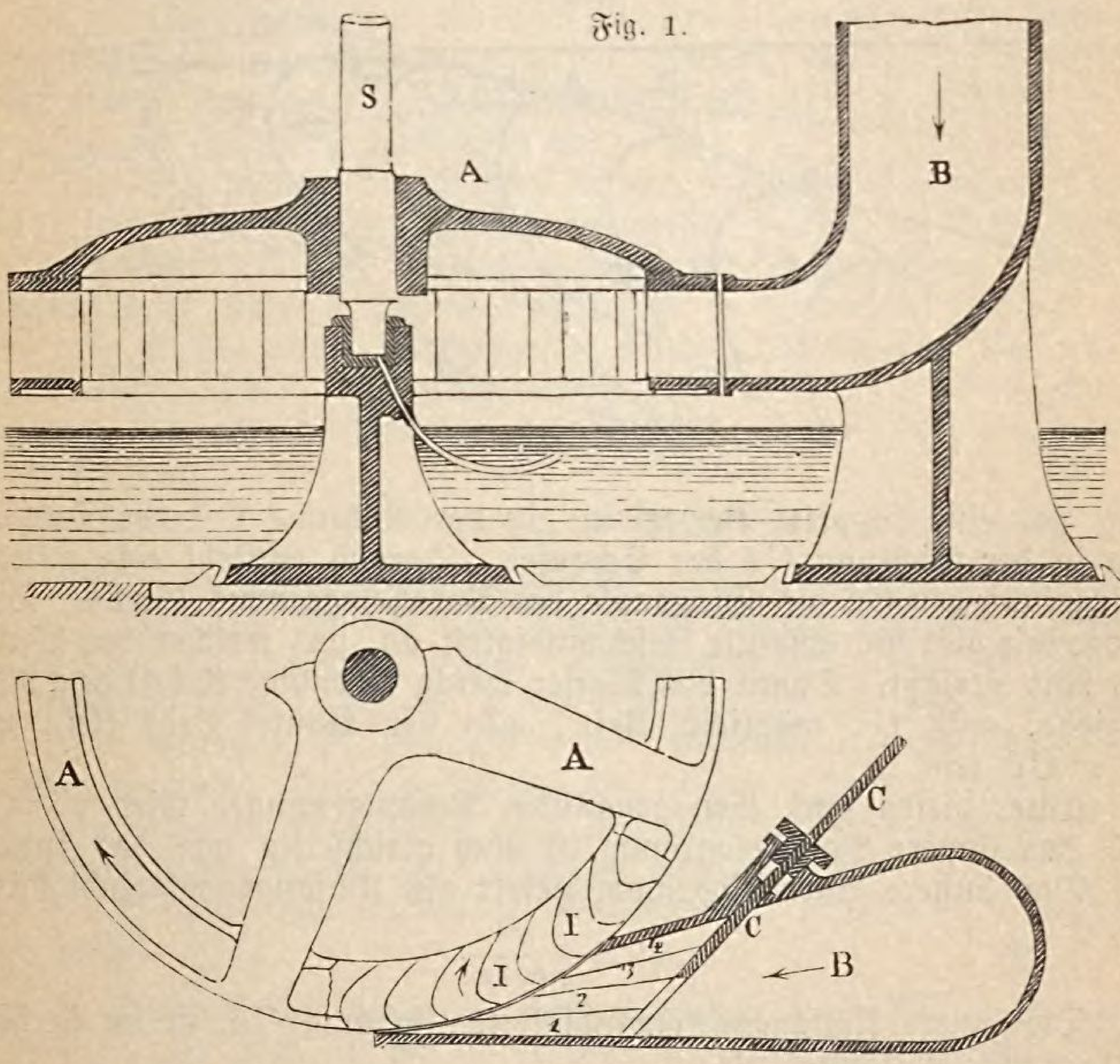
Daher die Geschwindigkeit v, mit welcher das Wasser aus dem Leitapparat austritt, ohne Rücksicht auf Nebenhindernisse

$$(1) \qquad v = \sqrt{2 g h_0}.$$

2. **Durchmesser.** Der äußere Durchmesser D kann beliebig gewählt werden, wenn nur das Wasser ungehindert nach dem Unterkanal gelangen kann.

Der innere Raddurchmesser D′ soll für kleine Räder cirka 0,7, für mittlere 0,76 und für große 0,82 vom äußern betragen. Die Radtiefe wird $= 0,5\ (D - D')$.

Fig. 1.



3. **Die Radhöhe** auf der äußern Seite soll wenigstens 4/3 von der Radtiefe sein.

4. **Leitapparat.** Fällt die Breite p q (Fig. 2) der Mündung A B groß aus, so müssen durch Schaufeln Kammern angelegt werden (Fig. 1),

deren mittlere Richtung den Winkel a mit dem Radumfang bildet. Es können auch zwei oder mehrere getrennte Einläufe angebracht werden.

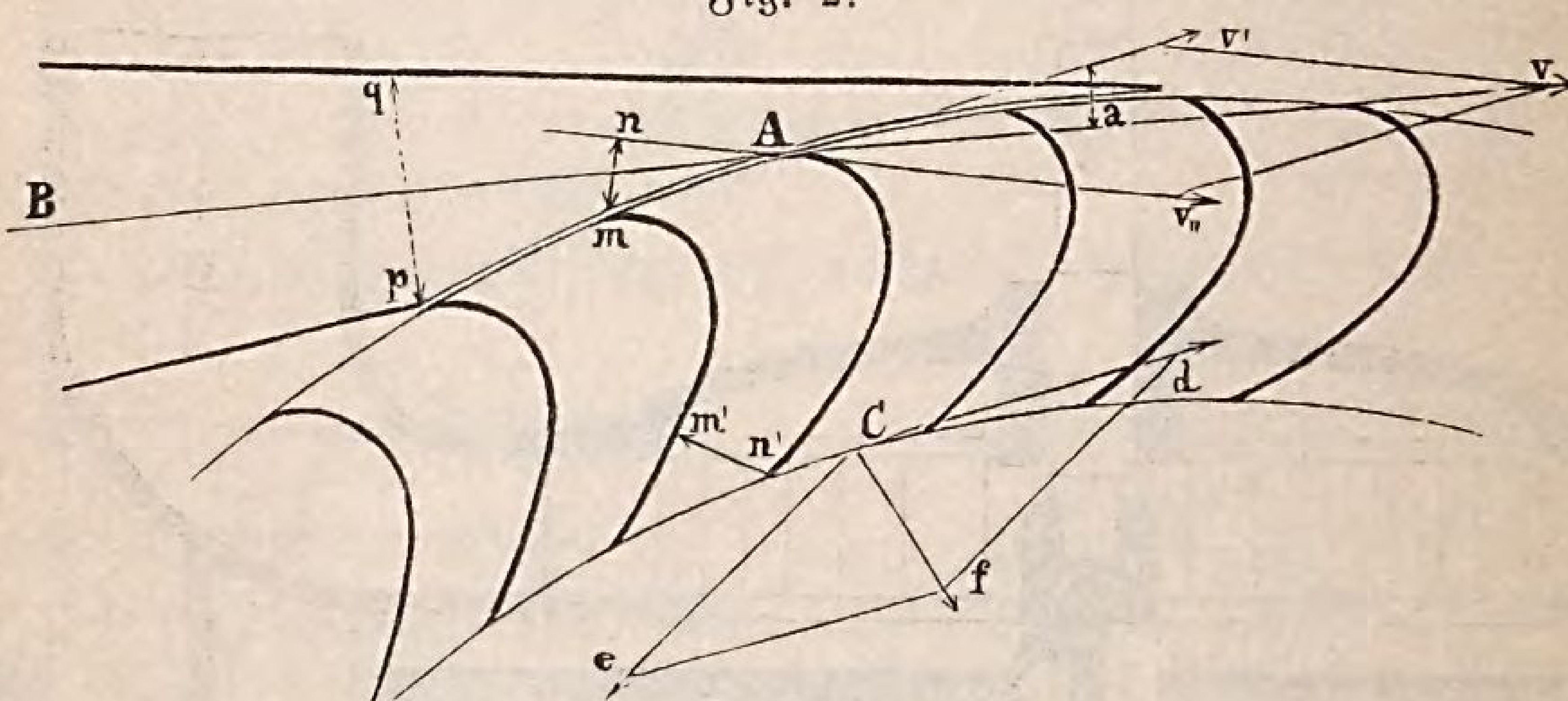
Der Winkel a soll klein, also die Rohrmündung hoch und schmal sein. Gewöhnlich wird a zwischen 12° und 15° angenommen. Wegen dieser Zuleitung des Wassers heißt die Turbine auch T a n g e n t i a l r a d.

5. **Theoretische Geschwindigkeiten.** Man verlängere B A (Fig. 2) über A hinaus, mache diese Verlängerung A v = v (Gl. 1) und zerlege v durch das Parallelogramm A v′ v v″ in zwei Seitengeschwindigkeiten: v′ in der Richtung der Drehung und v″ in der Richtung der Schaufeln an ihrem äußern Ende.

Damit kein Stoß des Wassers beim Eintritt in das Rad erfolge, soll v′ zugleich die Umfangsgeschwindigkeit des Rades sein.

Mit der Geschwindigkeit v″ beginnt das Wasser seine Bewegung längs des Radkanales. Diese Bewegung wird aber durch die C e n t r i f u g a l k r a f t v e r z ö g e r t. Ein Wassertropfen in C am innern Um-

Fig. 2.



fang hat eine doppelte Bewegung: in der Richtung C d der Drehung und in der Richtung C e der Schaufel. Daraus entsteht eine mittlere Geschwindigkeit C f als Diagonale des Parallelogramms C d f e. Diese Diagonale gibt die absolute Geschwindigkeit an, mit welcher das Wasser das Rad verläßt. Damit das Wasser wenig lebendige Arbeit dem Rade entziehe, muß C f möglichst klein, also der Winkel C d f klein und C e = C d sein.

Unter diesen zwei eben genannten Voraussetzungen wird v″ = v′, d. h. das äußere Parallelogramm ist auch gleichseitig wie das innere.

Das äußere Parallelogramm liefert als Umfangsgeschwindigkeit

$$v' = \frac{v}{2 \cos a}. \qquad (2)$$

Die innere Umfangsgeschwindigkeit, also auch C e, ist im Verhältnis von D : D′ kleiner als v′.

6. **Wirkliche Geschwindigkeiten.** Der wirkliche Wert von v′ ist um 3 bis 5 Prozent kleiner als nach Formel (2), je nach den Nebenhindernissen in der Zuleitung. Im Mittel kann man 0,96 v statt v, also auch 0,96 v′ statt v′ und 0,96 v″ statt v″ annehmen.

Beim Eintritt des Wassers in das Rad entsteht eine weitere Reduktion dieser Geschwindigkeiten: wegen der Störungen, welche die Anwesenheit der Radschaufeln verursacht und weil das Parallelogramm A v′ v v″ nur für die mittlere Lage B A des Einlaufes zutrifft. Rückt man nämlich den Punkt A auf dem Einlaufbogen vor- oder rückwärts, so ändert das Parallelogramm seine Form, was notwendig Stöße zur Folge hat. Hierin liegt auch der Grund, warum die Breite p q des Einlaufes klein sein soll.

Diese Störungen bewirken eine Reduktion der Geschwindigkeiten von cirka 1 auf 0,95. Daher ist für v′ zu rechnen 0,95 . 0,96 v′ = 0,91 v′ und 0,95 . 0,96 v″ = 0,91 v″ für v″.

Hiernach soll die äußere Umfangsgeschwindigkeit des Rades 0,91 v′ sein und die Geschwindigkeit längs der Schaufeln beim Austritt

$$(3) \qquad C e = 0{,}91\, v' \cdot \frac{D'}{D}.$$

7. **Querschnitte.** Der Querschnitt des Zuflußrohres ist so zu wählen, daß die Geschwindigkeit des Wassers nicht größer wird als 1 m.

Der Querschnitt des Leitapparates zunächst dem Rad wird erhalten, wenn man Q durch 0,96 v k dividiert, wo k den Kontraktionskoefficienten bezeichnet. Gewöhnlich nimmt man k = 0,95, so daß man Q mit 0,85 v zu dividieren hat.

Die Querschnitte der Radkanäle am äußern Radumfang, welche längs der Mündung des Zuflußrohres liegen, müssen im Verhältnis von v″ : v größer sein als der Querschnitt des Zuflußrohres. Man verlängere A v″ über A hinaus und mache m n senkrecht darauf, so ist m n die Weite eines Radkanales. Diese Weite ergibt sich aus der Zeichnung. Durch Rechnung erhält man dieselbe, wenn man die Teilung A m mit dem Sinus des Winkels m A n = 2a multipliziert. Also ist

$$(4) \qquad m n = A m \,.\, \sin 2 a.$$

Der Querschnitt längs der Weite m′ n′ am innern Radumfang ist im Verhältnis von D′ : D größer zu machen als der Querschnitt längs m n am äußern Umfang. Findet außerdem beim Austritt noch Kontraktion statt, z. B. von 1 auf 0,93, so muß der Kanalquerschnitt bei m′ n′ wegen dieser Kontraktion im Verhältnis von 93 auf 100 vergrößert werden. Der Querschnitt am innern Umfang ist ein Rechteck wie am äußern, nur macht man den innern 2—3mal höher als den äußern, um den Winkel f C d möglichst klein zu erhalten. Die Richtung von C e ist somit nicht willkürlich, sondern ergibt sich durch Verzeichnung der Weite m′ n′.

8. **Die Anzahl Schaufeln** soll möglichst groß sein. Gewöhnlich gibt man dem Rad 30 bis 60 Schaufeln. Dividiert man den Umfang D π durch die Anzahl Schaufeln, so erhält man die Teilung A m.

9. **Die Anzahl Umgänge** des Rades per Minute wird erhalten, wenn man den Weg, welchen der äußere Radumfang in dieser Zeit zurücklegt, mit dem Umfang D π dividiert.

10. **Effektverluste.** Die Arbeiten, welche das Wasser dem Rad theoretisch und effektiv zuführt, verhalten sich wie die Quadrate der theoretischen und effektiven Eintrittsgeschwindigkeiten, also nach obiger Annahme wie $1^2 : 0{,}91^2$ oder wie $1 : 0{,}828$. Mithin gehen bis zum Eintritt des Wassers in das Rad 17 Prozent Arbeit verloren.

Die Arbeiten, welche das Wasser im Leitapparat zuführt und welche es mit aus dem Rade fortnimmt, verhalten sich wie die Quadrate der Geschwindigkeiten Av und Cf. Ist $Cf = 0{,}27$ von Av, so tritt somit das Wasser mit 0,073 oder 7,3 Prozent seiner Arbeit aus dem Rad. Diese 7,3 Prozent sind für das Rad verloren. Es bleibt also als nützliche Arbeit $0{,}828 - 0{,}073 = 0{,}755$ der absoluten Arbeit, die durch die Achsenreibung noch um cirka 0,02 und durch den Gefällsverlust $H - h_0 : H$ vermindert wird.

Das Tangentialrad gibt in der That bei guter Ausführung 72 bis 74 Prozent Nutzeffekt. Dieser Wirkungsgrad vermindert sich bei abnehmendem Wasserzufluß, wie bei der Girard-Turbine, nur wenig.

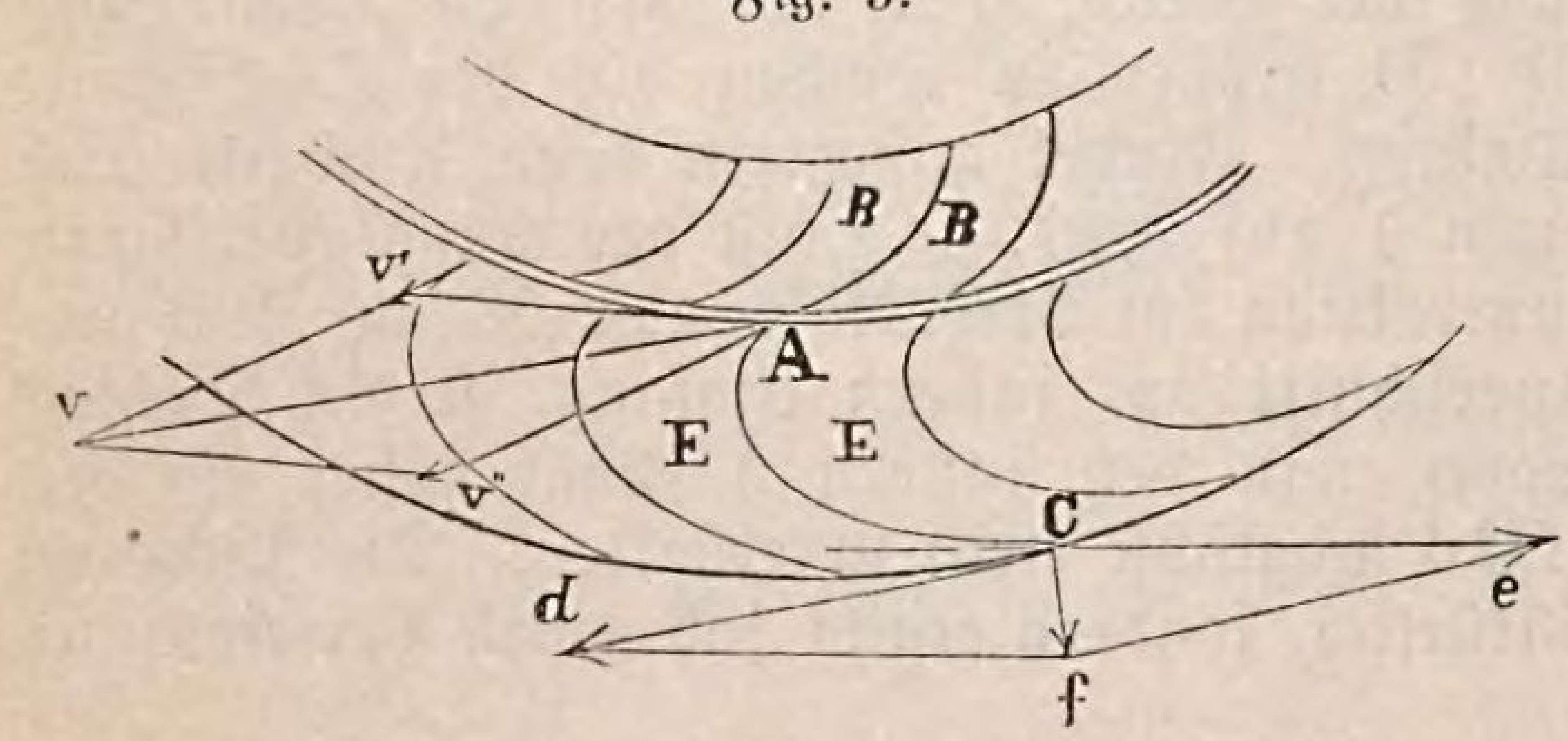
B. Turbine mit innerer Beaufschlagung und vertikaler Achse.

Es seien B, B, Fig. 3, die Zuleitungskanäle und E, E die Radkanäle. Das Wasser gelange mit einer Geschwindigkeit $Av = v$ bei A aus der Zuleitung in das Rad. Hier zerlegt sich v durch das Parallelogramm $Av'vv''$ in die Seitengeschwindigkeiten $Av' = v'$ und $Av'' = v''$, wovon v' tangential an den innern Radumfang und v'' tangential an das innerste Element der Radschaufel sein soll. Der theoretische Wert von v ist, wie beim vorhergehenden Rade, $v = \sqrt{2gh_0}$.

Damit kein Stoß des Wassers gegen die Radschaufeln erfolge, soll v' die innere Umfangsgeschwindigkeit des Rades sein.

Das Wasser beginnt seine Bewegung längs der Radschaufel AC mit der Geschwindigkeit v''. Diese wird durch die Centrifugalkraft beschleunigt. Ein Wasserteil, bei C am äußern Umfang des Rades angekommen, habe die Geschwindigkeiten: Ce in der Richtung des äußern Schaufelelementes und Cd in der Richtung der Drehung. Beide Geschwindigkeiten setzen sich zusammen mittelst des Parallelogramms $Cefd$ in die Resultante Cf. Daher ist Cf die absolute Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser das Rad verläßt. Diese Geschwindigkeit soll klein sein, was erreicht wird, wenn der Winkel eCd sich 180^0 nähert und wenn $Ce = Cd$ wird. Dann folgt aber auch, daß $v'' = v'$, daß also auch das innere Parallelogramm gleichseitig sein muß.

Fig. 3.



Wenn Winkel $v'Av = a$, so werden die theoretischen Werte von v' und Ce sein

$$v' = \frac{v}{2 \cos a}; \quad Ce = v' \cdot \frac{D}{D'}.$$

Diese Geschwindigkeiten v, v', Ce sind aber zu reduzieren wie beim frühern Rad, um ihre wirklichen Werte zu erhalten.

Die Querschnitte, durch welche das Wasser mit den Geschwindigkeiten v', v'' und Ce hindurchgeht, werden erhalten wie beim vorigen Rad oder nach den auf S. 290 angegebenen Regeln.

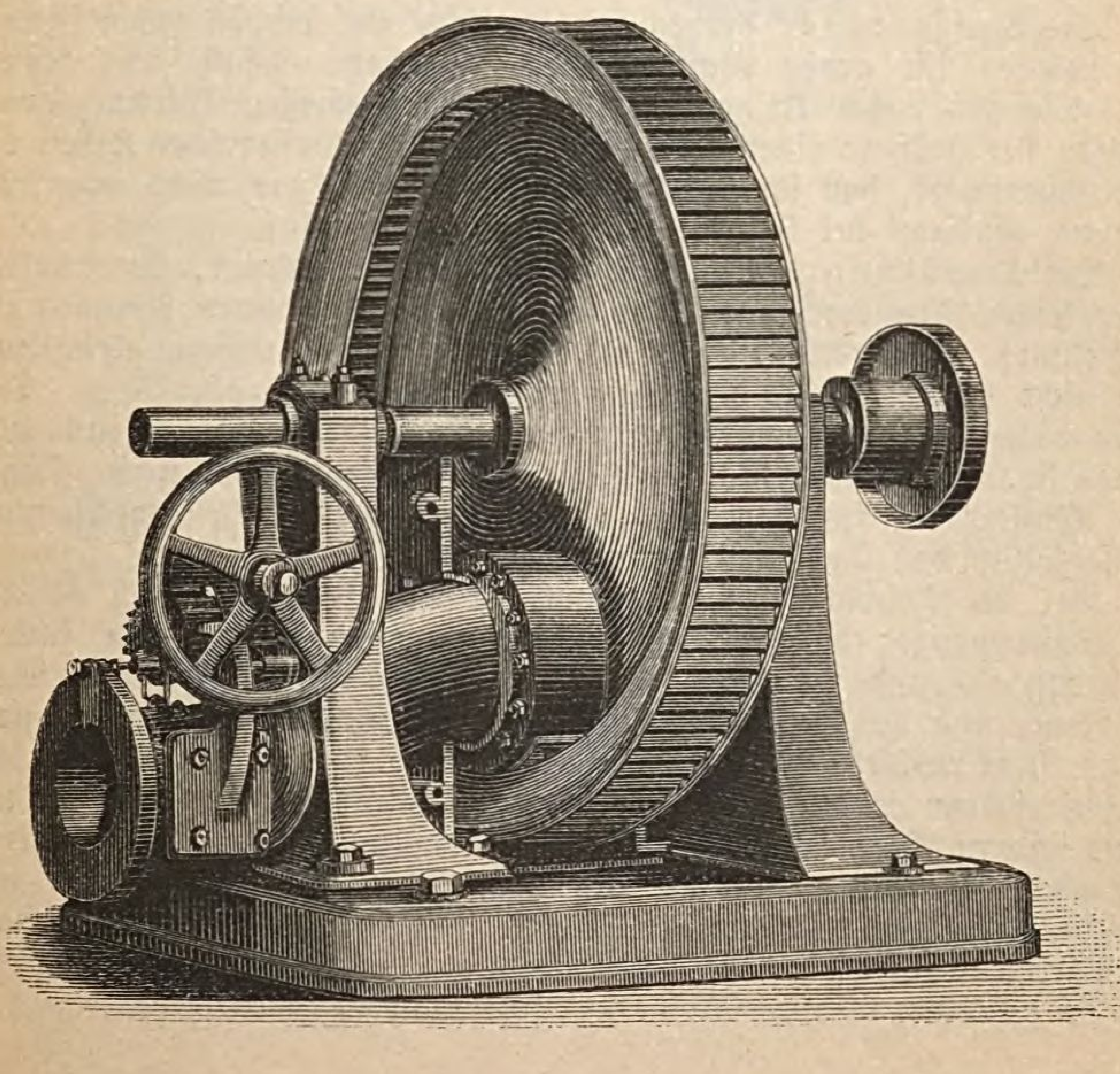
C. Turbine mit innerer Beaufschlagung und horizontaler Achse.

Das Rad, Fig. 3, denke man sich mit horizontaler Achse und den Auslauf des Wassers bei A an der tiefsten Stelle der Zuleitung, also mit einem Gefälle h, so wird die Geschwindigkeit $Av = v$ des Wassers sein

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Auch hier zerfällt v in die Seitengeschwindigkeiten $Av' = v'$ und $Av'' = v''$. Die erstere v' wird zur Drehungsgeschwindigkeit am innern

Fig. 4.



Radumfang; die letztere v'' zur Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser seine Bewegung der Radschaufel AC entlang beginnt. Diese Geschwindigkeit wird vergrößert: einmal durch die Centrifugalkraft; dann aber auch durch die Schwere, indem das Wasser durch die Höhe h' — h herabfällt. Die Größe h' bezeichnet nämlich die Tiefe des Wassers an der Stelle C, wo es das Rad verläßt, unter dem Oberwasserspiegel. Vermöge dieser beiden Kräfte gelangt das Wasser aus dem Rad: mit einer Geschwindigkeit Ce längs der Schaufel und einer Geschwindigkeit Cd in der Drehrichtung. Beide geben als Resultante Cf. Mit der Geschwindigkeit Cf verläßt das Wasser das Rad. Damit Cf klein werde, muß der Winkel dCe möglichst nahe an 180° reichen und es muß Ce = Cd sein. Daraus ergeben sich folgende theoretische Geschwindigkeiten

$$v' = \frac{gh'}{v \cos a}; \qquad Ce = v' \cdot \frac{D}{D'}.$$

Hier hat a dieselbe Bedeutung wie bei den beiden andern Radformen.

Auch hier sind die Geschwindigkeiten v, v', v'', Ce wie oben auf ihre wirklichen Werte zu reduzieren; ebenso werden auch die Querschnitte bestimmt.

Figur 4 zeigt eine ganze Anlage, ausgeführt von der Firma J. J. Rieter in Winterthur.

IV. Vergleichungen.

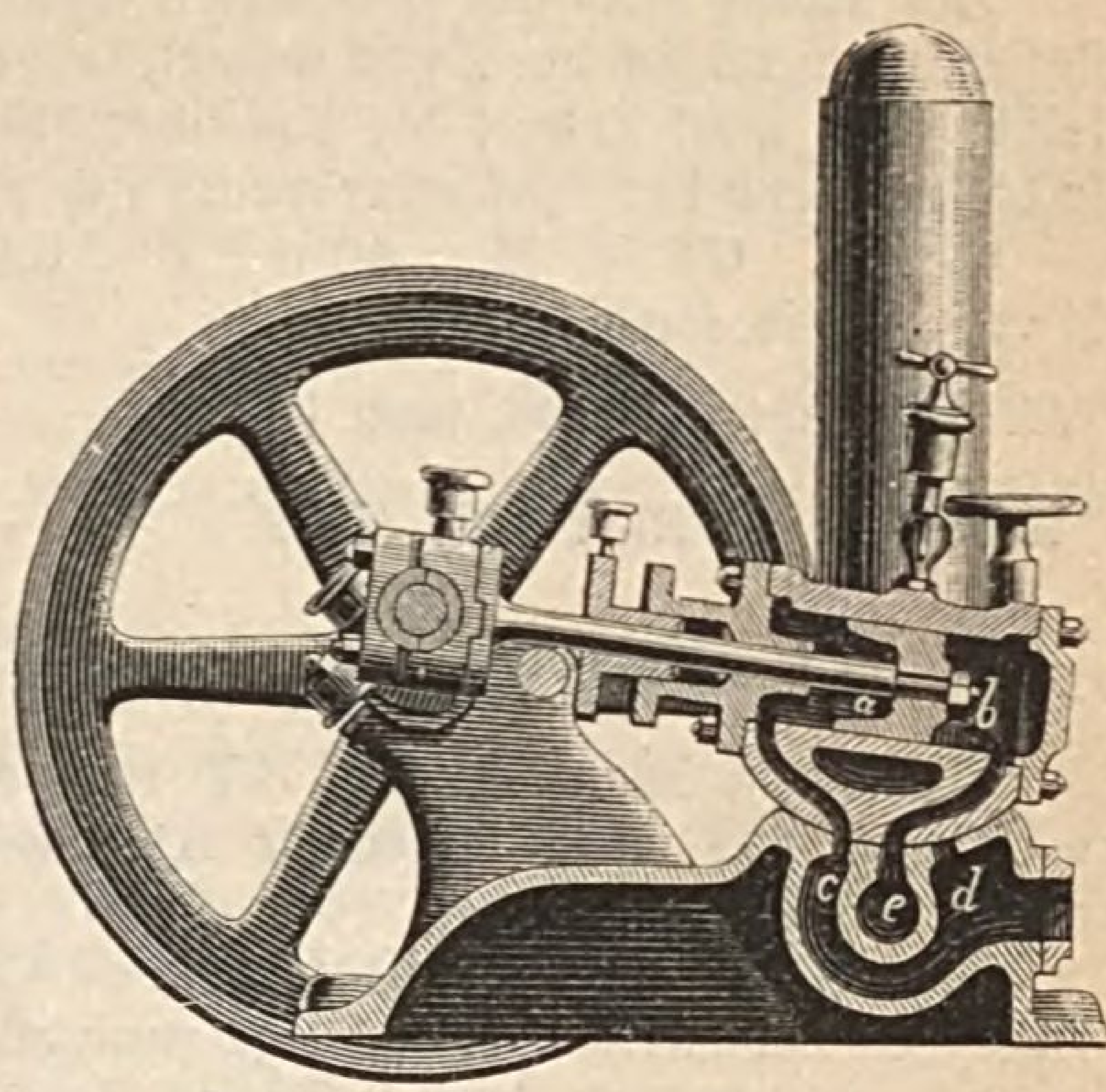
Die Wasserräder drehen sich langsam und werden daher schwer. Sie nehmen für große Wassermengen und hohe Gefälle viel Raum ein. Sie geben bei kleinen Gefällen einen niedrigen Wirkungsgrad, dagegen für größere einen sehr günstigen. Die Wasserräder haben die gute Eigenschaft, daß ihr Wirkungsgrad entweder gar nicht oder nur langsam abnimmt bei kleiner werdendem Wasserzufluß.

Die Turbinen drehen sich im allgemeinen schnell, sie erhalten daher leichte Transmissionen und bedürfen eines kleinen Raumes zur Aufstellung. Ihre Nutzleistung ist für alle Gefälle nahezu gleich gut, doch nicht höher als die der Wasserräder für Gefälle über 5 m. Dagegen nimmt ihr Wirkungsgrad mit der Wassermenge ab; er fällt also gerade dann ungünstig aus, wenn die absolute Leistung klein ist. Daher sind Wasserräder für 5 m bis 10 m Gefälle und stark wechselnden Wasserzufluß den Turbinen vorzuziehen.

Bei der Jonval-Turbine nimmt der Wirkungsgrad rasch ab mit der Wassermenge; dagegen kann das Unterwasser steigen oder sinken, ohne daß eine andere Wirkung damit verbunden ist als diejenige, welche der Aenderung des Gefälles H entspricht. Bei stets genügendem Wasserzufluß, stark wechselndem Unterwasserstand und kleinem Gefälle ist diese Turbine jedem andern Rade vorzuziehen. Girard- und Poncelet-Turbinen ändern ihren Wirkungsgrad nur langsam mit dem Wasserzufluß, sind aber bei kleinem Gefälle und wechselndem Unterwasserstand ungünstig. Dagegen empfehlen sie sich für mittlere Gefälle und besonders als Partialturbinen für höhere Gefälle wegen des größern Durchmessers, den sie erhalten, also der kleinern resultierenden Tourenzahl.

70. Kolbenmotoren.

In einem Cylinder wird ein Kolben durch den Druck des Wassers, das abwechselnd vor und hinter den Kolben gelangt, hin und her bewegt. Organe der Steuerung sind Kolben, Ventile oder Schieber. Bei dem hier abgebildeten Motor von A. Schmid werden Ein- und Austritt durch Kanäle ermöglicht, welche durch die oszillierende Bewegung des Cylinders abwechselnd mit der Zu- und Abflußröhre in Verbindung stehen. Die Abflußröhre tauche in das Unterwasser ein, so bildet die Wassersäule vom Oberwasser bis zum Unterwasser eine zusammenhängende Masse, sofern der Motor nicht höher über dem Unterwasserspiegel liegt als 10 m, in welchem Falle nämlich die Säule zusammengehalten wird durch den Luftdruck. Es sei



- H das totale Gefälle, und H′ derjenige Teil davon, welcher auf Ueberwindung der Nebenhindernisse verwendet wird,
- h_1, h_0 die vertikalen Abstände des Cylinders vom Ober- und Unterwasserspiegel,
- F der Querschnitt des Cylinders, abzüglich desjenigen der Kolbenstange,
- v, h die mittlere Kolbengeschwindigkeit und der Hub des Cylinders,
- n die Anzahl Umdrehungen der Welle per Minute.

Auf den Kolben drücken zwei Wassersäulen: auf der Arbeitsseite von der Höhe $10 + h_1$ und auf der Gegenseite von der Höhe $10 - h_0$; die Resultante hat also die Höhe $10 + h_1 - (10 - h_0) = h_1 + h_0 = H$.

Das Gewicht dieser Säule (für Metermaße) ist $= 1000\,FH$; daher die effektive Arbeit A in Pferden

$$A = \frac{1000}{75} F (H - H') v. \tag{1}$$

Der Weg des Kolbens bei einer Drehung ist 2 h, also in der Minute 2 h n; er ist aber auch 60 v. Daraus folgt

$$v = \frac{2\,h\,n}{60}. \tag{2}$$

Wenn der Motor überall dicht schließt, so ist das Volumen Wasser, das per Hub verbraucht wird, genau gleich dem Inhalt F h, der von der Kolbenfläche F längs des Weges h beschrieben wird. Der Raum zwischen dem Cylinderdeckel und dem Kolben hat daher keinen Einfluß auf den Wasserverbrauch. Es ist dies selbst dann noch richtig, wenn $h_0 = 0$ und die

Abflußröhre in die Luft ausmündet, wenn nur der Querschnitt dieser Röhre ganz mit Wasser ausgefüllt bleibt. Wird h_0 negativ, so wird $h_1 - h_0 = H$ und ein Eintauchen der Abflußröhre ist nicht nötig.

Da in der Zuflußröhre die Bewegung des Wassers abwechselnd unterbrochen wird, so ist in dieser Leitung, zunächst dem Motor, ein Windkessel anzubringen, wie ihn die Figur andeutet.

Der Motor kann auf zwei Arten reguliert werden: Man drosselt das Wasser, wodurch sich der Druck ändert, während der Wasserverbrauch gleich bleibt; oder man ändert die Cylinderfüllung, wodurch der Druck gleich bleibt, während der Wasserverbrauch sich proportional der Arbeit ändert.

Beisp. Es sei $H = 40$ m; $F = 0{,}008$ qm; $h = 0{,}2$ m; $n = 90$; $H' = 8$ m; so wird

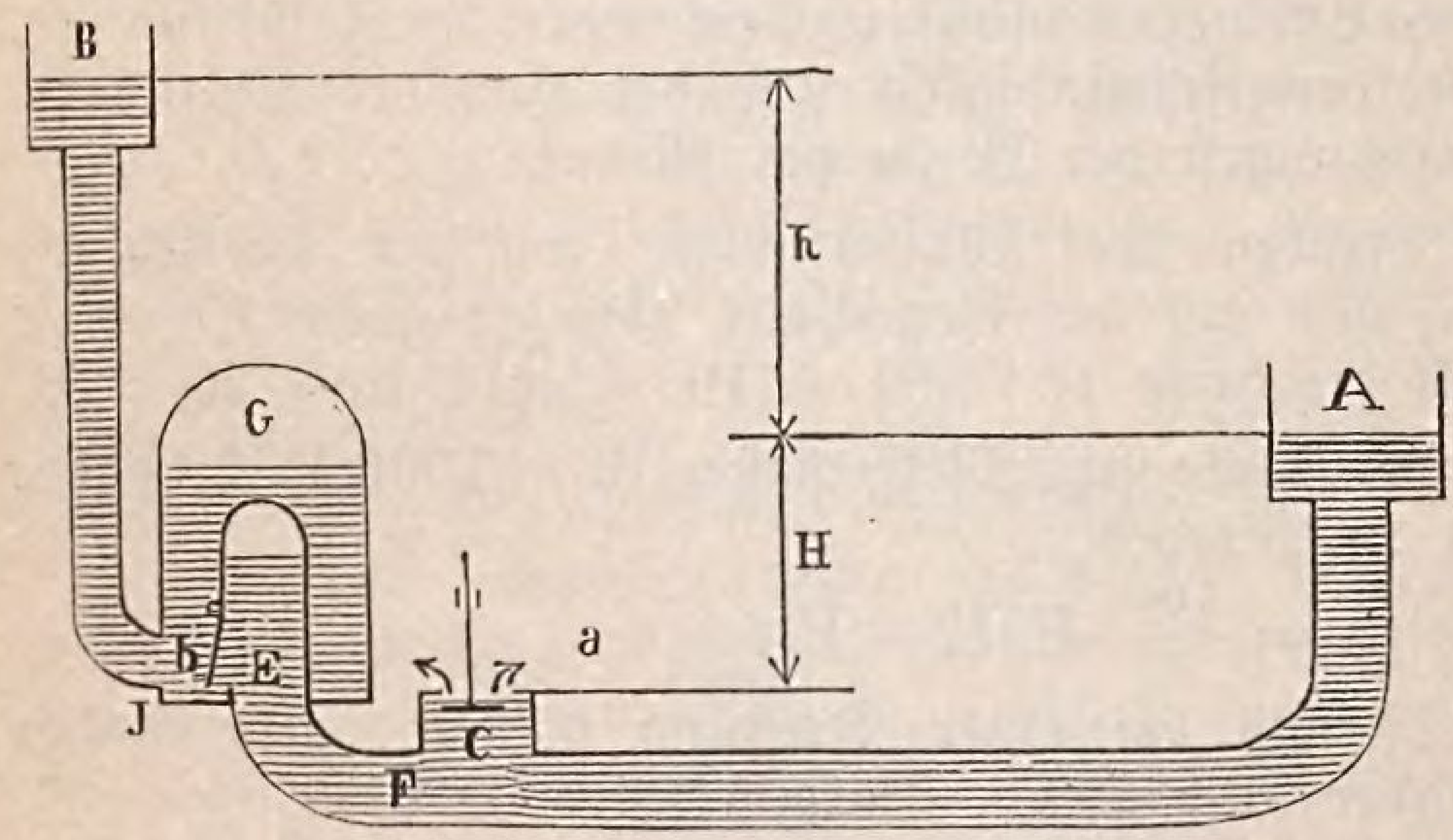
Kolbengeschwindigkeit nach (2) . . . . $v = \frac{2 \,.\, 0{,}2 \,.\, 90}{60} = 0{,}6$ m.

Arbeit in Pferden nach (1) $A = \frac{1000 \,.\, 0{,}008 \,.\, (40 - 8) \,.\, 0{,}6}{75} = 2{,}05$.

71. Vom hydraulischen Widder.

Diese von Montgolfier 1797 erfundene Einrichtung dient dazu, um Wasser aus einem Reservoir A nach einem höher gelegenen Reservoir B zu heben.

Die Wirkungsweise ist folgende. Das Wasser sinkt durch eine Röhre AF abwärts und gelangt zunächst zu einem Ventil C, das sich auf und ab bewegen kann. Dieses Ventil hat ein Gewicht, das etwas größer ist als der hydrostatische Druck, der von unten her auf dasselbe einwirkt. Daher wird, wenn nur dieser hydrostatische Druck vorhanden ist, das Ventil seine unterste Lage einnehmen, so daß über ihm, wie z. B. bei a, Wasser in die Luft abfließen kann. Wie aber das Wasser in der Leitung AF schneller und schneller sich bewegt, steigert sich der hydraulische Druck auf das Ventil; dieses wird gehoben und schließt ab. Nun bewegt sich das Wasser mit der erlangten Quantität der Bewegung über F hinaus in einen kleinen Windkessel E, in welchem die Luft



zusammengepreßt wird. Während dies geschieht, öffnet sich ein Ventil b, das Wasser ergießt sich in einen weitern Windkessel G und drückt dessen Luft zusammen. Vermöge dieses Druckes wird Wasser aus dem Windkessel nach der Steigröhre JB und dem Behälter B getrieben.

Nachdem der Stoß des Wassers, von F herkommend, gegen das Ventil b beendet ist, schließt sich dieses Ventil wieder und das Wasser

in der Leitung A F E kommt zur Ruhe. Sofort wird aber das Ventil C sinken, weil nunmehr nur der hydrostatische Druck auf dasselbe wirkt, und Wasser bei a austreten lassen. Der frühere Vorgang muß sich also wiederholen. Nun sei

H die Höhe des Wasserspiegels in A über dem Sperrventil C,
h die Höhe, um welche das Wasser gehoben wird, also der Vertikalabstand der Wasserspiegel in den Behältern A und B,
Q_0 die Wassermenge, welche das Reservoir A in der Sekunde liefert,
Q derjenige Teil von Q_0, welcher durch die Ventilöffnung C abfließt,
q der andere Teil von Q_0, welcher per Sekunde in den Behälter B gehoben wird, also $Q + q = Q_0$,
V Geschwindigkeit, welche das Wasser in der Zuleitung A F unmittelbar vor dem Schließen des Ventils erreicht,
L die Länge der Leitung A F, deren Inhalt durch seine Bewegung den Stoß bewirkt,
L′ die Länge der Steigröhre J B,
D, d die Durchmesser der Leitungen mit den Längen L und L′ und
w der Wirkungsgrad des Apparates.

1. **Wirkungsgrad.** Es wird die absolute Arbeit 1000 Q H Meter-Kilogramm verwendet, um die nützliche Arbeit 1000 q h hervorzubringen; daher der Wirkungsgrad des Apparates

$$w = \frac{qh}{QH}. \tag{1}$$

Der Apparat, mit welchem Eytelwein Versuche machte, hat folgende Dimensionen: L = 13,33 m; D = 0,0588 m; d = 0,0268 m,
Querschnitt der Ventilöffnung C . = 0,0024 qm,
Inhalt des Windkessels G . . . = 0,0088 kbm,
und lieferte folgende Resultate:

Anzahl Stöße in 1 Min.	Druckhöhe H.	Steighöhe h.	Wassermenge in der Minute 60 Q.	60 q.	Wirkungsgrad nach Versuch.	d'Aubuisson.	Morin.
	m	m	kbm	kbm			
66	3,066	8,02	0,0484	0,01540	0,900	0,97	0,84
54	3,099	9,86	0,0635	0,01742	0,873	0,92	0,80
50	3,027	11,78	0,0546	0,01192	0,850	0,87	0,77
52	2,437	9,86	0,0371	0,00767	0,847	0,85	0,76
45	2,661	11,78	0,0498	0,00952	0,845	0,84	0,74
42	2,262	11,78	0,0451	0,00682	0,787	0,78	0,71
36	1,843	11,78	0,0404	0,00478	0,754	0,71	0,65
26	1,386	9,86	0,0238	0,00225	0,672	0,67	0,61
31	1,543	11,76	0,0366	0,00320	0,667	0,65	0,59
23	1,255	11,78	0,0505	0,00295	0,548	0,56	0,48
17	0,915	9,81	0,0491	0,00218	0,473	0,51	0,37
15	0,981	11,78	0,0561	0,00165	0,352	0,45	0,23
14	0,758	11,78	0,0548	0,00100	0,284	0,32	
10	0,601	11,78	0,0446	0,00041	0,181	0,18	

Die Zahlen der zwei letzten Vertikalreihen sind abgeleitet nach folgenden empirischen Formeln

von d'Aubuisson: von Morin:

(2) $w = 1{,}42 - 0{,}28 \sqrt{\frac{h}{H}}$; (3) $w = 0{,}258 \sqrt{12{,}80 - \frac{h}{H}}$.

Die letztere ist aus einer größern Zahl von Versuchen abgeleitet als die erstere, wird daher gewöhnlich den Berechnungen zu Grunde gelegt.

Da der Wirkungsgrad nicht unter 0,60 gehen sollte, so wird nötig, daß das Verhältnis $\frac{h}{H}$ die Zahl 7,6 nicht übersteige. Bei einer zu treffenden Anlage ist nur h gegeben und es kann H, dieser Forderung entsprechend, gewählt werden.

2. **Wassermenge.** Ist nach (2) oder (3) die Größe w berechnet, so erhält man aus $Q_0 = Q + q$ und der Formel (1)

(4) $Q = \frac{h}{h + wH} Q_0$; $q = Q_0 - Q$.

3. **Länge der Leitungen.** Die Länge L' ist nur wenig größer als h, da die Steigröhre unmittelbar neben den Windkessel kommt und vertikal gerichtet wird. Diese Röhre soll oben nicht in eine Biegung auslaufen.

Es ist zweckmäßig, die Länge L groß zu nehmen. Denn in dieser Zuleitung muß sich eine Quantität MV der Bewegung (S. 66) ansammeln, durch deren Stoß das Wasser in die Steigröhre getrieben wird. Nun bezeichnet in dem Produkt MV die Größe M die Masse des stoßenden Wassers und V dessen Geschwindigkeit vor dem Stoß. Es soll aber V nicht groß sein (1 m bis 1,1 m), damit wenig Arbeit durch den Stoß verloren geht; also muß M, somit der Inhalt der Leitung AF groß sein. Eine passende Länge gibt die Formel

(5) $L = L' + 0{,}628 \frac{h}{H}$.

4. **Absperrventil.** Der Durchgang des Wassers aus der Leitung AF durch das Ventil C sollte keine Geschwindigkeitsänderungen veranlassen, weil mit solchen immer Arbeitsverluste verbunden sind. Zudem soll das Ventil möglichst nahe am Windkessel liegen.

5. **Weite der Leitungen.** Aus Versuchen hat sich ergeben, daß die Zeit zu einem Spiel des Apparates zerfällt in: einen Teil 0,575, während dessen das Ventil C ganz geöffnet ist; einen Teil 0,231, während dessen es ganz geschlossen ist, und einen Teil 0,194, der auf das Oeffnen und Schließen verwendet wird. Nimmt man die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in den Leitungen zu 0,5 m (also V = 1 m) an, so ergibt sich hieraus

(6) $D = 2{,}1 \sqrt{Q}$; $d = 3{,}32 \sqrt{q}$.

6. **Windkessel.** Der Uebergang des Wassers aus der Röhre FE in den Windkessel G soll möglichst kleine Geschwindigkeitsänderungen er-

geben, der Querschnitt des Ventils b also mit Rücksicht auf die Kontraktion so berechnet sein, daß die Geschwindigkeit unter der Ventilöffnung gleich wird der Geschwindigkeit in der Leitung AF.

Der Inhalt des Windkessels soll nicht kleiner sein als derjenige der Steigröhre.

7. **Anzahl Stöße in der Minute.** Diese Anzahl n, abgeleitet aus den 6 ersten Eytelwein'schen Versuchen, beträgt

$$n = \frac{268}{V} \cdot \frac{H}{L}. \tag{7}$$

Beisp. Es sei die Wassermenge $Q_0 = 0{,}020$ kbm und die Förderhöhe = 10 m; wie soll der Apparat angelegt werden?

Man nehme H = 2 m, so erhält man

Wirkungsgrad nach (3) . . .	$w =$	$0{,}258\sqrt{12{,}80 - 5}$	$= 0{,}72$,
daher Wassermenge nach (4) .	$Q =$	$\frac{10 \cdot 0{,}020}{10 + 0{,}72 \cdot 2}$	$= 0{,}0175$ kbm,
und Wassermenge	$q =$	$0{,}020 - 0{,}0175$	$= 0{,}0025$ „
Länge der Steigröhre, angenomm.	$L' =$	$h + 0{,}5$	$= 10{,}50$ m,
Länge der Zuleitung nach (5)	$L =$	$10{,}5 + 0{,}628 \cdot 5$	$= 13{,}60$ „
Durchmesser der Zuleitung (6)	$D =$	$2{,}1\sqrt{0{,}0175}$	$= 0{,}278$ „
Durchmesser der Steigröhre (6)	$d =$	$3{,}32\sqrt{0{,}0025}$	$= 0{,}166$ „
Inhalt der Steigröhre . .	$\frac{d^2\pi}{4} L' =$	$0{,}02164 \cdot 10{,}5$	$= 0{,}227$ kbm,
Inhalt des Windkessels, angenommen . .		$1{,}2 \cdot 0{,}227$	$= 0{,}272$ „
Anzahl Stöße (für V = 1 m) . . .	$n =$	$\frac{268}{1} \cdot \frac{2}{13{,}60}$	$= 39{,}4$

72. Von den Wasserpumpen.

I. Allgemeine Regeln.

Man unterscheidet Kolbenpumpen, Rotations- und Centrifugalpumpen 2c. Die Pumpen werden im allgemeinen zwischen dem Unter- und Oberwasserspiegel aufgestellt. Der vertikale Abstand von der Mitte der Pumpe bis zum Unterwasserspiegel heißt Saughöhe, bis zum Oberwasserspiegel Druckhöhe und die Summe beider Förderhöhe. Es seien

- h_0, h_1 die Saug- und Druckhöhe,
- $H = h_0 + h_1$ die ganze Förderhöhe,
- H_1 die Höhe der Wassersäule, welche zur Ueberwindung sämtlicher Nebenhindernisse der Pumpe nötig ist,
- a die Höhe der Wassersäule, welche den Luftdruck mißt,
- Q die Wassermenge, welche per Sekunde gehoben wird,
- Q_1 die beim Betrieb per Sekunde entstehenden Wasserverluste, also $Q + Q_1$ die gesamte Wassermenge, welche die Pumpe ohne Verluste liefern würde.

1. **Saughöhe.** Der Druck der äußern Luft wird an der Meeresfläche gemessen durch eine Wassersäule von 10,33 m Höhe. Nehmen wir dafür $a = 10$ m an. Könnte daher der Raum zwischen der Pumpe und dem Wasser im Saugrohr vollkommen luftleer gemacht werden, so würde das Wasser im Saugrohr 10 m hoch steigen; es könnte also auch die Pumpe ebenso hoch über dem Unterwasserspiegel aufgestellt werden. Ein vollkommen luftleerer Raum kann nun aber nicht erzeugt werden, weil unter schwachem Druck sich die Luft, welche im Wasser enthalten ist, ausscheidet und Dämpfe sich bilden. Besitzen diese Luft und diese Dämpfe eine Spannung z. B. von 0,2 Atmosphären, so entspricht dieser Spannung eine Wassersäulenhöhe von $0,2 \cdot 10 = 2$ m. Steht die Pumpe z. B. 7 m über dem Unterwasserspiegel, so ist der Druck, womit das Wasser in der Saugröhre aufwärts getrieben wird, dargestellt durch eine Wassersäule von der Höhe

$$a - h_0 = 10 - 7 = 3 \text{ m}.$$

Daher tritt das Wasser in die Pumpe mit einem Ueberdruck von $3 - 2 = 1$ m. Je kleiner dieser Ueberdruck, um so langsamer bewegt sich das Wasser in der Saugröhre nach der Pumpe, um so langsamer soll diese arbeiten.

2. **Druck des Wassers in der Pumpe.** Wenn die Organe der Pumpe mit der Saug- und Druckröhre in Verbindung stehen, wie dies der Fall ist bei den Rotations- und Centrifugalpumpen, sowie auch mit den Kolben der Saugpumpen bei geöffnetem Ventil, so ist der Druck in der Pumpe, gemessen durch Wassersäulenhöhen:

vom Saugrohr her . . . . $= a - h_0$,
vom Druckrohr her . . . . $= a + h_1$,
daher die Resultante $a + h_1 - (a - h_0) = h_0 + h_1$.

Auf den Organen der Pumpe lastet also ein Druck gleich der ganzen Förderhöhe.

3. **Querschnitt der Röhren.** Enge Saug- und Druckröhren bewirken, daß sich das Wasser mit großer *Geschwindigkeit* durch sie bewegen muß, wodurch bei längern Leitungen große Reibungswiderstände entstehen. Die Geschwindigkeit des Wassers in diesen Röhren kann betragen:

für lange Leitungen . . 0,5 bis 1 m,
für kurze Leitungen . . 0,5 „ 2 „

Dividiert man die Wassermenge $Q + Q_1$, durch die Geschwindigkeit, welche man dem Wasser in den Röhren zu geben wünscht, so erhält man den Querschnitt der Röhren.

4. **Arbeit zum Heben des Wassers.** Die Arbeit der Pumpe per Sekunde entspricht der Wassermenge $Q + Q_1$, mit einem Gewicht $= 1000 \times (Q + Q_1)$. Dieses Gewicht ist auf die Höhe $H + H_1$ zu heben; daher

$$(1) \qquad \text{Bruttoarbeit} = 1000\,(Q + Q_1)\,(H + H_1).$$

Nimmt man $Q_1 = 0$ und $H_1 = 0$ an, so erhält man daraus die

$$\text{Nettoarbeit} = 1000\,Q\,H.$$

Daher der Wirkungsgrad der Pumpe

$$(2) \qquad \frac{Q}{Q + Q_1} \cdot \frac{H}{H + H_1}.$$

Der erste dieser Brüche ist der volumetrische, der letztere der dynamische Wirkungsgrad. Der effektive Wirkungsgrad ist also das Produkt aus diesen zwei partiellen Wirkungsgraden.

Beisp. Wenn $Q_1 = 0{,}15\,Q$, so wird der volumetrische Wirkungsgrad $1 : 1{,}15 = 0{,}87$. Und wenn $H_1 = 0{,}3\,H$, so wird der dynamische Wirkungsgrad $1 : 1{,}3 = 0{,}77$. Daher der effektive Wirkungsgrad $0{,}87 \,.\, 0{,}77 = 0{,}67$.

5. **Widerstände der Pumpe.** Die wesentlichen sind:

a) Reibung der Pumpenteile. Der Betrag derselben ist für jede Art von Pumpe besonders abzuschätzen. Ueber Kolbenreibung S. 92.

b) Reibung des Wassers in den Röhren. Der Gefällsverlust, welchen dieser Widerstand verursacht, ist annähernd (S. 254)

$$(3) \qquad 0{,}0014 \frac{v^2 L}{d H}$$

von der Nettoarbeit, wobei L die Länge der Saug- und Druckröhren, d den innern Durchmesser dieser Röhren und v die Geschwindigkeit des Wassers in diesen Röhren bedeuten.

Beisp. Die Leitung habe 72 m Länge, 0,08 m Durchmesser und das Wasser 1 m Geschwindigkeit. Soll dasselbe auf eine Höhe von 30 m gehoben werden, so ist der Arbeitsverlust durch den Röhrenwiderstand

$$0{,}0014 \cdot \frac{1 \,.\, 72}{0{,}08 \,.\, 30} = 0{,}042,$$

also 4,2 Prozent von der Nettoarbeit.

Wäre das Wasser nur 3 m hoch zu heben, so betrüge der Arbeitsverlust 42 Prozent von der nützlichen Arbeit; wenn die Röhrenleitung vertikal wäre, so daß $H = L = 30$ m, so wäre der Arbeitsverlust nur 1,75 Prozent der nützlichen Arbeit.

c) Kraftverluste bei Krümmungen und Querschnittsänderungen. Aendert der Wasserstrahl in der Leitung plötzlich seine Richtung, wird er beim Durchgang durch die Pumpe genötigt in andere Formen und Querschnitte überzugehen, so entstehen immer Verluste an Gefälle, welche nach den Regeln auf S. 260 berechnet werden können. Diese Verluste fallen klein aus, wenn das Wasser langsam die betreffenden Stellen passiert.

II. Gewöhnliche Kolbenpumpen.

1. Wenn der Kolben einer Pumpe während seines Hin- und Herganges zugleich Wasser liefert, so ist die Pumpe doppeltwirkend; wenn sie nur Wasser liefert während des Hin- oder während des Herganges allein, so ist sie einfachwirkend. Die doppeltwirkende Pumpe

kann als eine Zusammenstellung zweier einfachwirkender Pumpen angesehen werden. Zu einer solchen wird der Schmid'sche Motor S. 299, wenn sich das Schwungrad nach entgegengesetzter Seite dreht.

Man unterscheidet Saug- und Druckpumpen. Bei den erstern (Fig. 2) ist der Kolben mit einer Ventilöffnung versehen, so daß das Wasser aus dem Pumpencylinder durch diese Oeffnung in die Steigröhre gelangt. Bei der Druckpumpe (Fig. 1) ist der Kolben ohne Ventilöffnung; derselbe saugt das Wasser durch eine Röhre A in den Cylinder und drückt dasselbe in die Steigröhre B. Hierbei nennt man a das Saug-, b das Druckventil. Es sei

h, F Hub und Querschnitt des Kolbens,
v die mittlere Kolbengeschwindigkeit,
n die Anzahl Kolbenspiele per Minute und
s die Höhe des schädlichen Raumes.

2. **Druck auf den Kolben.** Bei einer einfachwirkenden Pumpe ist der Druck auf den Kolben, dargestellt als Höhe einer Wassersäule:

Saugpumpe. Bewegung aufwärts: $a + h_1 - (a - h_0) = H$.
Bewegung abwärts: . . . . $= 0$.
Druckpumpe. Bewegung aufwärts: . . $a - (a - h_0) = h_0$.
Bewegung abwärts: . . $a + h_1 - a = h_1$.

Fig. 1.

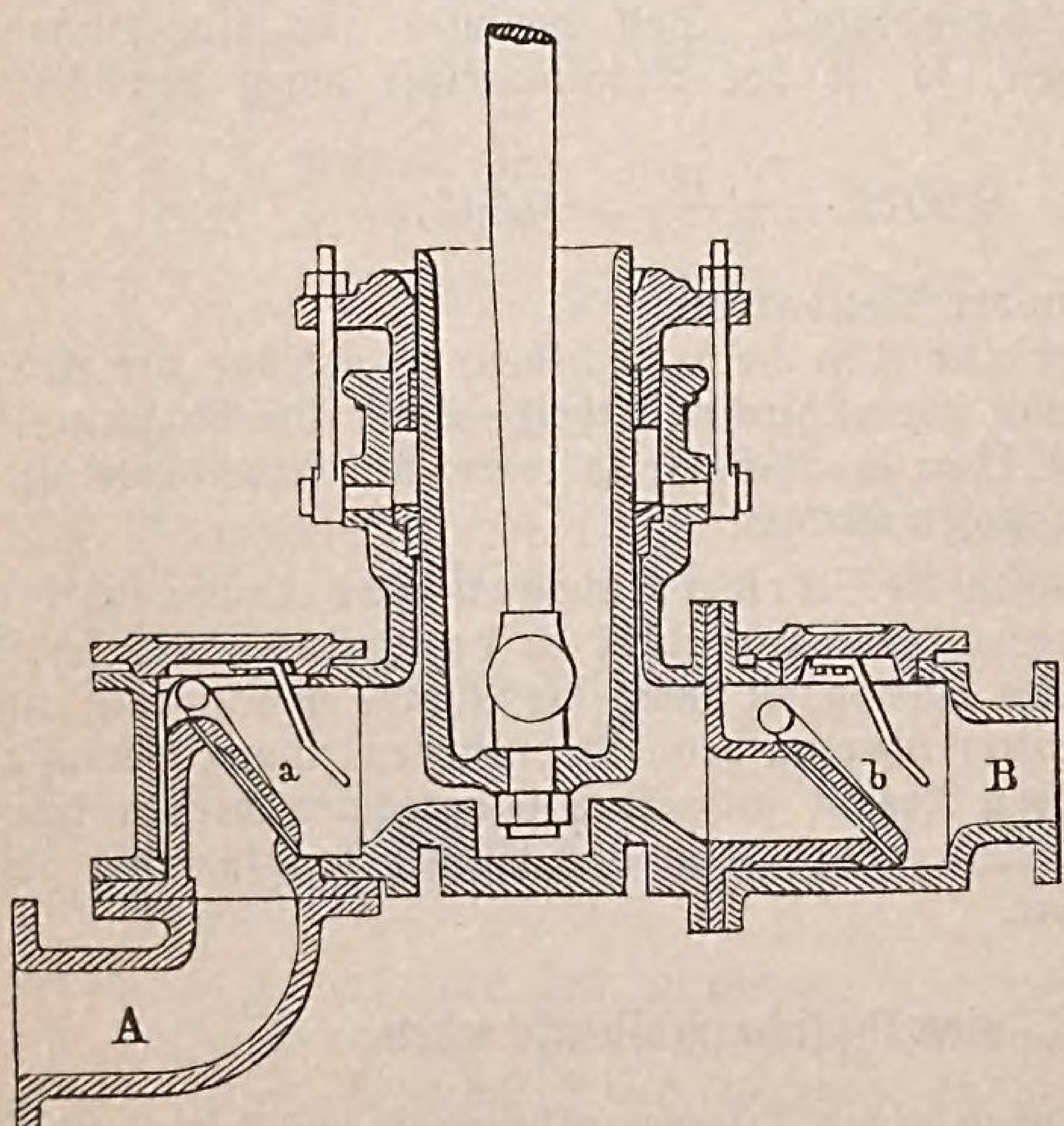
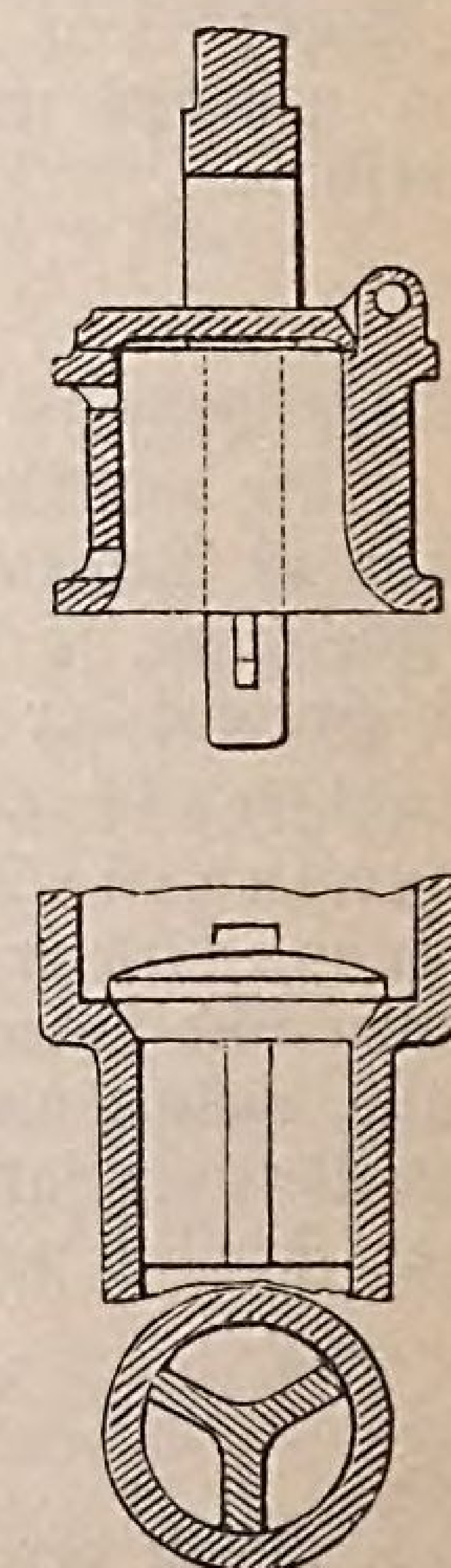


Fig. 2.



Bei der ersten Pumpe ist daher der Druck abwechselnd H und Null, ein Schwungrad also sehr notwendig. Bei der zweiten liegen

die Werte beim Hin- und Hergang einander näher, die Bewegung gestaltet sich also gleichförmiger. Wenn $h_0 = h_1$, so bliebe der Druck konstant. Ein Schwungrad wäre dann nur nötig, um der Kurbel über die toten Punkte wegzuhelfen.

Bei einer doppeltwirkenden Pumpe ist der Druck auf den Kolben beim Hin- und Hergang derselbe; daher der Gang der Pumpe auch bei einem Schwungrade von mäßiger Größe ziemlich regelmäßig.

3. **Schädlicher Raum.** Der Kolben sei am Ende des Hubes, zunächst dem Saugventil, so liegt zwischen ihm, dem benachbarten Cylinderdeckel und den beiden Ventilen ein Raum, den man den schädlichen nennt. Man denke sich denselben in einen Cylinder verwandelt, dessen Querschnitt gleich ist dem Kolbenquerschnitt, so ist s die Höhe dieses Cylinders.

Es sei nun der schädliche Raum mit Luft vom Drucke a angefüllt und der Kolben durchlaufe den Weg h, so dehnt sich die Luft aus im Verhältnis von $s : s + h$. Dabei sinke der Luftdruck von a auf x, so wird nach dem Mariotte'schen Gesetze (S. 322)

$$x = a \frac{s}{s + h}.$$

Dieser Druck lastet auf dem Saugventil; es kann sich nur heben, wenn, abgesehen vom Gewicht des Ventiles, der Wasserdruck $a - h_0$ von der Saugröhre her größer ist als x, d. h. wenn

$$a - h_0 > a \frac{s}{s + h}.$$

Hieraus folgt als zulässige Höhe der Saugröhre

$$h_0 < a \frac{h}{s + h}. \tag{4}$$

Beisp. Wenn $s = 0{,}6\,h$ und $a = 10$ m, so wird

$$a \frac{h}{s + h} = \frac{10}{1{,}6} = 6{,}25 \text{ m}.$$

Mithin muß die Höhe dieser Pumpe über dem Unterwasserspiegel kleiner als 6,25 m sein.

Am untern Ende der Saugröhre bringt man häufig ein Ventil an, welches die Entleerung der Saugröhre verhindert. Ist nun die Pumpe erstellt und füllt man das Saugrohr und den Cylinder von oben herab mit Wasser, so kann die Pumpe in Betrieb gebracht werden, ohne daß die Bedingung (4) erfüllt wird, wenn nur $h_0 < a$ ist.

4. **Größte zulässige Kolbengeschwindigkeit.** Das Wasser in der Saugröhre soll der Bewegung des Kolbens so folgen, daß es sich nie von ihm trennt. Bewegt sich das Wasser der Saugröhre langsam, der Kolben aber schnell, so kann es vorkommen, daß der Kolben seinen Rücklauf beginnt, bevor der Cylinder mit Wasser angefüllt ist. In diesem Falle entsteht, indem sich Wasser und Kolben in entgegengesetzter Richtung begegnen, ein Stoß und es liefert die Pumpe weniger Wasser als bei gänzlicher Anfüllung des Cylinders. Dieser Fall tritt ein,

wenn die Saugröhre lang ist und wenn die Pumpe hoch über dem Unterwasser steht.

Der Kolben hat annähernd in der Mitte seines Hubes die größte Geschwindigkeit V; also muß auch das Wasser in der Saugröhre diese Geschwindigkeit erreichen und zwar während der Kolben nach der Mitte des Hubes gelangt. Nun wirken auf das Wasser in der Saugröhre zwei Kräfte: der Druck $a - h_0$, von der Atmosphäre herrührend, und das Gewicht des Wassers, dargestellt durch die Länge z der Saugröhre. Diesen Kräften sollen die Beschleunigungen g′ und $g = 9{,}81$ m entsprechen, so wird ohne Rücksicht auf einen Saug-Windkessel (S. 64)

$$(5) \qquad a - h_0 : z = g' : g.$$

Die Bewegung durch den Druck $a - h_0$ wird gleichförmig beschleunigt in der Weise, daß beim Durchlaufen des Weges 0,5 h mit der Beschleunigung g′ die Geschwindigkeit V erreicht wird. Daher (S. 62)

$$(6) \qquad V^2 = 2g' \,.\, 0{,}5\, h.$$

Setzt man die beiden Werte von g′ aus (5) und (6) einander gleich, so erhält man den größten Wert, den h_0 annehmen kann:

$$(7) \qquad h_0 = a - \frac{z}{h} \cdot \frac{V^2}{g}.$$

Dabei ist zu nehmen $V = \frac{\pi}{2} v = 1{,}57\, v$.

Beisp. Es sei $z = 45$ m; $h = 0{,}4$ m; $V = 0{,}7$ m; $a = 10$ m, so wird

$$h_0 = 10 - 5{,}62 = 4{,}38 \text{ m}.$$

Daher darf die Pumpe höchstens 4,38 m hoch über dem Unterwasserspiegel aufgestellt werden.

Nimmt man $V = 1$ m an, so erhält man in gleicher Weise $h_0 = 10 - 11{,}47 = -1{,}47$ m. Somit muß die Pumpe in diesem Fall um 1,47 m ins Unterwasser eintauchen, damit das Wasser bei seinem Eintritt in die Pumpe dem Kolben folgen kann, oder es muß ein Windkessel in die Saugröhre, zunächst der Pumpe, eingesetzt werden. Denn in diesem Fall bezeichnet z die Entfernung des Windkessels bis zur Pumpe, also einen ganz kleinen Betrag, so daß alsdann h_0 nur wenig unter 10 m liegt.

5. **Gewöhnliche Kolbengeschwindigkeit.** Es ist 2h der Weg des Kolbens bei einem Hin- und Hergang und 2hn der Weg des Kolbens bei n solchen Gängen oder der Weg in der Minute; dieser ist aber auch 60v; daher

$$(8) \qquad 60\, v = 2\, h\, n.$$

Gewöhnlich wird die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens:

bei kleinen Pumpen . .	0,3	bis	0,4 m
„ mittleren „ . .	0,6	„	0,9 „
„ großen „ . .	1,2	„	1,6 „

In den Leitungen soll die Geschwindigkeit 1 m nicht übersteigen.

6. **Wassermenge.** Die Wassermenge, welche eine doppeltwirkende Pumpe per Sekunde liefert, ist theoretisch dem Volumen gleich, welches der Kolben in dieser Zeit durchläuft, und wird daher erhalten, wenn man die Kolbenfläche mit der Geschwindigkeit des Kolbens multipliziert. Die wirkliche Wassermenge ist jedoch um 4 bis 20 Prozent kleiner als die theoretische, hauptsächlich weil die Ventile, einmal geöffnet, sich nicht plötzlich schließen können, also einen Teil des über ihnen liegenden Wassers zurücktreten lassen. Da F v das theoret. Volumen, so wird

$$(9) \qquad Q + Q_1 = F\,v.$$

In gewöhnlichen Fällen ist $Q_1 = 0{,}15\ Q$. Dadurch geht (9) über in

$$Q = 0{,}87\ F\,v.$$

Die einfachwirkenden Pumpen liefern bei gleichem Durchmesser und gleicher Kolbengeschwindigkeit nur halb so viel Wasser wie die doppeltwirkenden.

Beisp. Wie viel Wasser liefert eine gute doppeltwirkende Pumpe, deren Stiefeldurchmesser 1,2 dm und deren Kolbengeschwindigkeit 3 dm beträgt?

Kolbenfläche . . . . $(1{,}2)^2 \cdot \frac{3{,}14}{4} = 1{,}131$ qdm.
Volumen, vom Kolben per Sek. beschrieben $1{,}131 \cdot 3 = 3{,}393$ Liter.
Effektive Wassermenge (cirka 87 Prozent) $0{,}87 \cdot 3{,}393 = 2{,}952$ „

7. **Querschnitt des Cylinders.** Die Kolbenfläche doppeltwirkender Pumpen erhält man aus (9), wenn man das Wasservolumen per Sekunde mit der Kolbengeschwindigkeit dividiert.

Für einfachwirkende Pumpen ist die Kolbenfläche doppelt so groß zu nehmen. In beiden Fällen sind die Wasserverluste mitzurechnen.

Beisp. Eine doppeltwirkende Pumpe habe 6 Liter Wasser in der Sekunde zu liefern bei einer Kolbengeschwindigkeit von 0,8 m. Wie groß wird der Durchmesser des Kolbens, wenn 20 Prozent Wasserverlust vorausgesetzt werden?

Es ist nach (9) die Wassermenge . . . $6 + 0{,}2 \cdot 6 = 7{,}2$ Liter.
Somit Querschnitt des Kolbens . . . . . $7{,}2 : 8 = 0{,}9$ qdm.
Durchmesser des Kolbens (s. Kreistabelle) . . . . $= 1{,}07$ dm.
Wäre die Pumpe einfachwirkend, so müßte ihr Querschnitt 1,8 qdm, also ihr Durchmesser sein . . . $= 1{,}52$ dm.

8. **Hub.** Da das häufige Oeffnen und Schließen der Ventile und die damit verbundenen stoßenden Wirkungen des Wassers mit Verlust an Arbeit verbunden sind, so soll die Hubhöhe möglichst groß sein. Bei Handpumpen beträgt sie gewöhnlich 0,15 bis 0,30 m.

9. **Ventil.** Bei zu schmalem Ventilsitz nützen sich die Auflagflächen rasch ab; bei zu breitem Sitz fehlt auf die Dauer die Dichtheit.

Beim Durchgang des Wassers durch die Pumpe sind die vorkommenden Querschnitte so zu berechnen, daß die Bewegung möglichst gleichförmig, die Geschwindigkeit jedenfalls nicht zu groß wird. Das

gilt besonders von den Durchlaßöffnungen bei Ventilen: z. B. jener zwischen dem geöffneten Ventil und seinem Sitz und zwischen dem Rand des Ventils und der Wandung des Ventilkastens. Doch soll das Ventil sich nicht zu weit heben, weil es sonst zu viel Zeit braucht zum Schließen, also auch einen großen Wasserverlust herbeiführt. Daher werden die Ventile bei großen Pumpen durch Federn zugedrückt.

10. **Windkessel.** Um eine möglichst gleichförmige Bewegung des Wassers in der Steigröhre zu erreichen, bringt man in dieser Röhre, zunächst der Pumpe, einen Windkessel (Druckwindkessel) an, dessen Rauminhalt 6—12mal größer ist als $F v$. Der Kessel ist mit einem Hahn zu versehen, um Luft in denselben gelangen zu lassen. Oefters versieht man ihn auch mit einem Manometer und Wasserstandszeiger. Bei größern Pumpen wird auch in der Saugröhre ein Windkessel aufgestellt, dessen Volumen 3—5mal größer ist als $F v$.

11. **Wasserschlag.** Bei einer Druckpumpe gehe das Steigrohr aus einem ansteigenden Teil in einen waagrechten über. Wird nun die Pumpe ohne Druckwindkessel gedacht und mittelst einer Kurbel getrieben, so wird das Wasser in der Röhre während der einen Hälfte des Hubes beschleunigt, während der andern verzögert. Beim Uebergang durch den toten Punkt kann sich nun das Wasser im waagrechten Teil der Röhre von dem im ansteigenden trennen, allein nur auf einen Augenblick, weil der äußere Luftdruck sofort den waagrechten Teil verzögert, die Pumpe den steigenden beschleunigt. Daher wird das Zusammentreffen mit einem Schlage begleitet sein.

III. Feuerspritzen.

Die Feuerspritzen bestehen aus zwei einfachwirkenden Druckpumpen, deren Kolben eine abwechselnde Bewegung haben.

1. **Steighöhe.** Könnte der Wasserstrahl im leeren Raum emporsteigen, so würde er eine Höhe $H = \frac{v_1^2}{2 \,.\, 9{,}81}$ erreichen, wo v_1 die Geschwindigkeit bedeutet, mit welcher der Strahl das Mundstück verläßt. Wegen des Luftwiderstandes ist die wirkliche Steighöhe jedoch geringer als die theoretische. Der Luftwiderstand macht sich aber bei diesem flüssigen Körper noch in anderer Weise geltend als bei einem festen in die Höhe geworfenen Körper: er löst nach und nach den Wasserstrahl auf, so daß derselbe bei zunehmender Höhe der Luft eine immer größere Fläche darbietet.

Ist H die theoretische Steighöhe, so wird die wirkliche Steighöhe h annähernd:

$$h = H(1 - 0{,}007\,H). \qquad (10)$$

Für H = 5	10	15	20	25	30	40 m
wird h = 4,8	9,3	13,4	17,2	20,6	23,7	28,8 m.

Eine größere Spritze soll 24 m bis 28 m, eine kleinere 15 m bis 18 m effektive Steighöhe haben.

2. **Wasserverluste.** Die Größe Q_1 wird sehr klein, z. B. 0,05 Q. In einzelnen Fällen ergab sich sogar, daß nicht nur $Q_1 = 0$, sondern sogar $Q > F v$ wurde.

3. **Widerstände.** Ohne Anwendung von Schläuchen kann $H_1 = 0{,}18 H$ angenommen werden. Bei Anwendung von Schläuchen wird der Röhrenwiderstand groß. Man hat zur Berechnung desselben den Koefficienten 0,0014 in Formel (3) zu ersetzen durch 0,003.

4. **Arbeit zum Betrieb einer Feuerspritze.** Es kann für mittlere Verhältnisse angenommen werden

Wasserverlust . . . . $Q_1 = 0{,}05\ Q$,
Widerstand der Pumpe . . . . $= 0{,}18\ H$,
Widerstand der Schläuche, angenommen . . . . . $= 0{,}12\ H$,

daher nach den Gleichungen (1) und (2)

(11) Bruttoarbeit $= 1{,}365 \,.\, 1000\ Q H$ mkg.

$$\text{Wirkungsgrad} = \frac{1}{1{,}365} = 0{,}733.$$

5. **Anzahl und Leistung der Mannschaft.** An einer großen Spritze arbeiten gewöhnlich 20 bis 28, an einer kleinern 8 bis 12 Mann, welche regelmäßig nach kurzen Zeiträumen abwechseln. Dieser Abwechselung wegen ist die Leistung eines Mannes sehr groß und kann zu 16 mkg per Sekunde angenommen werden.

Da die Geschwindigkeit, mit welcher sich der Angriffspunkt des Druckbaumes auf und ab bewegt, 1,2 m bis 1,4 m beträgt, so drückt ein Mann im Mittel bezw. mit 13,3 bis 11,4 kg auf diesen Baum.

Bezeichnet N die Anzahl Mannschaft an einer Spritze, so ist 16 N ihre Arbeit per Sekunde. Daher für obige Bruttoarbeit

(12) $$16\ N = 1{,}365 \,.\, 1000\ Q H.$$

6. **Durchmesser der Cylinder.** Da statt der beiden einfachwirkenden Pumpen eine einzige doppeltwirkende von gleichem Durchmesser berechnet werden kann, so erhält man den Querschnitt eines Cylinders, wenn man die Wassermenge per Sekunde durch die Kolbengeschwindigkeit dividiert. Für $Q_1 = 0{,}05\ Q$ wird daher Formel (9)

(13) $$F = 1{,}05 \frac{Q}{v}.$$

7. **Hubhöhe.** Der Hub des Druckbaumes soll nicht größer sein als 1,5 m. Da nun derjenige des Kolbens gewöhnlich 5mal kleiner ist, so beträgt der Kolbenhub für größere Pumpen 0,2 . 1,5 = 0,30 m. Für kleinere Pumpen soll ein Kolbenhub etwa 0,24 m betragen.

8. **Geschwindigkeit des Wassers aus dem Mundstück.** Diese Geschwindigkeit v muß der theoretischen Steighöhe H entsprechen und somit sein $= \sqrt{2 \,.\, 9{,}81\ H}$.

9. **Durchmesser des Mundstückes.** Der theoretische Querschnitt des Mundstückes wird gefunden, wenn man die Wassermenge durch die Geschwindigkeit dividiert. Der wirkliche Querschnitt ist der Kontraktion wegen etwa 1,05mal größer zu nehmen.

10. **Windkessel.** Man erhält einen um so gleichförmigern Wasserstrahl, je größer der Inhalt des Windkessels ist. Gewöhnlich wird derselbe dem zehnfachen Kubikinhalte eines Pumpencylinders gleichgemacht. Die Pressung im Windkessel in Atmosphären ist wenigstens gleich der theoretischen Steighöhe H, dividiert durch die Höhe 10,33 m einer Wassersäule, welche den Druck einer Atmosphäre angibt, also wenigstens gleich 2 bis 4 Atmosphären. Bei einer Spritze mit langen Schläuchen kann diese Pressung 2- bis 3mal größer werden.

11. **Dimensionen dreier Feuerspritzen**, nach den vorstehenden Regeln berechnet:

Benennungen.	Große Feuerspritze.	Mittlere Feuerspritze.	Kleine Feuerspritze.
Anzahl Mannschaft	26	16	8
Effektive Steighöhe	25	20	15 m
Theoretische Steighöhe	32,3	24,1	17,1 „
Wassermenge per Sekunde . .	10	7	5 kg
Querschnitt eines Cylinders . .	315	245	175 qcm
Cylinderquerschnitt per Mann .	12,1	15,3	21,9 „
Durchmesser der Cylinder . . .	20	17,7	15 cm
Geschwindigkeit aus dem Mundstück	25,2	21,7	18,3 m
Durchmesser des Mundstückes . .	2,16	2,06	19,1 cm

IV. Rotationspumpen.

1. **Pumpe mit einer Achse.** Diese Pumpe, Fig. 3, nach Samain, besteht aus einem Rade, das etwas excentrisch in einem cylindrischen Gehäuse liegt. Das Rad hat vier Flügel, welche durch Federn von innen nach außen gedrückt werden und sich daher in jeder Lage an den cylindrischen Mantel des Gehäuses anschließen. Das Wasser tritt aus der Saugröhre bei A in das Rad, füllt die Räume B, C, welche während der Drehung ihr Wasser an das Steigrohr D abgeben. Bei jeder Umdrehung füllen sich vier solcher Räume B. Daher ist die Wassermenge, welche per Drehung erhalten wird, gleich dem Vierfachen des Raumes B. Wegen ungenügenden Schlusses gehen indessen 10 bis 20 Prozent Wasser verloren. Die Reibung der Flügel ist groß, daher ihre Abnützung eine rasche, dies namentlich dann, wenn das Wasser grobe Unreinigkeiten mitführt.

2. **Pumpe mit zwei Achsen.** Diese Pumpe, Fig. 4, nach Greindl, besteht aus zwei Cylindern mit parallelen Achsen, die sich längs einer Kante an einander schließen. Der eine Cylinder hat zwei Hervorragungen, diametral einander gegenüber liegend, der andere eine Vertiefung, in welche die Hervorragung paßt. Daher macht der letztere zweimal mehr Touren als der erstere. Beide Cylinder liegen in einem Gehäuse, das die Cylinder teilweise dicht umschließt. Das Wasser tritt,

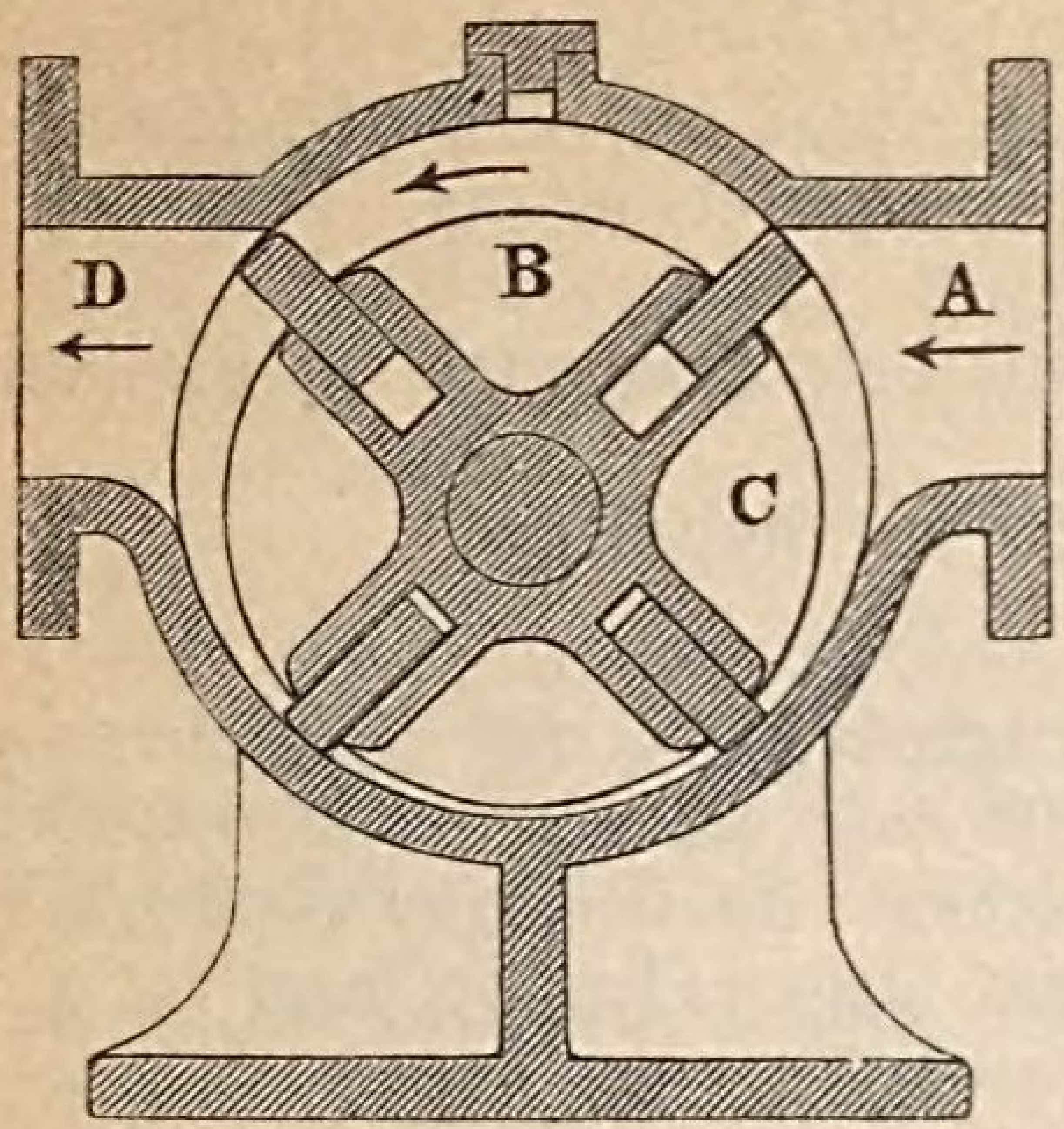


Fig. 3.

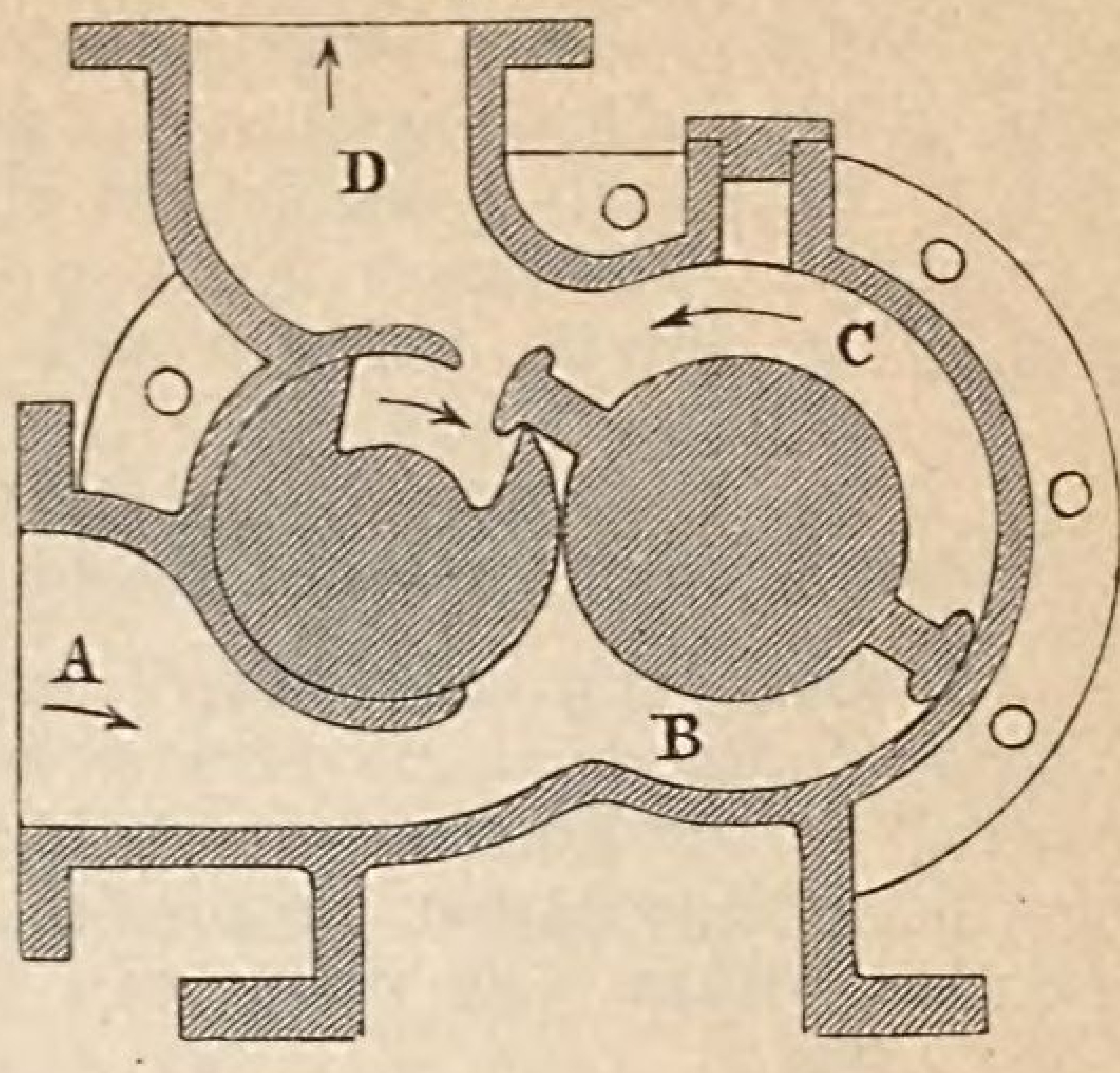
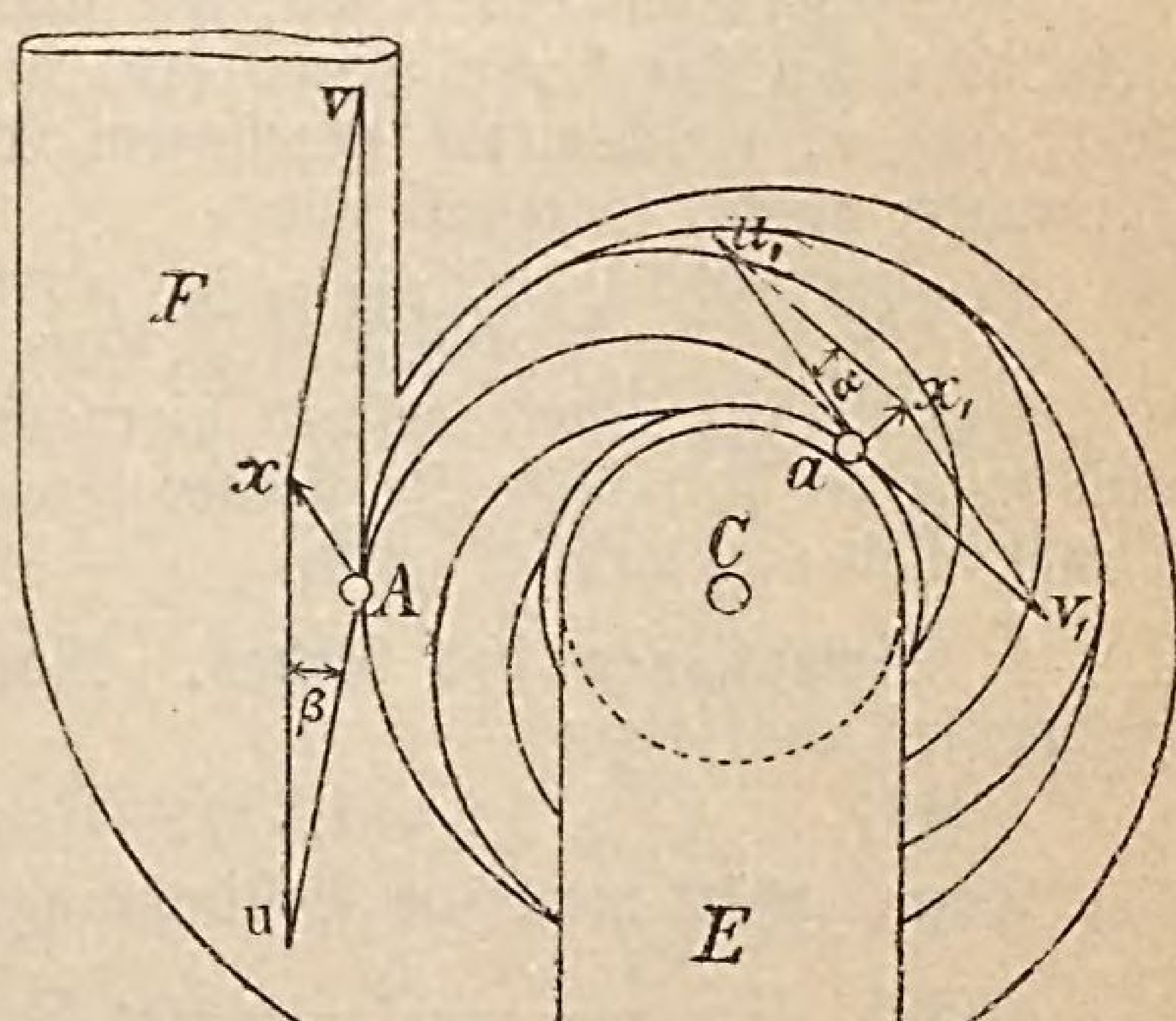


Fig. 4.

aus der Saugröhre kommend, bei A ein, gelangt in den Raum B, kommt nach einer halben Drehung nach C, um in das Steigrohr D geschoben zu werden. Bei jeder Drehung wird eine Wassermenge gefördert gleich dem doppelten Raum C, der zwischen den beiden Hervorragungen einerseits und dem Cylinder und Gehäuse anderseits liegt.

3. **Anzahl Touren der Pumpen.** Man gibt dem Wasser im Gehäuse eine mittlere Geschwindigkeit von cirka 1 m, woraus sich die Anzahl Drehungen dieser Pumpen per Minute ergibt.

V. Centrifugalpumpen.



In einem Gehäuse befindet sich ein Rad mit 6 bis 8 gekrümmten Schaufeln. Dreht sich das Rad, so entsteht eine Luftverdünnung im Gehäuse. Dadurch steigt das Wasser in der Saugröhre E und tritt von der Seite her bei C in das Rad, geht sodann in radialen Strahlen auseinander, gleitet den Schaufeln nach auswärts und wird schließlich nach der Steigröhre F getrieben. Es seien

R, r der äußere und innere Halbmesser des Rades,

B, b die äußere und innere Breite des Rades,

r_0 der Halbmesser des Saugrohres,

v_0 die Geschwindigkeit des Wassers im Saugrohr,

v, v′ die Geschwindigkeiten des äußern und innern Radumfanges, bei A und a eingezeichnet,
u, u′ die Geschwindigkeiten des Wassers längs des Schaufelelementes in A und a am äußern und innern Radumfang,
x, x′ die Resultanten aus u, v und aus u′, v′,
α, β die Winkel, welche u′ und u mit den Tangenten an die Radumfänge bilden,
e, i die Dicke und Anzahl Schaufeln des Rades und
w der Wirkungsgrad des Rades.

1. **Bewegung des Wassers im Saugrohr.** Da das Rad nur eine schwache Luftverdünnung hervorbringt, so soll die Pumpe so nahe als möglich an das Unterwasser gebracht werden. Es ist sogar zweckmäßig, dieselbe im Unterwasser aufzustellen. Aus diesem Grunde kann v_0 groß gehalten werden. Es ist für ein Saugrohr

(14) $$r^2_0 \pi \,.\, v_0 = Q.$$

2. **Eintritt des Wassers in das Rad.** Es ist zweckmäßig, das Wasser mit der Geschwindigkeit v_0 in das Rad treten zu lassen, so daß $x' = v_0$ wird. Ferner nehme man $u' = v'$ an, so wird

(15) $$x' = 2\,v' \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

3. **Austritt des Wassers aus dem Rad.** Vermöge der Wirkung der Centrifugalkraft wird

(16) $$u^2 = v^2 - 2\,g\,H.$$

Ferner folgt aus dem Dreieck, gebildet aus u, v und x:

(17) $$x^2 = v^2 + u^2 - 2\,v\,u \cos\beta.$$

Die Geschwindigkeit x soll, wie aus (22) folgt, klein sein. Führt man nun den Wert von u aus (16) in (17) und bestimmt denjenigen Wert von v, welcher bei gegebenem Winkel β die Größe x zu einem Minimum macht, so erhält man

(18) $$v^2 = g\,H\,(1 + \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 \beta}).$$

Der kleinste Wert, welchen hiernach v haben kann, ist $= \sqrt{2\,g\,H}$ und zwar für $\beta = 90^0$. Je kleiner β wird, um so größer wird v; für $\beta = 0$ wird v unendlich groß.

4. **Dimensionen des Rades.** Man nimmt gewöhnlich die Radhalbmesser wie folgt:

(19) $$r = 1{,}2\,r_0;\quad R = 2{,}4\,r_c.$$

Dann erhält man zur Bestimmung der Radbreiten

(20) $$b = \frac{Q}{(2\,r\,\pi \sin\alpha - e\,i)\,u'};\quad B = \frac{Q}{(2\,R\,\pi \sin\beta - e\,i)\,u}.$$

Aus v und R ergibt sich die Anzahl Touren per Minute. Wird diese sehr groß, so kann für R ein größerer Wert angenommen werden.

5. **Arbeit zum Betrieb der Pumpe.** Das Wasser ist auf die Höhe H zu heben. Allein diese Höhe vermehrt sich wegen der Neben-

Hindernisse um H_1 und wegen der Geschwindigkeit, welche das Wasser beim Austritt aus dem Rad besitzt, um $x^2 : 2g$. Daher ist die Bruttoarbeit

$$(21) \qquad 1000\,Q\left(H + H_1 + \frac{x^2}{2g}\right)$$

und der Wirkungsgrad

$$(22) \qquad w = \frac{H}{H + H_1 + \frac{x^2}{2g}}.$$

Der Wert H_1 liegt zwischen 0,15 H und 0,25 H. Aus (22) erkennt man, daß x klein werden soll, was nur möglich ist, wenn β klein ist. Daraus ergibt sich, daß die Schaufeln stark rückwärts gerichtet sein sollen, wodurch allerdings v und damit auch die Zahl der Umdrehungen groß wird.

6. **Zusammenstellungen.** In der folgenden Tabelle ist $H_1 = 0{,}2\,H$ angenommen.

β	$\cos\beta$	$\operatorname{cotg}\beta$	v	u	$\frac{x^2}{2g}$	w
10°	0,985	5,671	$1{,}84\sqrt{2gH}$	$1{,}54\sqrt{2gH}$	0,18 H	0,724
15	0,966	3,732	1,56 „	0,20 „	0,26 „	0,684
20	0,940	2,747	1,40 „	0,98 „	0,34 „	0,648
25	0,906	2,145	1,30 „	0,82 „	0,44 „	0,610
30	0,866	1,732	1,22 „	0,70 „	0,50 „	0,588
40	0,766	1,192	1,13 „	0,53 „	0,64 „	0,543
50	0,643	0,839	1,07 „	0,38 „	0,76 „	0,510
60	0,500	0,577	1,03 „	0,25 „	0,86 „	0,485
75	0,259	0,268	1,01 „	0,14 „	0,95 „	0,465
90	0,000	0,000	1,00 „	0,00 „	1,00 „	0,454

Beisp. Eine Pumpe soll 15 Liter Wasser in der Sekunde auf 4,5 m heben. Wie ist die Anordnung zu treffen?

Die Daten sind . . . . . $Q = 0{,}015$ kbm; $H = 4{,}500$ m.
Außerdem nehme man an $\alpha = 12^0$; $\beta = 10^0$; $i = 6$; $e = 0{,}004$ „
Nach der Tabelle ist $v = 1{,}84\sqrt{2gH} = 1{,}85 \,.\, 9{,}396 = 17{,}300$ „
Folglich auch für $(R = 2r)$ . . $u' = v' = v\left(\frac{r}{R}\right) = 8{,}650$ „
und nach (15) . $x' = 2 \,.\, 8{,}650 \sin 6^0 = 17{,}3 \,.\, 0{,}1045 = 1{,}807$ „
Aus $v_0 = x'$ folgt Querschnitt . . . $r_0^2\pi = \frac{0{,}015}{1{,}807} = 0{,}0084$ qm,
daher der Halbmesser der Saugröhre . . . . $r_0 = 0{,}052$ m.
Innerer Halbmesser des Rades . . . $r = 1{,}2\,r_0 = 0{,}063$ „
Aeußerer Halbmesser des Rades . . . $R = 2{,}4\,r_0 = 0{,}126$ „
Nach der Tabelle ist $u = 1{,}54\sqrt{2gH} = 1{,}54 \,.\, 9{,}396 = 14{,}46$ „
Innere Radbreite . $b = \frac{0{,}015}{(0{,}396 \sin 12^0 - 6 \,.\, 0{,}004) \,.\, 8{,}65} = 0{,}030$ „

Aeußere Radbreite $B = \frac{0{,}015}{(0{,}791 \sin 10^0 - 6 \,.\, 0{,}004) \,.\, 14{,}46} = 0{,}010$ m.

Anzahl Umgänge per Minute . . $\frac{60\,v}{2\,R\,\pi} = \frac{60 \,.\, 17{,}3}{0{,}792} = 1311$,

wofür der Reibungen wegen wenigstens zu rechnen $= 1400$.

Geschwindigkeitshöhe (nach der Tabelle) . . . $\frac{x^2}{2\,g} = 0{,}18$ H.

Bruttoarbeit . $1000 \,.\, 0{,}015 \,.\, 4{,}5\,(1 + 0{,}2 + 0{,}18) = 93$ km.

Wirkungsgrad (nach der Tabelle) . . . . $= 0{,}724$.

73. Von den hydraulischen Pressen.

1. **Wirkungsweise.** Diese von Pascal 1650 erfundene Presse enthält eine kleine Druckpumpe, vermittelst welcher durch eine enge Röhre Wasser in einen weitern Cylinder, der mit einem Kolben versehen ist, getrieben werden kann, um durch diesen Kolben eine beabsichtigte starke Pressung hervorzubringen. Hierbei pflanzt sich der Druck auf das Wasser ungeschwächt durch die ganze Wassermasse fort, so daß jeder gleich große Flächenteil in beiden Cylindern gleich stark gepreßt wird. *Folglich verhalten sich die Pressungen auf die Kolben wie ihre Querschnitte, also wie die Quadrate ihrer Durchmesser.*

Die Pumpe ist gewöhnlich mit einem ungleicharmigen Hebel versehen, mittelst welchem der Druck des Wassers gesteigert wird. Die Vorrichtung besteht daher aus zwei Uebersetzungen: der Uebersetzung der Kolbenflächen und der Uebersetzung des Hebels. Die totale Uebersetzung ist das Produkt aus den beiden partiellen Uebersetzungen.

Beisp. Es seien die Durchmesser der Kolben 2 cm und 25 cm, die Hebelsarme 5 cm und 60 cm; wie groß muß die Kraft am Ende des Hebels sein, damit der Druck auf den Preßkolben 100000 kg erreicht?

Uebersetzung der Kolben . . . . $25^2 : 2^2 = 156{,}25$fach.
Mithin Druck auf den kleinen Kolben $100000 : 156{,}25 = 640$ kg.
Uebersetzung am Hebel . . . . $60 : 5 = 12$fach.
Mithin Kraft am Ende des Hebels . . . $640 : 12 = 53{,}3$ kg.
Totale Uebersetzung . . . . $12 \,.\, 156{,}25 = 1875$fach,

d. h. mit der Kraft 1 auf das Ende des Hebels kann ein Druck $= 1875$ auf den Preßcylinder ausgeübt werden. Die Kraft am Ende des Hebels beschreibt daher auch einen 1875mal größern Weg als der Preßkolben.

2. **Reibung der Lederdichtung.** Nach Versuchen von Hick ist das Verhältnis dieser Reibung zum Gesamtdruck, welchen der große Kolben ausübt, für Centimeter

$$\text{Verhältnis} = \frac{0{,}20}{\text{Kolbendurchmesser}}.$$

Beisp. Die Reibung, welche die Liderung vorerwähnter Presse verursacht, beträgt $0{,}20 : 25 = 0{,}008$ vom Kolbendruck 100000 kg, mithin $^4/_5$ Prozent desselben $= 800$ kg.

3. **Wanddicke des Preßcylinders.** Sie wird nach Lamé berechnet nach Formel (5), S. 151.

Viele Konstruktoren machen bei starken Pressen die Wanddicke gleich dem halben innern Durchmesser. Setzt man $d = 2e$ in die Formel, so findet man $p = 0{,}6\,s$, d. h. der Druck des Wassers beträgt $^3/_5$ von der größten Spannung, welche das Material auszuhalten hat. Für $s = 1100$ kg kann daher der Wasserdruck steigen auf 660 kg per 1 qcm Querschnitt.

74. Berechnung hydraulischer Aufzüge.

In einem aufrechtstehenden Cylinder bewegt sich ein Kolben auf und ab, je nachdem unter dem Kolben Wasser zu- oder abgeleitet wird. Eine Kette geht vom Kolben an aufwärts, dann über eine Rolle mit waagrechter Achse und hierauf abwärts, um ein Gegengewicht zu tragen. Der Fahrstuhl mit der nützlichen Last ist in die Kette eingeschaltet, entweder auf Seite des Kolbens oder des Gegengewichtes. Die Steuerung wird durch Schieber oder Kolben bewirkt und zwar vom Tragbrett aus mittelst einer Stange oder Kette. Es seien

F, h die Kolbenfläche und der Kolbenhub,
H die Höhe der Wassersäule, welche den Druck auf den Kolben ausübt, von der Kolbendichtung an aufwärts reichend,
G, G_1 das Gewicht des Kolbens und dasjenige des Fahrstuhles samt der Nutzlast,
P, R das Gegengewicht und der Widerstand der Rolle und Kette und
p das Gewicht der Kette per Längeneinheit.

1. **Fahrstuhl auf Seite des Kolbens.** Bei diesem System ist der Cylinder in den Erdboden eingelassen. Wird Wasser unten in den Cylinder getrieben, so steigt der Kolben mit dem Fahrstuhl und es sinkt auf der gegenüber liegenden Seite das Gegengewicht. Die Gleichungen über das Gleichgewicht beim Steigen und Sinken des Kolbens sind (für Meter und Kilogramm):

A. Bewegung aufwärts.

a) Unterste Lage . $1000\,F\,(H + h) + P = G + G_1 + p\,h + R$,
b) mittlere Lage $1000\,F\,(H + 0{,}5\,h) + P = G + G_1 + R$,
c) höchste Lage . $1000\,F\,H + p\,h + P = G + G_1 + R$.
Aus (b) und (c) folgt unmittelbar . . $p = 500\,F$.

B. Bewegung abwärts.

Das Wasser muß aus dem Cylinder abfließen, allein noch einen Widerstand leisten, der in der höchsten Kolbenlage mit x, in der tiefsten mit x′ bezeichnet sei. Hierfür wird

d) Beginn der Bewegung . . $G + G_1 = P + p\,h + R + x$,
e) Ende der Bewegung . $G + G_1 + ph = P + R + x'$.

Beisp. Es sei bei einem hydraulischen Aufzug gegeben $F = 0{,}0314$ qm; $H = 10$ m; $h = 8$ m; $G = 500$ kg; $G_1 = 300$; $R = 20$ kg. Wie groß werden p, P, x und x'?

Es ist Gewicht der Kette per 1 m . . . $500 . 0{,}0313 = 15{,}7$ kg.
Gegengewicht (a) $P = 500 + 300 + 20 + 15{,}7 . 8 - 31{,}4 . 18 = 380{,}4$ „
Gegengewicht (b) $P = 500 + 300 + 20 \quad - 31{,}4 . 14 = 380{,}4$ „
Gegengewicht (c) $P = 500 + 300 + 20 - 15{,}7 . 8 - 31{,}4 . 10 = 380{,}4$ „
Wasserwiderst. (d) $x = 500 + 300 - 20 - 15{,}7 . 8 - 380{,}4 = 274{,}0$ „
Wasserwiderst. (e) $x' = 500 + 300 - 10 + 15{,}7 . 8 - 380{,}4 = 525{,}2$ „

2. **Fahrstuhl auf Seite des Gegengewichtes.** Der Cylinder (aus Kupfer) liegt über der Erde (System Samain). Gelangt Wasser unten in den Cylinder, so steigt der Kolben und auf der andern Seite sinkt der Fahrstuhl mit dem Gegengewicht. Man erkennt hieraus, daß diese Anordnung ein kleineres Gegengewicht erfordert als die vorige. Dieser Umstand ist für die Sicherheit des Betriebes nicht unwesentlich. Denn unter dem Einfluß großer bewegter Massen brechen Kolben, Ketten &c. eher als bei kleinern Massen. Für das Gleichgewicht hat man:

A. Bewegung aufwärts.

f) Unterste Kolbenlage . $1000\,F H + G_1 + P = G + p h + R$,
g) oberste Kolbenlage $1000\,F (H - h) + G_1 + P + p h = G + R$.
Durch Subtraktion dieser Gleichungen folgt wieder . $p = 500\,F$.

B. Bewegung abwärts.

h) Beginn der Bewegung . . $G = G_1 + P + R + p h + x$,
i) Ende der Bewegung . $p h + G = G_1 + P + R + x'$.

Beisp. Für die Daten des vorhergehenden Beispiels wird
Gegengewicht nach (f) und nach (g) . . . . $P = 31{,}6$ kg.
Widerstand des Wassers nach (h) . . . . $x = 22{,}8$ „
Widerstand des Wassers nach (i) . . . . $x' = 274{,}0$ „

Mechanik elastischer Flüssigkeiten.

---

75. Gleichgewicht elastischer Flüssigkeiten.

1. **Eigenschaften.** Die Stoffteile dieser Flüssigkeiten haben das Bestreben, sich immer weiter von einander zu entfernen. Deshalb üben sie auf die Wände des Raumes, in welchem sie abgeschlossen sind, einen Druck aus, den man Spannkraft oder Expansivkraft nennt.

Die elastischen Flüssigkeiten heißen auch Gase. Sie lassen sich durch Abkühlung oder Druck in tropfbare Flüssigkeiten verwandeln. Diejenigen Gase, welche schon bei gewöhnlicher Einwirkung tropfbar flüssig werden, nennt man Dämpfe.

Die Gesetze, welche über das Gleichgewicht der tropfbaren Flüssigkeiten in Nr. 61 aufgeführt sind, gelten auch für die Gase, so z. B. das vom Druck der Flüssigkeit, hervorgebracht durch ihr eigenes Gewicht; das von der Fortpflanzung eines äußeren Druckes; über die kommunizierenden Röhren; über den Auftrieb u. s. w.

2. **Der Torricelli'sche Versuch.** Das eine Ende einer cylindrischen Glasröhre sei geschlossen, das andere offen. Man halte das offene Ende oben, fülle die Röhre auf cirka 80 cm Höhe mit Quecksilber, verschließe sodann dieses Ende mit dem Finger, kehre die Röhre um, tauche dieses Ende in Quecksilber, das sich in einem Gefäße befindet, und ziehe hierauf den Finger zurück; so sinkt das Quecksilber in der Röhre um einige Centimeter. Die übrige Säule in der Röhre wird nach dem Gesetz der kommunizierenden Röhren von der atmosphärischen Luft getragen. Die Einrichtung heißt Barometer und die Höhe der Flüssigkeitssäule Barometerstand. Der Barometerstand ist ein Maß für den Luftdruck.

3. **Druck einer Atmosphäre.** Der Barometerstand an der Meeresfläche ist 76 cm, daher das Volumen der Quecksilbersäule im Barometer per 1 qcm Querschnitt = 76 kcm und deren Gewicht, da 1 kcm Quecksilber 13,596 Gramm wiegt, = 76 . 13,596 = 10333 Gramm = 1,0333 kg. Daher

Luftdruck an der Meeresfläche per 1 qcm Fläche = 1,0333 kg.

Obgleich diese Größe, je nach der Witterung und der Höhe des Ortes, veränderlich ist, so wird sie in der Mechanik als konstant betrachtet und unter dem Namen Atmosphäre als Einheit angewendet,

um bei Dampfkesseln, hydraulischen Pressen, Gebläsen 2c. den Druck zu bestimmen, welcher durch Wasser, Dampf und sonstige Flüssigkeiten ausgeübt wird. So versteht man z. B. unter Dampf von 4 Atmosphären solchen, welcher einen 4mal stärkeren Druck ausübt als die atmosphärische Luft am Meere.

Da eine Quecksilbersäule von 76 cm Höhe einer Wassersäule von 0,76 . 13,596 = 10,333 m Höhe das Gleichgewicht hält, so läßt sich dieser Atmosphärendruck auch angeben durch eine Wassersäule von 10,333 m Höhe. Hiernach erhält man folgende Zusammenstellung:

Wassersäule.	Quecksilbersäule.	Druck.
10,333 Meter.	76 Centimeter.	1,0333 Kil. per Q.-Centimeter.
32,688 östr. Fuß.	28,84 östr. Zoll.	12,804 östr. Pfd. per östr. Q.-Zoll.
32,923 preuß. Fuß.	29,05 preuß. Zoll.	14,124 Vereins-Pfd. p. preuß. „
33,901 englisch „	29,90 englisch „	14,704 englisch „ „ englisch „

Bemerkung. In mehreren Staaten (Deutschland, Frankreich 2c.) ist der Druck einer Atmosphäre zu 1 kg per 1 qcm amtlich festgestellt.

Beisp. 1. Es sei Wasser auf eine Höhe von 70 m zu heben. Wie groß ist der Druck des Wassers in der Leitung, in Atmosphären?

Man teile die Röhrenleitung in Teile von 10,333 m vertikaler Höhe, so ist der Druck auf das untere Ende des ersten obern Teiles = 1 Atm., auf das untere Ende des zweiten Teiles = 2 Atm. und auf die tiefste Stelle der Leitung 70 : 10,333 = 6,775 Atmosphären.

Beisp. 2. Wie vielen Atmosphären ist ein Druck von 200000 kg gleich zu setzen, welcher auf den Kolben einer hydraulischen Presse von 24 cm Durchmesser ausgeübt wird?

Es ist der Querschnitt des Kolbens . . . . . = 452,4 qcm,
der Druck auf denselben per 1 qcm 200000 : 452,4 = 442,1 kg,
somit die Anzahl Atmosphären 442,1 : 1,0333 . = 427,8.

4. **Manometer.** Der Druck der Gase und Dämpfe wird durch Vorrichtungen gemessen, welche Manometer genannt werden.

a) Flüssigkeitsmanometer. Es sei A (Fig. 1) ein Gasbehälter. Man setze eine Röhre von der Form m b d auf das Gefäß und fülle sie so mit Wasser, daß die Wasserspiegel in beiden Schenkeln in der Waagrechten a c liegen, wenn der Druck des Gases im Behälter gleich dem der äußern Luft ist. Steigt nun die Spannung des Gases im Behälter, so sinkt das Wasser in dem einen Schenkel der Röhre um a b und steigt im andern um einen gleichen Betrag c d, wenn die Röhren cylindrisch sind und gleiche Weite haben. Dadurch wird der Ueberdruck des Gases über denjenigen der äußern Luft gemessen durch die vertikale Wassersäule b d = 2 . a b.

Zwischen den beiden Rohrschenkeln wird ein Maßstab angebracht, dessen Nullpunkt in a c liegt und dessen Einteilung oberhalb und unterhalb 0 angebracht ist. Dieser Maßstab kann je nach der Menge des vorhandenen Wassers vertikal verschoben werden.

Fig. 1.

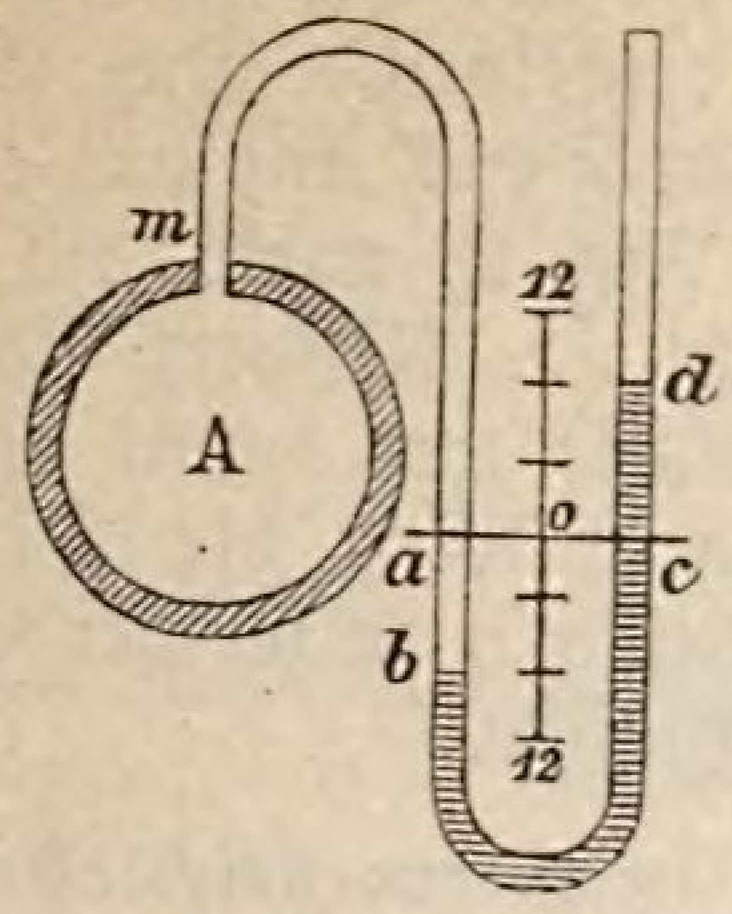


Fig. 3.

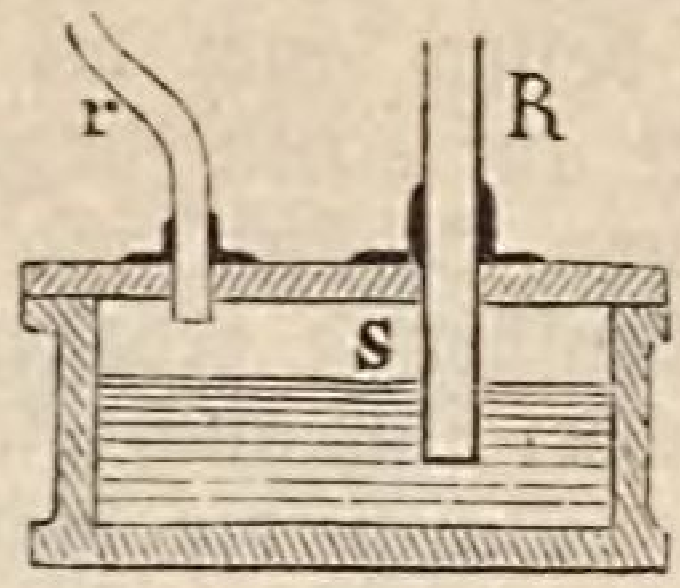
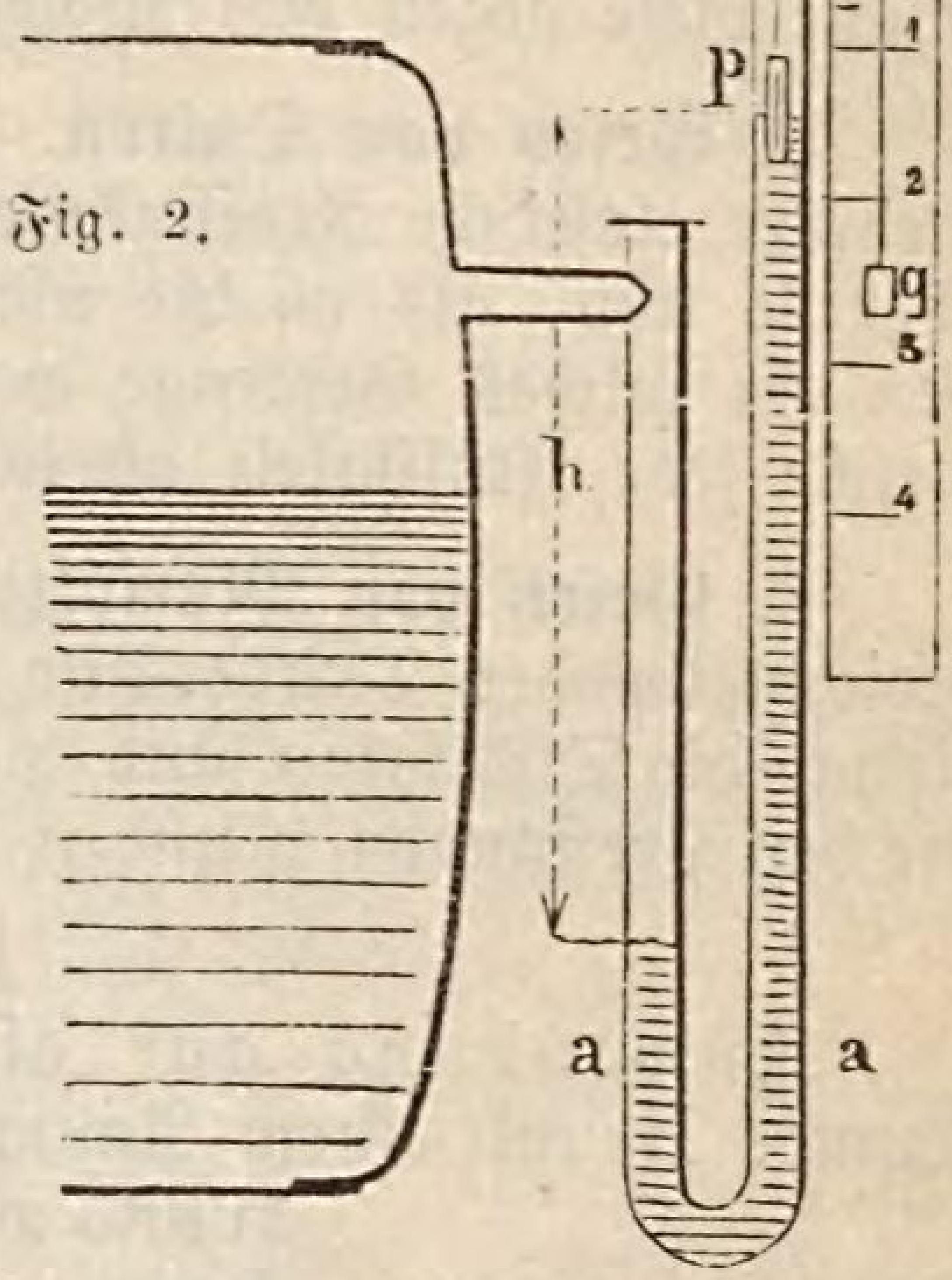


Fig. 2.



Eine andere Form eines heberförmigen Manometers für höhern Druck, deren undurchsichtige Röhre a a mit Quecksilber angefüllt wird, zeigt nebenstehende Fig. 2. Die Säule von der Höhe h hält dem Gas- oder Dampfdruck das Gleichgewicht. Die Gewichte p und q, welche an einer Schnur hangen, steigen und sinken mit dem Quecksilber und geben somit durch ihren Stand den Gasdruck an.

Beim Gefäßmanometer, Fig. 3, drückt das Gas oder der Dampf durch das Röhrchen r auf die Oberfläche S des Quecksilbers und treibt dieses durch die Röhre R aufwärts.

b) Metallmanometer. Das von Bourdon (1824), Fig. 1,

Fig. 1.

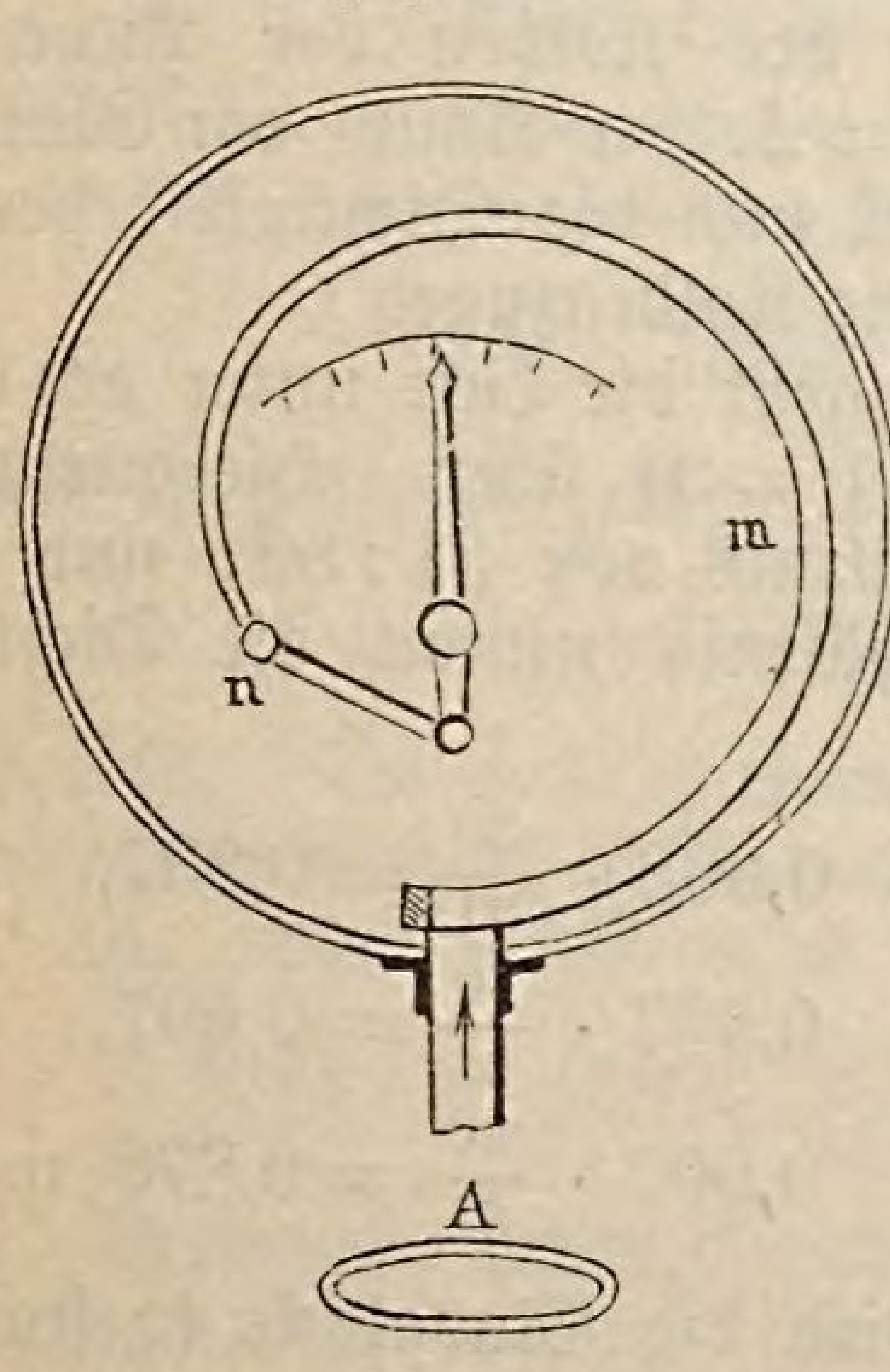
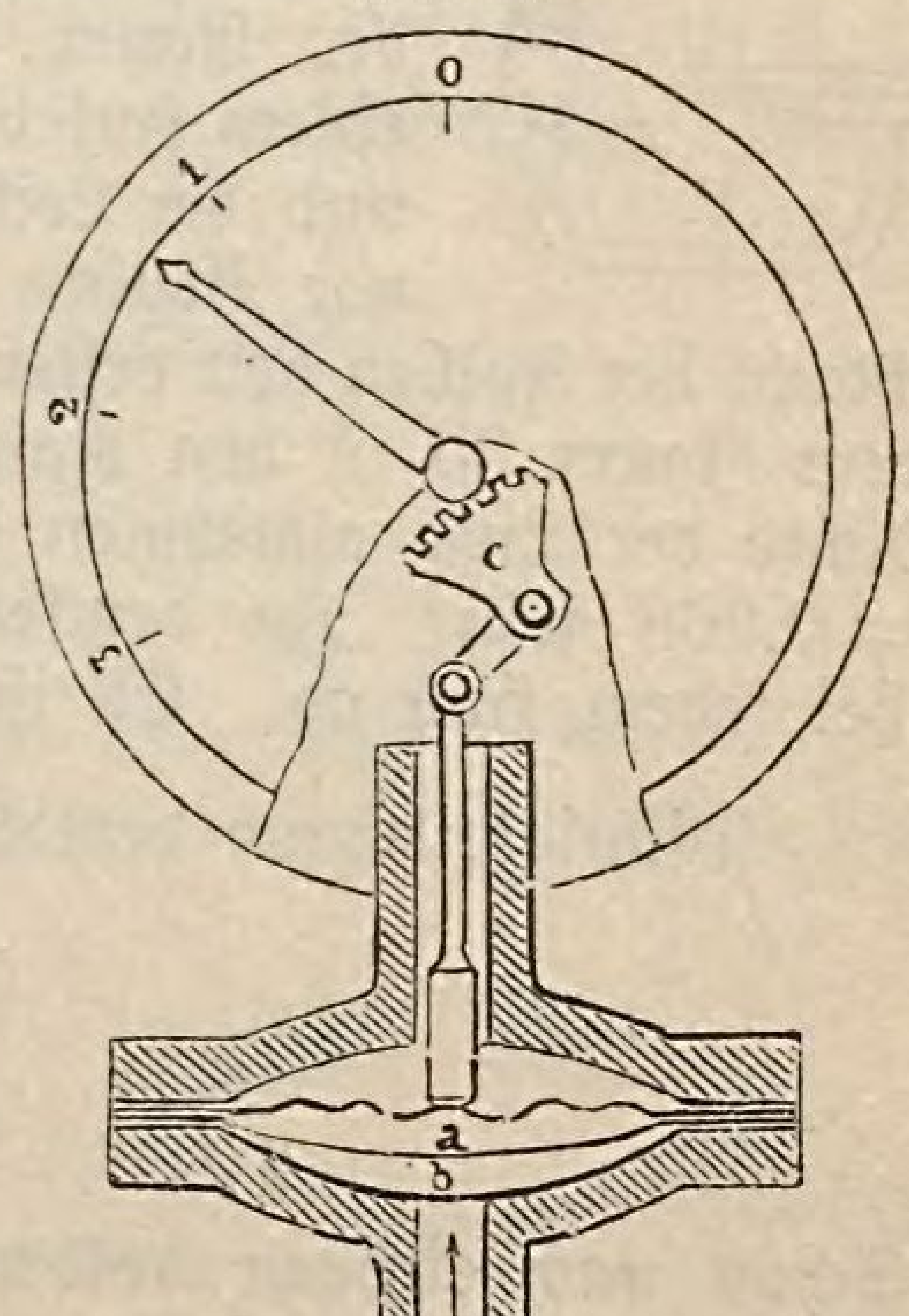


Fig. 2.



besteht in einem hohlen, spiralförmig gebogenen Metallröhrchen m, dessen Querschnitt A oval ist. Gelangt die Flüssigkeit in dieses Röhrchen und

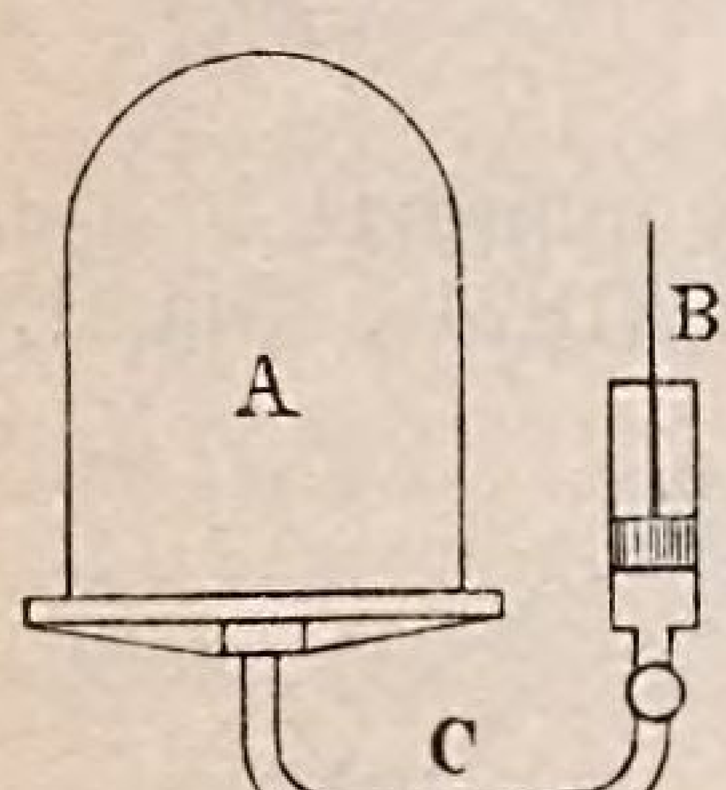
steigt der Druck desselben, so ändert sich der Querschnitt A der Röhre und infolge dessen auch die Spiralform desselben. Das Ende n der Spirale wirkt auf einen Zeiger, welcher den Druck angibt. — Bei dem Manometer von Schäfer und Budenberg, Fig. 2, wirkt die Flüssigkeit auf eine wellenförmig gebogene Stahlplatte a. Aendert sich nun der Druck, so ändert sich auch die Form der Platte und damit die Stellung des Zeigers. Durch die Räderübersetzung c wird die Drehung des Zeigers sehr auffallend. Eine Kautschukscheibe b unter der Stahlplatte schützt diese gegen das Rosten durch das Wasser.

5. **Gesetz von Dalton.** Befinden sich in einem geschlossenen Raum mehrere elastische Flüssigkeiten (Luft, Dämpfe), so füllt jede den Raum eben so aus, als ob die übrigen nicht vorhanden wären. Der Druck, den ein solches Gemenge ausübt, ist gleich der Summe der Drücke, welche jede Flüssigkeit allein ausüben würde.

6. **Gesetz von Mariotte.** Wird der Rauminhalt eines Gases, bei gleichbleibender Temperatur, geändert, so ändern sich verkehrt proportional die Dichtigkeit und die Spannkraft des Gases. Sind v und v_0 die den Pressungen p und p_0 entsprechenden Rauminhalte, so erhält man

$$v : v_0 = p_0 : p, \text{ oder } p_0 v_0 = p v.$$

Anwendung auf die Luftpumpe. Sie besteht aus einer Pumpe B und einem Raume (Glasglocke) A, in welchem die Luft verdünnt werden soll. Befindet sich der Kolben der Pumpe zu unterst und wird er aufgezogen, so entsteht unter ihm ein luftleerer Raum. Daher wird die Luft aus dem Raume A durch die Leitung C nach B strömen und die Dichtigkeit in allen zusammenhängenden Räumen ausgleichen. — Es sei der Raum, welchen der Kolben der Pumpe bei einem Hub beschreibt = 1, der Raum der Glasglocke und der Leitung = 30 und die Dichtigkeit der Luft vor Beginn des ersten Kolbenzuges = 1.



Macht der Kolben den ersten Zug, so geht die Luft unter der Glocke aus dem Raum 30 in den Raum 30 + 1 = 31 über. Hierdurch wird die Dichte der Luft abnehmen im Verhältnis von 31 : 30, und somit $^{30}/_{31} = 0{,}968$ sein. In demselben Verhältnis nimmt die Dichte der Luft bei jedem Hub ab. Es ist daher

$$\text{Dichtigkeit nach dem 2ten Hub } 0{,}968 \cdot \frac{30}{31} = 0{,}937,$$

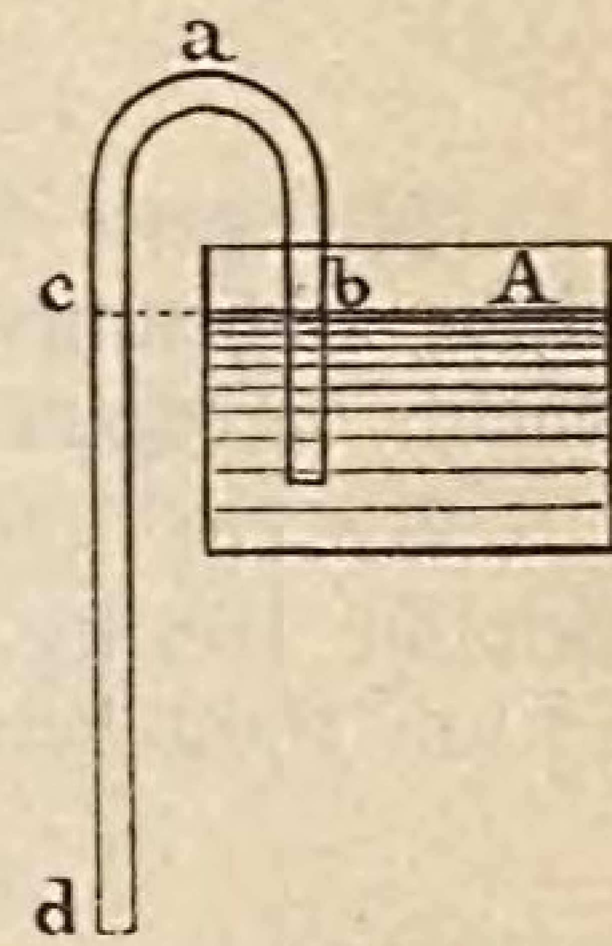
$$\text{„ „ „ 3ten „ } 0{,}937 \cdot \frac{30}{31} = 0{,}907,$$

$$\text{„ „ „ 4ten „ } 0{,}907 \cdot \frac{30}{31} = 0{,}878 \text{ u. s. w.}$$

Schon nach einigen Kolbenzügen wird die Glasglocke so stark auf den Teller gedrückt, daß sie nur mit Gewalt abgehoben werden kann.

7. **Heber.** Er besteht aus einer gekrümmten Röhre b a d, welche zum Entleeren des Gefäßes A dient. Man halte nämlich den kürzern

Schenkel in das Wasser, verdünne die Luft in der Röhre, z. B. durch Saugen vom untern Ende aus, so wird der Luftdruck, welcher auf die Wasseroberfläche A ausgeübt wird, Wasser in den kürzern Schenkel b a hinauftreiben. Wäre der Punkt a 10,33 m hoch über dem Wasserspiegel und könnte die Röhre ganz luftleer gemacht werden, so würde an der Meeresfläche das Wasser bis a emporsteigen. Ist dagegen a nicht so hoch, so wird bei hinreichender Luftverdünnung das Wasser in den Schenkel a d überfließen und denselben bei gänzlicher Entfernung der Luft anfüllen. Wird alsdann die Röhre bei d geöffnet, so fließt das Wasser aus der Röhre und somit auch aus dem Gefäße ab. Denn auf das Ende d wirkt der Luftdruck vertikal aufwärts. Man denke sich seinen Angriffspunkt nach c (in einer Waagrechten zu b) verlegt, so halten sich die Luftdrücke in c und b das Gleichgewicht, während die Wassersäule c d, durch keine Kraft gehalten, sinkt. Sobald dies geschieht, entsteht ein luftleerer Raum im obern Teil c a b, wodurch wieder Wasser aus dem Gefäße nachgesogen wird. Je länger der Schenkel c d unter dem Wasserspiegel, um so wirksamer die Vorrichtung.



8. **Höhenmessung durch das Barometer.** Die Dichtigkeit der Luft in der Atmosphäre nimmt von unten nach oben ab. Es kommt dies daher, daß die untern Luftschichten durch die darüber liegenden stärker zusammengedrückt werden als die obern. Auf dem Gesetz dieser Abnahme beruht die Bestimmung des Höhenunterschiedes zweier über einander gelegener Punkte in der Atmosphäre. Es seien

B, b die Barometerstände zweier Stationen,
T, t die Temperaturen an diesen Stationen nach Celsius,

so erhält man den vertikalen Abstand h dieser Stationen (für Metermaß) für kleinere Höhen nach Poisson:

$$h = 18395 \left(1 + \frac{T + t}{500}\right) \log \frac{B}{b}$$

und für ganz kleine Höhen nach Babinet

$$h = 15976 \frac{B - b}{B + b} \left(1 + \frac{T + t}{500}\right).$$

Beisp. Es soll vermittelst eines Barometers die Höhe eines Berges gemessen werden, wenn B = 0,74 m, b = 0,64 m, T = 10° und t = 7° ist. Man erhält nach Babinet

$$\text{Höhe } h = 15976 \frac{0{,}74 - 0{,}64}{0{,}74 + 0{,}64} \left(1 + \frac{17}{500}\right) = 1197 \text{ m}.$$

9. **Steighöhe eines Luftballons.** Es seien P und V Gewicht und Rauminhalt des Ballons, ferner s das Gewicht der Kubikeinheit des Gases, mit dem der Ballon gefüllt wird, und s′ das Gewicht der Kubikeinheit atmosphärischer Luft in einer Luftschicht, bis zu welcher sich der Ballon zu erheben vermag; so ist das Gewicht der Füllung = V s, somit die gesamte Kraft, womit der Ballon abwärts wirkt = V s + P.

Dieser Kraft wirkt der aerostatische Auftrieb entgegen. Vermöge dieses Auftriebes steigt der Ballon so lange, bis er in eine Luftschicht kommt vom specifischen Gewichte s'. Hier verdrängt er eine Luftmasse vom Gewichte V s', welche ihn gerade zu tragen vermag. Für diese Lage erhält man daher

$$V s' = V s + P, \text{ woraus } s' = s + \frac{P}{V}.$$

Mit Hilfe dieser letzten Formel und derjenigen über die barometrische Höhenmessung kann die Höhe, bis zu welcher der Ballon sich erhebt, berechnet werden.

Beisp. Es sei der Rauminhalt des Ballons 200 kbm und sein Gewicht 168 kg. Er werde mit Wasserstoff gefüllt, dessen Gewicht per 1 kbm 0,09 betrage; so hat man

$$s' = 0{,}09 + \frac{168}{200} = 0{,}93.$$

Somit wiegt 1 kbm Luft am obern Ende der Steighöhe 0,93 kg, während das Gewicht von 1 kbm Luft am Boden 1,25 kg betrage. Diese Gewichte verhalten sich wie die Barometerhöhen an den betreffenden Stellen. Man hat daher nach Babinet ohne Rücksicht auf die Temperaturen an den beiden Stellen

$$\text{Steighöhe} = 15976 \cdot \frac{1{,}25 - 0{,}93}{1{,}25 + 0{,}93} = 2345 \text{ m}.$$

76. Bewegung elastischer Flüssigkeiten.

1. Geschwindigkeit, mit welcher ein Gas durch eine Oeffnung entweicht. Die Geschwindigkeit, mit welcher Wasser aus der Oeffnung eines Behälters tritt (S. 235), ist $v = \sqrt{2gh}$, wo h die Druckhöhe und $g = 9{,}81$ m die Beschleunigung beim freien Fall bezeichnen.

Nun sei s das specifische Gewicht des Gases im Behälter, das des Wassers = 1 gesetzt, so wird die Höhe der Gassäule so viel mal größer sein müssen als die des Wassers, so viel mal kleiner s ist als 1.

Wenn der Druck des Gases gemessen wird: im Behälter durch die Höhe h, außerhalb desselben zunächst der Oeffnung durch die Höhe h' einer Wassersäule, so wird die Druckhöhe $= \frac{h - h'}{s}$; daher die theoretische Ausflußgeschwindigkeit nach D. Bernoulli

$$(1) \qquad v = \sqrt{2g\frac{h - h'}{s}}.$$

Bei Ableitung dieser Formel setzt man voraus, daß das Gas beim Durchgang durch die Oeffnung keine Temperaturänderung erleide. Da diese Voraussetzung nur für sehr kleine Spannungsdifferenzen zulässig ist, so wird auch obige Formel nur für diesen Fall hinreichend genaue Resultate geben.

Zum Messen der Geschwindigkeit, z. B. des Windes, der Luft in einem Ventilationskanal ꝛc., bedient man sich der Anemometer.

Beisp. Es ströme Luft von 1,2 Atmosphären Spannung in Luft von 1 Atmosphäre Druck ab; wie groß ist die Geschwindigkeit?

Höhe einer Wassersäule bei 1 Atm. Druck . . . . = 10,33 m.
Höhe bei 1,2 — 1 = 0,2 Atm. Spannungsdifferenz
$h = 0{,}2 \,.\, 10{,}33 = 2{,}066$ „
Nun ist das specif. Gewicht der Luft bei 1 Atm. . = 0,001293.
Mithin bei 1,2 Atm. . . . . $s = 1{,}2 \,.\, 0{,}001293 = 0{,}001552$.
Somit Geschwindigkeit . . . $v = \sqrt{\frac{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 2{,}066}{0{,}001552}} = 161{,}6$ m.

2. **Ausflußmenge.** Die theoretische Ausflußmenge wird erhalten, wenn man den Querschnitt der Ausflußöffnung mit der Geschwindigkeit multipliziert. Allein wie beim Wasser ist auch hier die wirkliche Gasmenge kleiner als die theoretische. Die wirkliche beträgt, je nach der Beschaffenheit der Mündung, 0,60—0,97 von der theoretischen. Dieses Verhältnis nennt man Ausflußkoefficient. Es ist

	Koefficient
für Mündungen in dünnen Wänden, ohne Abrundung	0,60—0,64,
„ kurze cylindrische Ansatzröhren	0,75—0,80,
„ kurze konische Ansatzröhren von cirka 10° Neigung	0,88—0,92,
„ gut abgerundete Düsen	0,96—0,97.

Beisp. Die Luft, wie im letzten Beispiel angenommen, fließe durch eine Mündung von 0,008 qm Querschnitt ab, für welche der Ausflußkoefficient 0,90 gewählt werden könne. Wie viel Luft geht in der Sekunde ab?

Es ist die theoretische Ausflußmenge $0{,}008 \,.\, 161{,}6 = 1{,}292$ kbm.
Mithin die wirkliche . . . . . . $0{,}90 \,.\, 1{,}292 = 1{,}163$ „

3. **Bewegung der Gase in Röhrenleitungen.** Die Reibung, welche die Bewegung der Gase in Röhrenleitungen veranlaßt, richtet sich genau nach denselben Gesetzen wie die des Wassers. Allein der Verlust h an Druckhöhe bei Wasser ist (S. 254)

$$h = k \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

worin L die Länge der cylindrischen Leitung, D deren Durchmesser, v die Geschwindigkeit des Wassers per Sekunde und g = 9,81 m die Beschleunigung beim freien Fall bezeichnen.

Für Wasser kann als hinreichend großer Wert angenommen werden k = 0,025. Da nun der Reibungswiderstand der Dichtigkeit, also dem specifischen Gewicht s der Flüssigkeit, proportional ist, so wird der Druckverlust h, gemessen durch die Höhe einer Wassersäule, für jede Flüssigkeit annähernd sein

$$(2) \qquad h = 0{,}025\, s \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot$$

Für atmosphärische Luft bei Windleitungen nehme man s = 0,0013, bei Leuchtgas s = 0,00055 bis s = 0,00085, je nach der Dichte des Gases.

Beisp. In einer Gasleitung von 500 m Länge und 0,25 m Durchmesser bewege sich das Gas mit 4 m Geschwindigkeit. Am Ende

der Leitung soll das Gas noch einen Druck besitzen von 0,05 m Wassersäule. Wie groß muß der Wassermanometerstand am Anfang der Leitung, d. h. im Gasometer, für sehr dichtes Gas sein?

Es ist der Druckverlust $h = 0{,}025 \cdot 0{,}00085 \cdot \frac{500}{0{,}25} \cdot \frac{16}{2 \cdot 9{,}81} = 0{,}035$ m.

Mithin Wassermanometerstand im Gasometer $0{,}05 + 0{,}035 = 0{,}085$ „

4. **Allgemeine Regeln für Wind- und Gasleitungen.** Man mache die Leitung so weit als möglich, damit die Geschwindigkeit der Bewegung klein ausfällt; man nehme die Leitung so kurz als möglich; man vermeide so weit thunlich die Kontraktionen des flüssigen Stromes, welche durch Erweiterungen, Verengungen, bei Hähnen, beim Eintritt in die Leitung 2c. vorkommen können, und endlich vermeide man rasche Krümmungen der Leitung (S. 260).

5. **Druck des Windes gegen eine ebene Fläche.** Es sei
- F die vom Wind gestoßene Fläche,
- v die relative Geschwindigkeit des Windes und der Fläche, d. h. der Weg, um welchen sich die Luft und die Fläche in der Sekunde nähern,
- γ das Gewicht von einem Kubikmeter Luft,
- α der Winkel, welchen die Windrichtung mit der Fläche F bildet, und
- P der Druck des Windes, so ist annähernd für Meter und Kilogramme

$$(3) \qquad P = 0{,}11\, \gamma\, F^{1,1} \cdot v^2 (\sin \alpha)^{1,84 \cos \alpha}.$$

Steht die Fläche senkrecht zur Windrichtung, so wird $\alpha = 90^0$, $\sin \alpha = 1$, $\cos \alpha = 0$ und die Gleichung geht über in

$$(4) \qquad P = 0{,}11\, \gamma\, F^{1,1} \cdot v^2.$$

Für einen Barometerdruck von 75 cm und 12^0 Temperatur wird, wenn Quecksilber- statt Wassersäulen genommen werden, das Gewicht (S. 336)

$$\gamma = \frac{1{,}293}{1 + 0{,}00367 \cdot 12} \cdot \frac{75}{76} = 1{,}222 \text{ kg}$$

und daher für 1 qm Fläche nach Formel (2)

Geschwind. v =	1	5	10	15	20	25	30	40 m.
Winddruck P =	0,13	3,36	13,4	30,2	53,8	84,0	121	215 kg.

77. Von den Luftpumpen.

I. Allgemeines.

Die Luftpumpen schaffen Luft aus einem Raum in einen andern. Die wesentlichsten Arten sind die Kolbenpumpen und die Ventilatoren. Beide zerfallen in Luftverdünnungs- und Luftverdichtungspumpen. Der Luftdruck wird gemessen durch Manometer (S. 320). Es seien

h_0, h, h', Spannung der Luft im Saugraum der Pumpe, im Druckraum der Pumpe oder der Leitung zunächst der Pumpe, und in der Atmosphäre, ausgedrückt durch die Höhe einer Wassersäule;

s, t specifisches Gewicht und Temperatur der Luft von der Spannung h;
Q Volumen der Luft von der Spannung h_0, das per Sekunde gefördert wird;
V Geschwindigkeit, mit welcher die Luft aus dem einen Raum nach dem andern frei abfließt.

1. **Dichtigkeit der Luft.** Die Höhe einer Wassersäule, welche den Druck einer Atmosphäre mißt, ist = 10,33 m, das spec. Gewicht dieser Luft von $0^0 = 0{,}001293$; folglich der Wert s für Luft vom Drucke h und der Temperatur t (S. 336):

$$s = \frac{0{,}001293}{1 + 0{,}00367\,t} \cdot \frac{h}{10{,}33}. \tag{1}$$

2. **Geschwindigkeit der Luft unter einer Oeffnung.** Herrscht vor der Oeffnung (Düse bei Gebläsen) der Druck h, hinter derselben der Druck h′, so wird nach Bernoulli (S. 324)

$$V = \sqrt{2g\frac{h - h'}{s}}. \tag{2}$$

Nach dieser Formel erhält man für g = 9,81 m als spec. Gewicht und Geschwindigkeit der Luft unter der Oeffnung:

Druck h Wassersäulenhöhe.	Temperatur 0° C.		Temperatur 150° C.		Temperatur 300° C.	
	Specifisches Gewicht.	Geschwindigkeit.	Specifisches Gewicht.	Geschwindigkeit.	Specifisches Gewicht.	Geschwindigkeit.
m		m		m		m
0,001	0,001293	3,89	0,000834	4,85	0,000615	5,64
0,002	0,001293	5,50	0,000834	6,85	0,000615	7,98
0,003	0,001293	6,74	0,000834	8,40	0,000615	9,77
0,005	0,001293	8,70	0,000834	10,8	0,000615	12,6
0,010	0,001294	12,2	0,000835	15,2	0,000616	17,7
0,020	0,001296	17,3	0,000836	21,6	0,000617	25,1
0,035	0,001297	23,0	0,000837	28,6	0,000618	33,4
0,055	0,001300	28,8	0,000838	35,8	0,000619	41,7
0,095	0,001305	37,7	0,000841	47,0	0,000621	54,7
0,150	0,001312	47,3	0,000846	58,9	0,000625	68,6
0,21	0,001319	55,8	0,000851	69,5	0,000628	81,0
0,29	0,001329	65,4	0,000857	81,4	0,000633	94,8
0,41	0,001344	77,3	0,000866	96,3	0,000639	112,1
0,55	0,001362	89,0	0,000878	110,8	0,000648	129,0
0,73	0,001384	101,6	0,000893	126,6	0,000659	147,4
0,95	0,001412	114,8	0,000911	143,0	0,000672	166,5
1,20	0,001448	127,3	0,000934	158,7	0,000689	184,8
1,50	0,001480	141,0	0,000955	175,5	0,000704	204,3
1,90	0,001531	156,0	0,000987	194,2	0,000729	226,1
2,33	0,001585	171,5	0,001222	213,6	0,000754	248,6

3. **Querschnitt der Oeffnung.** Dieser Querschnitt wird gefunden, wenn man das Volumen der Luft, welches per Sekunde durch die Oeffnung geht, mit der Geschwindigkeit V dividiert. Wegen der Kontraktion des Luftstrahles ist der Querschnitt jedoch um 3 bis 40 Prozent größer zu nehmen (S. 325).

4. **Geschwindigkeit in der Leitung.** Bei schwachem Druck und langen Leitungen soll die Geschwindigkeit der Luft höchstens 10 m betragen; bei kurzen Leitungen und starkem Druck kann sie auf 25 m steigen.

II. Kolbenpumpen.

Die Luft tritt mit der Spannung h_0 in den Cylinder, wird in demselben auf die Spannung h zusammengedrückt und mit dieser Spannung in die Leitung getrieben. Es sei

F, Z Querschnitt und Hub des Kolbens,
z der Teil des Kolbenweges, längs welchem der Volldruck h herrscht, also Z — z der Kolbenweg längs der Kompressionsperiode,
z_0 die Länge des schädlichen Raumes,
v die mittlere Kolbengeschwindigkeit per Sekunde und
Q_1 die Luftverluste, welche durch die Pumpe per Sekunde entstehen.

1. **Luftmenge.** Das vom Kolben in der Sekunde beschriebene Volumen ist $= F v$; daher die Luftmenge

$$Q + Q_1 = F v. \tag{3}$$

Der Wert von Q soll nun gegenüber von Q_1 groß werden. Dies ist der Fall: wenn auf der Saugseite der Luftdruck in der Pumpe so groß wird wie außerhalb derselben, was voraussetzt, daß der Querschnitt des Saugventils im Verhältnis zum Cylinderquerschnitt nicht zu klein sei und daß der Kolben sich nicht zu schnell bewege; wenn bei der Umkehr des Kolbens das Saugventil wenig Luft aus der Pumpe entweichen läßt, also schnell schließt und das Druckventil wenig von jener Luft, die bereits aus der Pumpe gestoßen war, wieder in diese zurücktreten läßt, und wenn bei Pumpen, bei welchen die Druckdifferenz $h - h_0$ erheblich wird, der schädliche Raum klein ist.

Hat nämlich der Kolben seine Grenzlage erreicht, so findet sich im schädlichen Raum ein Luftvolumen $F z_0$ vor vom Drucke h. Geht nun der Kolben zurück, so dehnt sich diese Luft aus und ihre Spannung sinkt auf h_0. Bis zu dem Augenblick, da h in h_0 übergehen kann, mache der Kolben den Weg y, so ist nach dem Mariotte'schen Gesetz $z_0 h = (z_0 + y) h_0$; daher

$$y = z_0 \frac{h - h_0}{h_0}. \tag{4}$$

Nimmt man $z_0 = 0{,}05 Z$ an, so erhält man aus (4)

a) für Luftpumpen bei Kondensations-Dampfmaschinen, wenn $h = 6 h_0$:

$$y = 0{,}05 Z \,.\, 5 = 0{,}25 Z;$$

b) für Exhaustoren bei Gaswerken und bei Cylindergebläsen für Hochöfen, wenn $h = 1{,}1\,h_0$:

$$y = 0{,}05\,Z\,.\,0{,}1 = 0{,}005\,Z;$$

c) für Kompressoren, wenn $h = 4h_0$ angenommen wird:

$$y = 0{,}05\,Z\,.\,3 = 0{,}15\,Z.$$

Es kann daher die Luft erst eintreten, wenn der Kolben einen Weg durchlaufen hat: im Falle (a) von 25, im Falle (b) von 0,5, im Falle (c) von 15 Prozent des Kolbenhubes.

Die Verluste, herbeigeführt durch die Ventile, betragen cirka 0,15 F v. Addiert man die durch y herbeigeführten hinzu, so ergibt sich

für die Pumpen .	a	b	c
Verlust	$Q_1 = 0{,}400$ F v	0,155 F v	0,300 F v.
Effektive Luftmenge	$Q\ = 0{,}600$ F v	0,845 F v	0,700 F v.

2. **Druckzunahme während der Kompression.** Um die Pressung h_0 in h überzuführen, muß auf die Luft Arbeit verwendet werden. Diese setzt sich in Wärme um und erhöht die Temperatur der Luft.

Wenn $h - h_0$ klein, so kann von der Temperaturzunahme abgesehen werden; dann ist nach dem Mariotte'schen Gesetz

$$\frac{Z + z_0}{z + z_0} = \frac{h}{h_0}\,. \tag{5}$$

Kann die Temperaturänderung nicht vernachlässigt werden, so erhält man nach Poisson (S. 347)

$$\frac{Z + z_0}{z + z_0} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^{\frac{1}{1{,}41}} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^{0{,}7092}, \tag{6}$$

worin 1,41 das Verhältnis zwischen der spec. Wärme der Luft für gleichen Druck und gleiches Volumen bezeichnet.

Wenn z. B. $h = 4h_0$ werden soll, so ist $\frac{Z + z_0}{z + z_0}$ nach (5) = 4, nach (6) = 2,674, d. h. die Kompression ist beendet, wenn im ersten Fall die Luft auf $^1/_4$, im zweiten auf $^1/_{2{,}674}$ ihres ursprünglichen Volumens zusammengedrückt ist.

3. **Arbeit zum Betrieb der Pumpe.** Diese Arbeit zerfällt in:

a) Arbeit zum Zusammendrücken der Luft. Man denke sich, es sei von der Pumpe ein Wasserkörper vom Volumen F v, also dem Gewicht 1000 F v auf eine Höhe H zu heben, so kann dieser Teil der Arbeit dargestellt werden durch

$$1000\,F\,v\,.\,H. \tag{7}$$

Die Höhe H aber hat für die drei Fälle, wo $h - h_0$ sehr klein ist, wo $h - h_0$ beliebig groß ist, jedoch auf die Temperaturerhöhung durch das Zusammendrücken nicht Rücksicht genommen wird, und endlich wo diese Aenderung berücksichtigt werden muß, folgende Werte:

$$H = h - h_0. \tag{8}$$

$$H = 2{,}303\,h_0 \log \frac{h}{h_0}. \tag{9}$$

(10) $$H = 3{,}439\, h_0 \left[\left(\frac{h}{h_0}\right)^{0{,}291} - 1\right].$$

In Gleichung (9) ist 2,303 der Faktor, mit welchem der gemeine Logarithmus einer Zahl multipliziert werden muß, um den natürlichen Logarithmus dieser Zahl zu erhalten.

Die Konstanten der Gleichung (10) aber ergeben sich aus 1,41 durch folgende Ansätze (S. 347)

$$\frac{1{,}41 - 1}{1{,}41} = 0{,}291; \qquad \frac{1{,}41}{1{,}41 - 1} = 3{,}439.$$

b) Arbeit zur Erzeugung der Austrittsgeschwindigkeit. Die Luft gehe durch den Querschnitt $F_,$ der Drucköffnung mit der Geschwindigkeit x, so hat man zur Bestimmung von x, wenn k den Kontraktionskoefficienten bezeichnet:

(11) $$k\,x\,F_, = F\,v.$$

Somit ist der Luft per Sekunde folgende Arbeit zu erteilen:

(12) $$1000\, F\, v \cdot s\, \frac{x^2}{2g}.$$

c) Förderhöhe zur Ueberwindung der Nebenhindernisse. Diese beträgt 0,20 H bis 0,25 H und sei mit $H_,$ bezeichnet.

Hiernach wird (S. 315)

(13) $$\text{Gesamtarbeit} = 1000\, F\, v \left(H + H_, + s\, \frac{x^2}{2g}\right),$$

(14) $$\text{Wirkungsgrad} = \frac{Q}{Q + Q_,} \cdot \frac{H}{H + H_, + s\, \frac{x^2}{2g}}.$$

Beisp. Ein Cylindergebläse liefere einem Hochofen per Sekunde 0,5 kbm Luft von 10° Temperatur und 10,33 m Druck. Der Ueberdruck in der Windleitung zunächst der Pumpe sei 0,95 m. Wie ist die Anordnung zu treffen?

Zufolge der Voraussetzung ist . . . $H = 0{,}95,\ h_0 = 10{,}33$ m.
Daher der Druck in der Leitung . . $10{,}33 + 0{,}95 = 11{,}28$ „
Specifisches Gewicht . . . . $s = \frac{0{,}001293 \,.\, 11{,}28}{10{,}33\,(1 + 0{,}00367 \,.\, 10)} = 0{,}00136.$
Geschwindigkeit unter der Düse $V = \sqrt{\frac{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 0{,}95}{0{,}00136}} = 117$ m.
Volumen der verdichteten Luft . . . $0{,}5 \cdot \frac{10{,}33}{11{,}28} = 0{,}457$ kbm.
Querschnitt der Düsenöffnung (für $k = 0{,}9$) . $\frac{0{,}458}{0{,}9 \,.\, 117} = 0{,}0044$ qm.
Querschn. d. Leitung für 12 m Geschwindigk. $0{,}457 : 12 = 0{,}0381$ „
Luftverluste in der Pumpe, angenommen . . . $Q_, = 0{,}20$ Q.
Volumen, vom Kolben in 1 Sek. beschrieben
$F\,v = (1 + 0{,}20) \,.\, 0{,}5 = 0{,}60$ kbm.
Nimmt man als Kolbengeschwindigkeit an . . . $v = 0{,}75$ m,
so wird der Querschnitt des Cylinders . . . . $F = 0{,}80$ qm.
Hublänge, angenommen . . . . $Z = 1{,}25$ m.
Anzahl der Kolbenspiele per Minute . . . $\frac{60 \,.\, 0{,}75}{2 \,.\, 1{,}25} = 18.$

Gewicht des zu hebenden Wassers . 1000 . 0,80 . 0,75 = 600 kg.

Wert des Spannungsverhältnisses . . . $\frac{h}{h_0} = \frac{11,28}{10,33} = 1,092$.

Höhe, auf welche das Wasser zu heben:

nach Formel (8) . . . . H = 0,950 m.

" " (9) 2,303 . 10,33 log 1,092 . . = 0,907 "

" " (10) 3,439 . 10,33 $[(1,092)^{0,291} - 1] = 0,850$ "

Nun sei das Verhältnis der Querschnitte . . $F : F_, = 20$,

folglich nach (11) für k = 0,60 Geschwindigk. $x = \frac{20 . 0,625}{0,60} = 25$ m,

nach (12) die entsprechende Höhe $s \cdot \frac{x^2}{2g} = 0,00136 \cdot \frac{625}{2 . 9,81} = 0,043$.

Nimmt man noch für Nebenhindernisse . . . . $H_, = 0,25\,H$

so erhält man nach (13) und (8) die Arbeit

$$600\,(0,95 + 0,25 + 0,043) = 746 \text{ mkg}$$

Arbeit nach dem Mariotte'schen Gesetze . $746 \cdot \frac{0,907}{0,950} = 712$ "

Arbeit nach dem Poisson'schen Gesetze . . $746 \cdot \frac{0,850}{0,950} = 667$ "

und den Wirkungsgrad nach (14) $\frac{0,5}{0,6} \cdot \frac{0,95}{0,95 + 0,25 + 0,043} = 0,637$.

III. Von den Ventilatoren.

Sie stimmen in ihrer Einrichtung und Wirkungsweise überein mit den Centrifugalpumpen und können daher nach den gleichen Regeln berechnet werden, unter Berücksichtigung folgender Modifikationen:

1. Die Wassersäulen-Höhe H wird zur Höhe $\frac{H}{s}$ einer Luftsäule von gleichem Gewicht.

2. Für große Höhen H, sowie für kleine Winkel β wird die Umfangsgeschwindigkeit des Rades sehr groß. Um sie herunterzubringen, wendet man zwei Mittel an:

a) Man nimmt Winkel α klein, wie bei Centrifugalpumpen, und Winkel β groß, z. B. 70° bis 90° an. Dadurch kehren die Schaufeln ihre konkave Seite der Richtung der Bewegung zu, ihre Krümmung ist also derjenigen der Centrifugalpumpen entgegengesetzt. Allein in diesem Falle wird die absolute Austrittsgeschwindigkeit x groß; es soll daher das Gehäuse rings um das Rad herum weit sein. Es empfiehlt sich sogar, das Rad centrisch im Gehäuse anzubringen. Dadurch dreht sich die Luft in koncentrischen Schichten im Gehäuse herum; da sie aber zusammengepreßt ist, so entweicht stetig so viel davon nach der Steigröhre als die Pumpe gleichzeitig liefert. Beim Wasser geht die Höhe $\frac{x^2}{2g}$ durch Stoß verloren, weil das Wasser unelastisch ist. Bei Luft als einem elastischen Körper ist dies nicht der Fall. Gleichwohl muß wegen der Bewegung im Gehäuse ein Teil der Höhe $s\,\frac{x^2}{2g}$ in Rechnung fallen. Dieser Teil sei $k\,s\,\frac{x^2}{2g}$, worin k einen echten Bruch bezeichnet, der

für jedes Konstruktionssystem einen besonderen Wert hat und durch Erfahrung zu bestimmen ist.

b) Man nimmt die Halbmesser des Rades groß an, z. B. $r = 1{,}5\,r_0$, $R = 3\,r$ u. s. w.

Beisp. Es soll einem Kupolofen durch einen Ventilator per Sekunde 0,4 kbm Luft zugeführt werden mit 0,20 m Wasser-Manometerstand. Wie ist der Ventilator anzulegen?

Es sei der Druckverlust vom Ventilator bis zum Ofen $= 0{,}07$ m.
Daher der Wasser-Manometerstand am Ventilator
$H = 0{,}20 + 0{,}07 = 0{,}27$ „
Es sei die Flügelstellung zu den Umfängen (S. 314)
$\beta = 80^0;\ \alpha = 20^0$,
so erhält man z. Bestimmg. der Umfangsgeschwindigk. nach (18)
S. 314 $v^2 = g\,\frac{H}{s}\left(1 + \sqrt{1 + \cotg^2\beta}\right) = 9{,}81 \cdot \frac{0{,}27}{0{,}0013} \cdot 2{,}0154 = 4106.$
Daher Umfangsgeschwindigkeit des Rades . $v = \sqrt{4106} = 64$ m.
Es sei das Verhältnis der Radhalbmesser . . . $R : r = 3$,
so wird die Geschwindigkeit am innern Umfang $u' = v' = 64 : 3 = 21{,}3$ m
und die Resultante aus u' und v', nämlich $x' = 2 . 21{,}3 \sin 10^0 = 7{,}40$ „
Es kann nun angenommen werden (statt $v_0 = x'$) . . $v_0 = 6{,}00$ „
Daher Querschnitt der Eintrittsöffnung ($k = 0{,}7$) $\frac{Q}{k\,v_0} = \frac{0{,}4}{0{,}7 . 6} = 0{,}096$ qm.
Querschnitt für je eine der beiden Oeffnungen . . . . $= 0{,}048$ „
Davon sei angefüllt von der Radnabe . . . . $= 0{,}007$ „
Daher Querschnitt bis zum innern Radumfang . . . . $= 0{,}055$ „
und Halbmesser dieser Oeffnung . . . . $r_0 = 0{,}14$ m.
Innerer Radhalbmesser, angenommen . . . . . . $r = 0{,}18$ „
Aeußerer Radhalbmesser . . . . $R = 3r = 0{,}54$ „
Anzahl Umdrehungen per Minute . . . . $\frac{60 . 64}{2 R \pi} = 1132.$
Nach (16), S. 314 ist $u^2 = v^2 - 2g\,\frac{H}{s} = 4106 - 4075 = 31.$
Daher Austrittsgeschwindigkeit der Schaufel nach $u = \sqrt{31} = 5{,}567$ m.
Man nehme an: Flügeldicke $e = 0{,}01$; Anzahl Flügel $i = 6$,
so wird die innere Radbreite nach (20) $\frac{0{,}4}{(1{,}131 \sin 20 - 0{,}01 . 6) . 21{,}3} = 0{,}058$ m,
wofür der Störungen wegen zu nehmen . . . . . . $= 0{,}073$ „
und die äußere Radbreite . . $\frac{0{,}4}{(3{,}393 . \sin 80 - 0{,}01 . 6) . 5{,}567} = 0{,}022$ „
Gewicht Wasser, das zu heben . . . . $1000\,Q = 400$ kg.
Hubhöhe, wegen schwacher Verdichtung nach (8), S. 329 $H = 0{,}27$ m.
Wegen der Nebenhindernisse zu heben um . . . . $H_1 = 0{,}25$ H.
Wert der Geschwindigkeitshöhe nach (17), S. 314 $s\,\frac{x^2}{2g} = 0{,}99$ H.
Davon in Rechnung zu bringen (für $k = 0{,}33$) . . . . $= 0{,}33$ H.
Daher Arbeit . . . . . . $400\,(1 + 0{,}25 + 0{,}33) . 0{,}27 = 171$ mkg.
Wirkungsgrad . . . . $\frac{1}{1 + 0{,}25 + 0{,}33} = 0{,}633.$

Die Wärme und ihre Verwendung.

78. Von der Wärme.

I. Ausdehnung der Körper durch die Wärme.

1. **Ausdehnung fester Körper.** Man unterscheidet die Längen-, Flächen- und Körperausdehnung.

a) Lineare Ausdehnung. Die Ausdehnungen eines und desselben Körpers innerhalb gewisser Grenzen sind gleichförmig, d. h. es nimmt für eine gleiche Anzahl von Graden die Länge eines Stabes um einen gleichen Teil seiner ursprünglichen Länge zu.

Wenn die Länge eines Körpers = 1, so nimmt seine Länge zu um:

Für die Stoffe:	von 0—100° C.	Für die Stoffe:	von 0—100° C.
Aluminium	0,002224	Kupfer	0,001712
Blei	0,002828	Marmor, schwarz . .	0,000426
Bronze	0,001816	Mauerziegel . . .	0,000550
Cement	0,001435	Messing	0,001867
Flintglas, engl. . .	0,000812	Platin	0,000856
Glasröhren, bleifrei .	0,000876	Schmiedeisen . . .	0,001231
Gold	0,001514	Silber, rein . . .	0,001951
Granit	0,000868	Stahl, nicht gehärtet	0,001078
Graphitware (3 Gr., 1 Thon)	0,000293	Stahl, gehärtet . .	0,001239
Gußeisen	0,001110	Töpferzeug	0,000457
Hartlot (1 Zink, 2 Kupfer)	0,002058	Wismut	0,001392
Holz (Tannen) . .	0,000352	Ziegelstein, gewöhnl.	0,000550
Kalkspat	0,002860	Ziegelstein, feuerfest .	0,000493
		Zink, gegossen . . .	0,002968
		Zinn, fein	0,002283

Für höhere Temperaturen ist die Ausdehnung nicht mehr gleichförmig, sondern die Zunahmen werden immer beträchtlicher. So ist nach Petit und Dulong die Ausdehnung

	von 0—300° C.		von 0—300° C.
für Glas . .	0,003252,	für Eisen .	0,004405,
„ Platina .	0,002755.	„ Kupfer .	0,005650.

Beisp. Um wie viel dehnt sich eine Eisenstange von 5 m Länge aus, wenn ihre Temperatur von 20° C. auf 90° C. erhöht wird?

Längenausdehnung für 100° C. . $5 \cdot 0{,}001231 = 0{,}006155$ m,

" " 70° C. $\frac{70}{100} \cdot 0{,}00615 = 0{,}004308$ "

Um die Ausdehnung der nämlichen Eisenstange bei Erhitzung von 220° bis 290° C. zu finden, müßte man den Koefficienten 0,001231 durch 0,004405 : 3 oder 0,001468 ersetzen.

b) Flächen- und Körperausdehnung. Es sei die Kante eines Würfels = 1. Nimmt die Temperatur des Würfels um 1° zu, so gehe die Kantenlänge über in 1 + a; mithin wird

Fläche einer Seite $(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2$.
Würfelinhalt $(1 + a)^3 = 1 + 3a + 3a^2 + a^3$.

Allein die lineare Ausdehnung a ist sehr klein, mithin können die Glieder a^2, $3a^2$ und a^3 vernachlässigt werden. Daher nimmt die Fläche 1 um 2a und das Volumen 1 um 3a zu. Die Flächenausdehnung ist somit das 2fache und die des Volumens das 3fache der linearen Ausdehnung.

Durch abwechselndes Erhitzen und Erkalten tritt eine bleibende Ausdehnung ein. Princep hat beobachtet, daß eine gußeiserne Retorte nach dreimaligem abwechselnden Erhitzen und Erkalten eine bleibende Ausdehnung um 0,0376 angenommen hat.

Versuche von Brix mit Roststäben ergaben folgende Resultate: Ein Roststab von 1,1 m Länge war nach 3 Tagen der Heizung um 0,0049 m, nach 17 Tagen um 0,0114 m und nach 30 Tagen um 0,0212 m, also sehr nahe um 2 Prozent bleibend ausgedehnt. Nach längerem Gebrauch erfolgten nur noch vorübergehende Ausdehnungen.

Bei gewissen Konstruktionen muß die Ausdehnung berücksichtigt werden. Obschon die Ausdehnung für kleine Temperaturerhöhungen, wie sie z. B. in der Atmosphäre vorkommen (von 45° C. höchstens), sehr klein ist, so kann sie doch schon bedeutende und oft sehr nachteilige Veränderungen hervorbringen, und es ist daher ratsam, bei allen großen Konstruktionen, sowie bei allen denjenigen, die viel Genauigkeit erfordern, diese in Rechnung zu bringen.

Gußeiserne Röhren würden z. B. durch die gewöhnlichen Veränderungen der Temperatur leicht aus einander gerissen und selbst zerbrochen werden, wenn man sie nicht mit einigen Kompensatoren (Fig. 3, S. 225) versehen würde. Bei Leitungen für Dampf oder warme Luft kann dies ebenfalls notwendig werden, da bei denselben bedeutende Veränderungen der Temperatur stattfinden.

2. **Ausdehnung flüssiger Körper.** Die Ausdehnung der Flüssigkeiten (Volumenausdehnung) ist weniger gleichförmig als die der festen Körper; im allgemeinen ist sie desto größer, je niedriger der Siedepunkt und je mehr sich die Temperatur dem Siedepunkt nähert. Bei einer Wärmezunahme von 0° bis 100° C. ist die Volumenausdehnung für

Leinöl	0,072	Salzsole, gesättigt . .	0,050
Olivenöl	0,080	Schwefelsäure	0,060
Terpentinöl	0,070	Wasser	0,043
Quecksilber	0,018	Weingeist	0,100.

Das Wasser ist bei 4° C. am dichtesten; sein Volumen beträgt nach Rossetti, wenn das von 4° = 1 gesetzt wird:

Temperatur.	Volumen.	Temperatur.	Volumen.	Temperatur.	Volumen.
− 10° C.	1,001858	25° C.	1,00229	65° C.	1,01964
5	1,000702	30	1,00425	70	1,02256
0	1,000129	35	1,00586	75	1,02566
+ 4	1	40	1,00770	80	1,02887
7	1,000067	45	1,00971	85	1,03221
10	1,000253	50	1,01195	90	1,03567
15	1,000841	55	1,01439	95	1,03931
20	1,00174	60	1,01691	100	1,04312

Das Wasser dehnt sich aus von 4° C. aufwärts und abwärts. Daraus erklärt sich das häufige Zerbersten von Wasserleitungsröhren oder sonstigen Gefäßen, in welchen sich das Wasser bei großer Kälte in Eis verwandelt.

3. **Ausdehnung luftförmiger Körper.** Die Ausdehnung der atmosphärischen Luft sowie aller andern Gasarten und Dämpfe ist gleichförmig. Sie beträgt für je 1 Centigrad:

Atmosphärische Luft	0,003665	Ammoniakgas . .	0,003713
Sauerstoffgas . .	0,003685	Kohlenoxyd . . .	0,003666
Wasserstoffgas . .	0,003661	Kohlensäure . . .	0,003710.

Beisp. Es trete Luft von 0° in einen Ofen und werde daselbst bis auf 1000° erwärmt. Um wie viel wächst dadurch das Volumen?

Zunahme des Volumens 1 bei 1° Erwärmung . . = 0,00367
Mithin Zunahme bei 1000°. . . . 0,00367 . 1000 = 3,670
Daher ganzes Volumen . . . . 1 + 3,670 = 4,670.

Wird ein Luft- oder Gaskörper, bei gleichbleibendem Druck, um t Grade erwärmt, so wächst sein Volumen im Verhältnis von

$$1 : 1 + 0{,}00367\ t.$$

Seine Dichtigkeit aber nimmt dabei im umgekehrten Verhältnisse ab. Wird hierauf dieser Luft- oder Gaskörper in diesem erwärmten Zustand stärker oder schwächer gepreßt, so ändert sich seine Dichtigkeit direkt, sein Volumen dagegen verkehrt proportional dieser letztern Pressung.

Beisp. 1. Das Volumen eines Kilogramms Luft bei 0° und unter einem Druck von 0,76 m Quecksilberhöhe ist = 773 Liter (S. 46); welches ist das Volumen von 1 kg derselben Luft bei einer Temperatur von 46° C. und unter einem Druck von 1,25 m?

Das Volumen von 1 kg Luft unter 0,76 m Druck, wenn dasselbe von 0° auf 46° C. erwärmt wird, wächst heran zu

$$773\,(1 + 0{,}00367 \,.\, 46) = 903{,}5 \text{ Liter}.$$

Wenn diese so erwärmte Luft einem Druck von 1,25 m Queck-

silberhöhe (statt 0,76 m) ausgesetzt wird, so nimmt ihr Volumen im umgekehrten Verhältnis dieser Pressungen ab, und wird somit

$$903{,}5 \cdot \frac{0{,}76}{1{,}25} = 549{,}3 \text{ Liter.}$$

Beisp. 2. Ein Kubikmeter atmosph. Luft bei 0^0 und unter einem Druck von 1 Atmosphäre wiegt 1,293 kg; wie viel wiegt 1 kbm derselben Luft bei 66^0 und unter einem Drucke von 2 Atmosphären?

Wird 1 kbm Luft bei 1 Atmosphäre Druck von 0^0 auf 66^0 C. erwärmt, so dehnt sie sich aus im Verhältnis von

$$1 : 1 + 0{,}00367 \,.\, 66 \text{ oder } 1 : 1{,}24222.$$

Die Dichtigkeit, also auch das Gewicht von 1 kbm nimmt im umgekehrten Verhältnis ab, somit ist sein Gewicht

$$1{,}293 \cdot \frac{1}{1{,}24222} = 1{,}041 \text{ kg.}$$

Wird solche Luft einem Druck von 2 statt von 1 Atmosphäre ausgesetzt, so ist das Gewicht von 1 kbm das Doppelte oder 2,082 kg.

Beisp. 3. Ein Kubikmeter Luft habe 1 Atmosphäre Druck bei 0^0 Temperatur. Sie werde auf 0,6 kbm zusammengedrückt und hierauf so erwärmt, daß sie 3 Atmosphären Spannung annimmt. Bei welcher Temperatur t ist dies der Fall?

Das Volumen der Luft von 1 Atmosphäre Druck und t Graden Temperatur ist $= 1 + 0{,}00367\, t$, somit bei 3 Atmosphären Druck nur $^1/_3$ davon. Dieses Volumen muß $= 0{,}6$ kbm sein. Mithin ist

$$\frac{1 + 0{,}00367\, t}{3} = 0{,}6; \text{ folglich } t = 218^0.$$

4. **Gesetz von Gay-Lussac.** Es seien v, p, t und s Volumen, Druck, Temperatur und specifisches Gewicht eines abgeschlossenen Gaskörpers; ebenso v_0, p_0, t_0 und s_0 dasselbe für einen andern Zustand desselben Gaskörpers, so besteht folgender Zusammenhang:

$$\frac{p\,v}{p_0\,v_0} = \frac{1 + 0{,}00367\, t}{1 + 0{,}00367\, t_0}; \qquad \frac{p\,s_0}{p_0\,s} = \frac{1 + 0{,}00367\, t}{1 + 0{,}00367\, t_0}.$$

5. **Specifisches Gewicht eines Gases.** Nimmt man in der zweiten dieser Formeln s_0 als specifisches Gewicht eines Gaskörpers von 0^0 und einem Druck von 76 cm Quecksilberhöhe (1 Atm.) an, so erhält man als specifisches Gewicht dieses Gases unter einem Drucke p und einer Temperatur t (S. 336)

$$s = \frac{s_0}{1 + 0{,}00367\, t} \cdot \frac{p}{76}.$$

II. Temperaturmessung.

1. **Thermometer.** Die im Gebrauche befindlichen sind eingeteilt nach Réaumur, Celsius (Frankreich) und Fahrenheit (England), und zwar vom Gefrierpunkt bis zum Siedepunkt des Wassers bei dem

ersten in 80, bei dem zweiten in 100, bei dem dritten in 180 Grade, so daß

		Gefrierpunkt.	Siedepunkt.
Réaumur	R	0^0	80^0
Celsius (Centigrade)	C	0^0	100^0
Fahrenheit . . .	F	32^0	212^0

Die Reduktion dieser Grade unter einander ergibt sich durch die Verhältnisse

$$C = \frac{5}{4} R, \quad C = \frac{5}{9}(F - 32), \quad R = \frac{4}{9}(F - 32).$$

Wärmegrade über den Nullpunkten werden mit + (plus), solche unter den Nullpunkten mit — (minus) bezeichnet.

Beisp. Wie viel Grade nach Réaumur und Fahrenheit sind $+20^0$ C.? Und wie viel Réaumur'sche und Centigrade machen 41 Fahrenheit'sche?

a) Anzahl Grade nach Réaumur . . . . . $\frac{4}{5} \cdot 20 = 16^0$.

Anzahl Grade nach Fahrenheit . . . $32 + \frac{9}{5} \cdot 20 = 68^0$.

b) Es sind . . . . . 41^0 F. $= \frac{4}{9}(41 - 32) = \frac{4}{9} \cdot 9 = 4^0$ R.

Ebenso . . . . . 41^0 F. $= \frac{5}{9}(41 - 32) = \frac{5}{9} \cdot 9 = 5^0$ C.

Tabelle über die Reduktion der Wärmegrade.

Centigr.	Réaum.	Fahrenh.	Centigr.	Réaum.	Fahrenh.	Centigr.	Réaum.	Fahrenh.
— 40	— 32	— 40	45	36	113	135	108	275
35	28	31	50	40	122	140	112	284
30	24	22	55	44	131	145	116	293
25	20	13	60	48	140	150	120	302
20	16	4	65	52	149	155	124	311
17 7/9	14 2/9	0	70	56	158	160	128	320
15	12	+ 5	75	60	167	165	132	329
10	8	14	80	64	176	170	136	338
5	4	23	85	68	185	175	140	347
0	0	32	90	72	194	180	144	356
+ 5	+ 4	41	95	76	203	185	148	365
10	8	50	100	80	212	190	152	374
15	12	59	105	84	221	195	156	383
20	16	68	110	88	230	200	160	392
25	20	77	115	92	239	205	164	401
30	24	86	120	96	248	210	168	410
35	28	95	125	100	257	215	172	419
40	32	104	130	104	266	220	176	428

2. **Thermometrische Substanzen.** Alkohol gefriert bei — 100° und dehnt sich bis + 10° ziemlich regelmäßig aus. Daher kann diese Flüssigkeit zum Messen niedriger Temperaturen verwendet werden. Allgemein bedient man sich des Quecksilbers, das zwischen — 30° und + 350° flüssig ist. Ganz gleichförmig dehnen sich die Gase aus; daher wird das Luftthermometer als das zuverlässigste angesehen.

Stellt man die Punkte 0 und 100 beim Quecksilber- und Luftthermometer gleich, so zeigen beide Instrumente folgende Temperaturen an:

Luftthermom.	0	50	100	150	200	250	300	350°
Quecksilberth.	0	49,6	100	151	202,8	255,2	308,3	362,2°

3. **Pyrometer.** Sie dienen zum Messen höherer Temperaturen. Dasjenige von Wedgewood beruht auf der Eigenschaft des Thones, sich in der Hitze zusammenzuziehen, das von Daniell auf der ungleichen Ausdehnung von Platin und Eisen, sodann werden auch Pyrometer verwendet, welche auf der Verschiedenheit der Schmelzpunkte gewisser Legierungen beruhen, wie solche für ganz hohe Temperaturen aus Gold und Silber, Gold und Platin 2c. S. auch pag. 343.

4. **Glühfarben.** Nach Pouillet kann aus der Glühfarbe einer Platinlamelle auf die Höhe der Temperatur geschlossen werden nach folgender Skala:

Beginnendes Rot . .	525°	Dunkelorange . . .	1100°
Dunkelrot	700	Hellorange	1200
Beginnendes Kirschrot .	800	Weißglühen	1300
Kirschrot	900	Stark weiß	1400
Hellkirschrot	1000	Blendend weiß . . .	1500

III. Wärmemessung.

1. **Maßeinheit.** Die Wärmemenge, welche nötig ist, um die Temperatur eines Stoffes von 1 kg Gewicht um 1° C. zu steigern, heißt specifische Wärme. Diejenige des Wassers wird zur Einheit angenommen und unter Wärmeeinheit oder Kalorie diejenige Wärmemenge verstanden, welche es braucht, um die Temperatur von 1 kg Wasser von 0° auf 1° C. zu erhöhen.

2. **Specifische Wärme des Wassers.** Sie ist nicht konstant. Es sei
- t die Temperatur des Wassers in Centigraden,
- q die in 1 kg Wasser enthaltene Wärmemenge bei t Graden,
- c die specifische Wärme des Wassers, d. h. jene Wärme, welche nötig ist, um 1 kg Wasser von t um einen Grad zu erwärmen und
- c' die mittlere specifische Wärme, also $c' t = q$, so ist nach Regnault

$$q = t + 0{,}000\,02\,t^2 + 0{,}000\,0003\,t^3$$
$$c = 1 + 0{,}000\,04\,t + 0{,}000\,0009\,t^2.$$

Hieraus ergibt sich folgende Zusammenstellung:

t	q	c	c'	t	q	c	c'
0	0,000	1,0000	—	120	120,806	1,0177	1,0067
10	10,002	1,0005	1,0002	130	130,997	1,0204	1,0076
20	20,010	1,0012	1,0005	140	141,215	1,0232	1,0087
30	30,026	1,0020	1,0009	150	151,462	1,0262	1,0097
40	40,051	1,0030	1,0013	160	161,741	1,0294	1,0109
50	50,087	1,0042	1,0017	170	172,052	1,0328	1,0121
60	60,137	1,0056	1,0023	180	182,398	1,0364	1,0123
70	70,210	1,0072	1,0030	190	192,779	1,0401	1,0146
80	80,282	1,0089	1,0035	200	203,200	1,0440	1,0160
90	90,381	1,0109	1,0042	210	213,660	1,0481	1,0174
100	100,500	1,0130	1,0050	220	224,162	1,0524	1,0189
110	110,641	1,0153	1,0058	230	234,708	1,0568	1,0204

Hiernach enthält 1 kg Wasser von 100 Graden 100,5 Kalorien Wärme; seine mittlere spec. Wärme ist 1,005. Multipliziert man daher 1,005 mit der Temperatur 100, so erhält man den Wärmegehalt = 100,5 Kalorien.

Wird dagegen 1 kg Wasser von 100° auf 101° erwärmt, so braucht es dazu 1,013 Kalorien Wärme.

Da die Veränderlichkeit von c gering ist, so kann die specifische Wärme des Wassers in gewöhnlichen Fällen konstant = 1 angenommen werden.

Beisp. 1. Es enthalten 5 kg Wasser von 10 Graden = 5 . 10 oder 50 Kalorien Wärme; wird dieses Wasser auf 6° abgekühlt, so gibt es 5 . 4 oder 20 Kalorien ab und enthält noch 5 . 6 = 30 Kalorien. Wird es auf 0° abgekühlt, so gibt es diese 30 Kalorien ebenfalls vollständig ab.

Beisp. 2. Mischt man 4 kg Wasser von 10° C. mit 3 kg von 60° C., so enthält die Mischung 4 . 10 + 3 . 60 = 220 Wärmeeinheiten. Diese verteilen sich auf 4 + 3 = 7 kg Wasser gleichförmig; folglich enthält jedes Kilogramm

$$\frac{4 \cdot 10 + 3 \cdot 60}{4 + 3} = \frac{220}{7} = 31\frac{3}{7}$$

Wärmeeinheiten. Die Temperatur der Mischung ist daher $31\frac{3}{7}$° C.

3. Specifische Wärme fester und tropfbarflüssiger Körper.

Alkohol (spec. Gew. 0,81)	0,700	Eis	0,5037
„ (spec. Gew. 0,79)	0,622	Eisen, geschmiedet . .	0,1138
Aluminium	0,2143	„ gegossen . . .	0,1298
Antimon	0,0508	Feldspat	0,1911
Blei	0,0314	Fichtenholz	0,6500
Eichenholz	0,5700	Glas	0,1777

Glockengut	0,1100	Quecksilber	0,0333
Gold	0,0324	Schwefel	0,2026
Koks aus Steinkohle .	0,2031	Schwerspat	0,1068
Kalkspat	0,2046	Silber	0,0570
Kohle von Holz . . .	0,2415	Stahl	0,1185
Kupfer	0,0952	Steinkohle	0,2008
Messing	0,0939	Talg, geschmolzen . . .	0,3000
Metall von Rose . . .	0,0338	Thon, gebrannt . . .	0,1950
Mörtel	0,2230	Wasser	1,0000
Nickel	0,1086	Wismut	0,0308
Olivenöl	0,3096	Zink	0,0956
Platin	0,0324	Zinn	0,0562

Beisp. 1. Wie viel Kalorien erfordern 15 kg Eisen, dessen Temperatur von 20° C. auf 200° C. erhöht werden soll?

Die Temperaturerhöhung ist . . . 200 — 20 = 180° C.
Nun ist die mittlere specif. Wärme des Eisens = 0,1138.
Mithin erfordern jene 15 kg Eisen 15 . 180 . 0,1138 = 307,36 Kalorien.

Beisp. 2. Welche Temperatur erhält eine Mischung von 1 kg Wasser von 100° C. mit 5 kg Alkohol von 32° C.?

1 kg Wasser von 100° C. enthält . . . . . . = 100 Kalorien,
5 kg Alkohol von 32° C. enthalten 5 . 32 . 0,7 = 112 „
somit enthalten 6 kg der Mischung zusammen . = 212 „
Nun enthält 1 kg Wasser bei 1° eine Wärme . = 1 „
und 5 kg Alkohol enthalten bei 1° eine Wärme 5 . 0,7 = 3,5 „
Also alle 6 kg enthalten bei 1° die Wärme . . = 4,5 „
Mithin ist die Temperatur der Mischung 212 : 4,5 = 47,1° C.

Wie bei Wasser, so steigt die specifische Wärme auch bei andern Stoffen mit der Temperatur. Nach Byström ist dieselbe z. B. bei

Temperatur:	0°	100°	200°	300° C.
Gußeisen . .	0,1277	0,1295	0,1339	0,1407
Schmiedeisen .	0,1116	0,1138	0,1188	0,1267
Gußstahl . .	0,1178	0,1198	0,1246	0,1321

Nach Dülong und Petit ist die mittlere spec. Wärme zwischen den Grenzen

für	0—100°	0—300°	für	0—100°	0—300°
Antimon .	0,0507	0,0547	Kupfer .	0,0940	0,1013
Eisen . .	0,1098	0,1218	Zink . .	0,0927	0,1015

4. **Specifische Wärme der Gase.** Dehnt sich ein Gas aus, so sinkt seine Temperatur und Spannkraft. Um diese Spannkraft wieder auf ihren frühern Wert zu bringen, muß dem Gas Wärme zugeführt werden. Es werde nun eine Gasmasse um 1° C. erwärmt, sie könne sich jedoch so ausdehnen, daß ihre Spannkraft dieselbe bleibt, so besteht die hierzu nötige Wärme aus zwei Teilen: aus einem Teil, der bei gleichbleibendem Volumen die Temperatur erhöht, und aus einem Teil, der bei dieser Temperatur das Volumen vergrößert. Die specifische Wärme bei gleichem Druck ist daher größer als bei gleichem Volumen, bei atmosphärischer Luft im Verhältnis von 1 : 1,41.

Specifische Wärme der Gase und Dämpfe:

Stoffe.	Für gleiches Volumen.	Für gleichen Druck.
Atmosphärische Luft	0,1686	0,2377
Aetherdampf	0,3411	0,4810
Kohlensäure	0,1535	0,2164
Kohlenoxyd	0,1758	0,2479
Sauerstoff	0,1548	0,2182
Stickstoff	0,1730	0,2440
Wasserstoff	2,4146	3,4046
Wasserdampf	0,3337	0,4806

Gelangt bei einer Feuerung atmosphärische Luft durch den Rost in den Feuerraum, so bleibt der Druck der Luft sehr annähernd derselbe; daher muß die Zahl 0,2377 bei Berechnung der Wärme, welche die Luft im Feuerraum aufnimmt, verwendet werden.

5. **Temperaturbestimmung mittelst Wärmegehalt.** Ein Stück Kupfer werde in den Raum gebracht, dessen Temperatur zu bestimmen ist. Nachdem man annehmen kann, das Kupfer habe die Temperatur jenes Raumes erreicht, werfe man es in Wasser, so werden sich die Temperaturen beider Stoffe ausgleichen. Es seien

P, T, c Gewicht, Temperatur und spec. Wärme des Kupfers,
p, t Gewicht und Temperatur des Wassers (vor dem Versuche) und
t_1 die gesuchte mittlere Temperatur nach der Ausgleichung;

so ist die Wärme beider Körper vor dem Eintauchen $= cPT + pt$, diejenige nach dem Eintauchen $= (cP + p)\,t_1$; folglich durch Gleichsetzen

$$t_1 = \frac{cPT + pt}{cP + p}.$$

IV. Aenderung des Aggregatzustandes.

1. **Latente Wärme.** Wird ein fester Körper erwärmt, so nimmt fortwährend seine Temperatur zu, bis er anfängt zu schmelzen. Dann aber bleibt dieselbe konstant, bis er ganz geschmolzen ist, weil alle die Wärme, die er während des Schmelzprozesses aufnimmt, zur Auflösung des Gleichgewichtszustandes seiner Moleküle verwendet wird.

So bedarf 1 kg Eis oder Schnee von 0°, um in Wasser von 0° verwandelt zu werden, 79 Kalorien Wärme. Diese 79 Kalorien sind also *latente* oder *gebundene* Wärme, weil sie nichts zur Erhöhung der Temperatur beitragen. Verwandelt sich 1 kg Wasser von 0° in Eis von 0°, so werden die gebundenen 79 Kalorien wieder *frei*.

Ebenso bedarf eine Flüssigkeit beim Uebergang in Dunst oder Dampf eine bestimmte Wärmemenge, z. B. Wasser bei 100 Graden 537 Kalorien. Für folgende Stoffe ist die latente Wärme:

Beim Schmelzen.		Beim Sieden.	
Blei .	5,3 Kalor.	Alkohol (spec. Gewicht 0,825)	245 Kalor.
Eis .	79,0 „	Schwefeläther	168 „
Silber	21,7 „	Terpentinöl	4 „
Zinn .	14,2 „	Wasser bei 100°	537 „

Beisp. 1 kg Eis von 0° werde in 10 kg Wasser von 20° gebracht. Welche Temperatur nimmt das Wasser nach dem Schmelzen des Eises an?

Die gesuchte Temperatur sei t, so nimmt das Eis 79 + t Kalorien auf. Die 10 kg Wasser kühlen sich ab auf 20 — t Grade, geben also 10 (20 — t) Kalorien ab. Daher durch Gleichsetzen beider Werte

$$79 + t = 10\,(20 - t);\ t = 11^0.$$

Das Wasser kühlt sich daher um 9° ab.

2. **Schwindmaß.** Die Zusammenziehung nach einer Dimension beim Festwerden beträgt von der Länge im kalten Zustand bei

Blei	1/92	Messing	1/65
Glockenmetall	1/63	Schmiedeisen, rotwarm	1/88
Gußeisen	1/96	Zink	1/62
Kanonenmetall	1/134	Zinn	1/147

3. Gefrier-, Schmelz- und Siedegrade.

Stoffe.	Gefrierpunkt.	Schmelzpunkt.	Siedepunkt bei 1 Atm. Druck.
Aethylen (C_2H_4)	— 103°	—	—
Alkohol, rein	— 100	— 100°	78,3°
Antimon	—	424	—
Asphalt	—	100	—
Benzin	—	—	80,8
Blei	—	290 bis 335	—
Bronze	—	900	—
Butter	—	26 „ 32	—
Eisen, gegossen	—	1050 „ 1275	—
Eisen, geschmiedet	—	1500 „ 1600	—
Gold	—	1250	—
Harz von Fichten	—	135	—
Jod	—	—	175
Kampfer	—	175 „ 198	205 bis 215
Kautschuk	—	120	—
Kohlenoxyd	— 87	—	—
Kohlensäure	— 186	—	—
Kreosot	—	—	203
Kupfer	—	1054 „ 1330	—
Leinöl	— 20	— 20	387
Luft, atmosph.	— 192,2	—	—
Mohnöl	— 18	— 18	—
Olivenöl	—	2,5	—
Palmöl	—	26	—
Paraffin	—	—	370

Stoffe.	Gefrierpunkt.	Schmelzpunkt.	Siedepunkt bei 1 Atm. Druck.
Pech	—	85	—
Petroleum	—	—	106
Phosphor	—	44	290
Platin	—	1775	—
Quecksilber	— 39,5	— 39,5	350
Rapsöl	— 4	— 4	—
Salpetersäure(sp.G.1,52)	—	—	86
Salzsäure (spec. G. 1,21)	—	—	20
Sauerstoff	— 184	—	—
Schlacke von Hochöfen .	—	1045bis1160	—
Schwefel	—	113	440
Schwefeläther	—	—	37
Schweinefett (Schmalz) .	—	41	—
Seife	—	33	—
Silber	—	945	—
Stahl (Gußstahl) . .	—	1300 „ 1400	—
Stearin	—	61	—
Stickstoff	— 193,1	—	—
Talg von Rindern . .	—	43	—
Terpentinöl	— 10	— 10	156
Wachs	—	68 „ 76	—
Wasser, rein	0	0	100
Wasser, Meer= . . .	— 2,5	— 2,5	103,7
Wismut	—	256	—
Zink	—	430	1300
Zinn	—	235	—

4. Schmelzgrade von Mischungen.

Bestehend aus Teilen			Schmelzgrade.		Beim Druck von Atmosphären.
Wismut.	Blei.	Zinn.	Centigr.	Réaumur.	
8	5	3	100	80	1
8	8	4	113,3	90,6	$1^1/_2$
8	8	8	123,3	98,6	2
8	10	8	130	104	$2^1/_2$
8	12	8	132,4	105,9	3
8	16	14	142,3	113,8	$3^1/_2$
8	16	12	145,4	116,3	4
8	22	24	153,8	123	5
8	32	36	160,2	128,1	6
8	32	28	166,8	133,2	7
8	30	24	172	137,6	8

5. Kältemischungen.

Substanzen in Gewichtsteilen.	Temperatur sinkt von	auf
1 Wasser, 1 salpetersaures Ammoniak	+ 10° C.	— 15,5° C.
10 verdünnte Salzsäure, 16 Glaubersalz	+ 10	— 17,8
1 verdünnte Salzsäure, 1,5 Glaubersalz	+ 10	— 16
1 Schnee, 4 Vitriolöl, 1 Wasser . .	0	— 32,5
1 Schnee, 1 verdünnte Schwefelsäure	— 7	— 51
1 Schnee, 1/2 verdünnte Salpetersäure	— 23	— 49
1 Schnee oder gestoßenes Eis, 1 Kochsalz	0	— 17,8
1 Schnee, 1,3 Chlorcalcium	0	— 49
1 Schnee, 0,625 Salzsäure	0	— 33
1 Schnee, 0,4 Kochsalz, 0,2 Salmiak	0	— 24
1 Schnee, 0,416 Kochsalz, 9,416 salpetersaures Ammoniak	0	— 31

V. Wärme als Arbeit.

1. **Mechanisches Aequivalent der Wärme.** Wärme kann in Arbeit und Arbeit in Wärme verwandelt werden. Die absolute Arbeit, welche eine Kalorie Wärme leistet, wird mechanisches Aequivalent der Wärme genannt. Dieses Aequivalent ist nach Versuchen von Joule 424 mkg. Diesen Wert nennt man auch die Joule'sche Zahl.

Eine Kalorie Wärme, in mechanische Arbeit umgesetzt, ist somit im stande, ein Gewicht von 424 kg 1 m hoch zu heben, oder: die mechanische Arbeit, welche verrichtet werden muß, um ein Gewicht von 424 kg 1 m hoch zu heben, kann eine Kalorie Wärme erzeugen.

2. **Fühlbare und latente Wärme.** Wenn ein Körper Wärme aufnimmt, so wird diese Wärme zur Erhöhung der Temperatur und zur Ausdehnung des Volumens verwendet. Bei der Ausdehnung sind die Kräfte, womit die kleinsten Teile zusammenhängen, zu überwinden; ebenso der äußere Druck, der auf die Oberfläche des Körpers ausgeübt wird. Die Wärme verrichtet daher bei der Ausdehnung eine innere und eine äußere Arbeit.

Es sei Q die Wärmemenge, welche auf 1 kg Stoff übergehe; dabei steige die Temperatur um t Grade und es werden auf innere Arbeit J und auf äußere Arbeit A Kilogramm-Meter Arbeit verwendet, so muß sein

$$(1) \qquad Q = ct + \frac{J}{424} + \frac{A}{424}.$$

Hierin stellt c die specifische Wärme des Körpers dar, d. h. diejenige Wärme, welche nur die Temperatur erhöht.

Der erste Teil ct rechts heißt sensible oder fühlbare Wärme, der zweite und dritte Teil zusammen latente oder gebundene Wärme und zwar der zweite innere, der dritte äußere latente Wärme.

Beisp. 1. Schmilzt Eis im Freien, so ist während des Vorganges $t = 0$ und $A = 0$; es wird daher obige Gleichung zu $J = 424\ Q$. Und da $Q = 79$ Kalorien per 1 kg Eis, so werden somit $424 \cdot 79 = 33496$ mkg Arbeit auf das Schmelzen von 1 kg Eis verwendet.

Beisp. 2. Wird Luft um 1^0 erwärmt und sie kann sich nicht ausdehnen, so wird $A = 0$. Da aber auch die innere Arbeit verschwindend klein, also $J = 0$ ist, so wird $Q = ct$. Mithin bezeichnet c die specifische Wärme für gleiches Volumen. Es ist also $c = 0{,}1686$.

Läßt man bei der Erwärmung die Luft sich ausdehnen, so aber, daß der äußere Druck gleich bleibt, so wird $J = 0$; also bezeichnet alsdann Q die spec. Wärme für gleichen Druck; es ist also $Q = 0{,}2377$.

3. **Ableitung der Joule'schen Zahl.** Man denke sich 1 kbm Luft von 1 Atmosphäre Druck in einem Cylinder von 1 qm Grundfläche, also 1 m Höhe eingeschlossen. Diese Luft werde um 1^0 erwärmt, ohne daß der Druck steigt, so muß der Kolben, mittelst dessen die Luft abgeschlossen wird, fortgeschoben werden um einen Weg $= 0{,}00367$ m (s. Ausdehnungskoefficient der Luft). Daher liefert ein Teil der auf die Luft verwendeten Wärme eine Arbeit $= 10330 \cdot 1{,}00367$ mkg; es macht dies für 1 kg Luft eine Arbeit

$$\frac{10330 \cdot 0{,}00367}{1{,}293} = 29{,}32 \text{ mkg}.$$

Man wende nun nach Robert Mayer Formel (1) auf diesen Vorgang an, indem man die Unbekannte mit x bezeichnet und setzt

$$t = 1^0;\ c = 0{,}1686;\ Q = 0{,}2377;\ J = 0;\ A = 29{,}32,$$

so wird

$$0{,}2377 = 0{,}1686 + \frac{29{,}32}{x};\ \text{folglich } x = 424.$$

4. **Absolute Nulltemperatur.** Die Wärme besteht in einem Schwingungszustand kleinster Teile. Hören diese Schwingungen auf, so ist auch keine Wärme mehr vorhanden. Der entsprechende Punkt auf der Temperaturskala heißt absoluter Nullpunkt der Temperatur und die Temperaturgrade, von diesem Punkte aus gezählt, absolute Temperatur.

Ein Gaskörper habe bei 0^0 ein Volumen $= 1$, seine Temperatur nehme um t Grade ab; so wird sein Volumen noch $1 - 0{,}00367\,t$ sein. Die Abkühlung gehe so weit fort, daß das Volumen verschwindend klein werde. Für diesen Fall ist

$$1 - 0{,}00367\,t = 0,\ \text{also } t = \frac{1}{0{,}00367} = 273^0.$$

Weiter kann die Abkühlung nicht stattfinden. Daher liegt der absolute Nullpunkt 273^0 (nach Celsius) unter dem gewöhnlichen Nullpunkt.

5. **Kreislauf nach Carnot.** Ein Stoff kann durch den Einfluß der Wärme seinen Zustand in verschiedener Weise ändern. Es können Wärmeänderungen vorgehen bei konstantem Volumen, bei konstantem Druck, bei konstanter Temperatur ꝛc. Bleibt die Temperatur konstant, so nennt man die Zustandsänderung isothermisch; wird während der Zustands-

änderung dem Körper weder Wärme zugeführt noch entzogen, so heißt die Aenderung *adiabatisch*. Es ist dabei $Q = 0$.

Zu den kalorischen Maschinen gehören die Heißluftmaschine, die Gaskraftmaschine, die Dampfmaschine rc. Bei allen bedarf es eines Stoffes als Träger der Wärme, welche im Cylinder der Maschine arbeitet. Bei jeder Umdrehung geht jener Stoff in verschiedene Zustände über. Nach Carnot sollen sie folgende sein:

Während des Vorwärtsganges des Kolbens arbeitet der Stoff anfangs isothermisch mit einer absoluten Temperatur T_0, indem man ihm eine Wärmemenge Q_0 zuführt, welche vorweg in Arbeit verwandelt wird; dann adiabatisch, so daß die Temperatur auf T sinkt. Hierauf beginnt der Rücklauf des Kolbens, ohne jedoch jenen Stoff aus dem Cylinder austreten zu lassen. Dabei geht am Stoff zuerst eine isothermische Aenderung vor bei der Temperatur T, indem ihm eine Wärmemenge Q entzogen wird, um eine Volumenverminderung herbeizuführen; endlich macht er durch Zusammendrücken noch eine adiabatische Aenderung durch; die Perioden dieser beiden Aenderungen sind so gewählt, daß der Stoff wieder vollkommen in den Anfangszustand mit der Temperatur T_0 gelangt, um den Kreislauf von neuem in gleicher Weise durchzumachen.

Dann verhält sich die Wärmemenge $Q_0 - Q = \Delta Q$, welche im Cylinder in Arbeit verwandelt wird, zum gesamten Wärmeaufwand Q_0, wie die im Cylinder eingetretene Temperatursenkung $T_0 - T = \Delta T$ zur Anfangstemperatur, so daß

$$(2) \qquad \frac{Q_0 - Q}{Q_0} = \frac{T_0 - T}{T_0} \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta Q}{Q_0} = \frac{\Delta T}{T_0}.$$

Der in dieser Weise durchgeführte Kreislauf heißt ein vollkommener, weil mittelst desselben mehr nützliche Arbeit gewonnen wird als mit jedem andern. Denn das Verhältnis

$$(3) \qquad \frac{T_0 - T}{T_0} = 1 - \frac{T}{T_0}$$

ist der Wirkungsgrad der Maschine. Dieser wird also groß, wenn T_0 groß und T klein sind. Man kann sich nun einen geschlossenen Kreislauf denken, bei welchem die Stoffänderungen weder isothermisch noch adiabatisch sind. Dabei gibt es aber immer eine höchste Temperatur T_0 und eine niederste T. Jene teilweisen Aenderungen, welchen keine so weit aus einander gelegenen Grenztemperaturen entsprechen, geben nach (3) einen kleineren Wirkungsgrad. Man wird also, bei gegebenem Wärmeaufwand, die obere Grenztemperatur T_0 so lange aufrecht erhalten als möglich, ebenso die untere T. Dann aber kann der Uebergang von einer Grenztemperatur zur andern nur ein adiabatischer sein.

Beisp. Wenn bei einer kalorischen Maschine die Temperaturen im Cylinder am Anfang und Ende des Hubes 180° und 50° nach Celsius sind, so wird

$$T_0 = 273 + 180 = 453; \; T_0 - T = 180 - 50 = 130;$$

$$\frac{T_0 - T}{T_0} = \frac{130}{453} = 0{,}287,$$

d. h. es werden beim vollkommenen Kreislauf, ohne Rücksicht auf die Nebenhindernisse, 28,7 Prozent der aufgewendeten Wärme in Arbeit verwandelt.

6. **Gesetz von Poisson.** Geht ein abgeschlossener Gaskörper vom Volumen v, dem Drucke p und der absoluten Temperatur T auf adiabatischem Wege über in einen andern Zustand mit dem Volumen v_0, dem Drucke p_0 und der absoluten Temperatur T_0, so ist

$$(4) \qquad p\,v^n = p_0\,v_0^n \quad \text{oder} \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^n,$$

worin der Exponent n das Verhältnis zwischen der specifischen Wärme des Gases bei gleichem Druck zu dem für gleiches Volumen bezeichnet.

Für atmosphärische Luft sind diese specifischen Wärmemengen 0,2377 und 0,1686; daher

$$n = \frac{0{,}2377}{0{,}1686} = 1{,}41.$$

Beisp. Wird Luft auf die Hälfte des Volumens zusammengedrückt, so würde nach dem Mariotte'schen Gesetze ihr Druck auf das 2fache steigen; allein nach dem Gesetze (4) steigt der Druck auf

$$\left(\frac{v_0}{v}\right)^n = (2)^{1{,}41} = 2{,}65737.$$

Die Erklärung zum Gesetze (4) ist folgende. Es sei das Gas in einem Cylinder, versehen mit einem Kolben, eingeschlossen. Bei der Kompression drückt nun der Kolben auf das Gas; er rückt vorwärts, verrichtet also Arbeit, welche auf das Gas übergeht und sich in Wärme umwandelt. Daher muß die Temperatur des Gases steigen und damit auch der Druck und zwar in höherm Maße als ohne Temperatursteigerung.

Bei der Expansion des Gases findet das Umgekehrte statt: das Gas drückt auf den Kolben; es gibt dadurch Arbeit ab, welche von dem Wärmevorrat des Gases geliefert wird. Also muß seine Temperatur sinken und damit auch der Druck und zwar stärker als ohne Abnahme der Temperatur.

Das Gesetz von Gay-Lussac, S. 336, Ziffer 4, gibt

$$(5) \qquad \frac{p\,v}{p_0\,v_0} = \frac{1 + 0{,}00367\,t}{1 + 0{,}00367\,t_0} = \frac{\frac{1}{0{,}00367} + t}{\frac{1}{0{,}00367} + t_0} = \frac{273 + t}{273 + t_0} = \frac{T}{T_0},$$

wo t, t_0 die Temperaturen nach Celsius und T, T_0 die absoluten Temperaturen bezeichnen.

Eliminiert man aus (4) und (5) die Größen p, p_0, so folgt

$$(6) \qquad \frac{T}{T_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{n-1}.$$

Beisp. Die absolute Temperatur der Luft, welche nach dem letzten Beispiel auf die Hälfte des ursprünglichen Volumens zusammengedrückt wurde, sei 273 + 27 = 300°; wie groß ist diese Temperatur nach der Zusammendrückung?

Für $T_0 = 300^0$; $v_0 : v = 2$ und $n - 1 = 0{,}41$ wird

$$T = 300\,(2)^{0{,}41} = 398^0.$$

Also steigert die Arbeit, welche auf das Zusammendrücken verwendet wurde, die Temperatur um 98^0.

Eliminiert man aus (4) und (5) die Größen v, v_0, so wird

$$(7) \qquad \frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Die Luft des vorigen Beispieles steigerte bei der Kompression ihre Spannung von 1 auf 2,65737. Nach der Kompression hatte sie 398^0 Temperatur. Läßt man die Luft sich ausdehnen, indem sie Arbeit verrichtend den Kolben fortschiebt, bis der ursprüngliche Druck wieder erreicht ist, so gibt sie gerade so viel Wärme ab, als sie vorher aufgenommen hatte; also wird auch ihre Temperatur auf 300^0 sinken.

7. **Arbeit bei der Expansion und Kompression der Gase.** Man stelle Gleichung (4) geometrisch dar, indem man unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Achsensystems die Rauminhalte als Abscissen, die entsprechenden Pressungen als Ordinaten aufträgt und die Endpunkte der Ordinaten stetig mit einander verbindet. Es entsteht eine Kurve, welche das Gesetz der Druckänderung, sowohl bei der Expansion als der Kompression zur Anschauung bringt. Die Fläche, welche die Kurve mit der Abscissenachse und den Grenzordinaten einschließt, gibt die Arbeit an, welche die Zustandsänderung herbeiführt.

Nach dem Mariotte'schen Gesetze ist $n = 1$ und die Kurve wird zur gleichseitigen Hyperbel; nach dem Poisson'schen Gesetze ist n größer als 1 und es entsteht die adiabatische Kurve (S. 346).

Die Arbeit, welche bei der Expansion vom Gas auf den Kolben, bei der Kompression vom Kolben auf das Gas übergeht, sei mit A bezeichnet, so wird unter Anwendung der Hyperbel:

für Expansion: für Kompression:

$$(8) \quad A = p_0 v_0 \log n \left(\frac{v}{v_0}\right); \qquad A = p_0 v_0 \log n \left(\frac{v_0}{v}\right),$$

und unter Anwendung der adiabatischen Kurve

$$(9) \quad A = \frac{p_0 v_0}{n-1}\left[1 - \left(\frac{v_0}{v}\right)^{n-1}\right]; \quad A = \frac{p_0 v_0}{n-1}\left[\left(\frac{v_0}{v}\right)^{n-1} - 1\right].$$

Man könnte auch in den zwei letzten Gleichungen die Größen v und v_0 in der Klammer mittelst (6) und (7) ersetzen durch T, T_0 oder p, p_0.

Diese Formeln wendet man an bei Dampfmaschinen, Gaskraftmaschinen, Heißluftmaschinen rc.

8. **Geschwindigkeit, mit welcher Gas aus einem Behälter ausströmt.** Es sei v die gesuchte Geschwindigkeit; folglich die in 1 kg Gas enthaltene lebendige Arbeit $= 1 \cdot \frac{v^2}{2g}$. Diese erfordert zu ihrer Erzeugung Wärme, welche das abströmende Gas beim Durchgang durch

die Oeffnung liefert. Daher sinkt die Temperatur des Gases von T_0 auf T. Der Temperatursenkung $T_0 - T$ entspricht die Wärmemenge $c(T_0 - T)$, wo c die specifische Wärme des Gases für gleichen Druck bezeichnet. Diese Wärmemenge aber gibt die Arbeit $424\, c(T_0 - T)$. Daher durch Gleichsetzen beider Arbeiten

$$(10) \qquad v = \sqrt{2g \,.\, 424\, c\, (T_0 - T)}.$$

Kennt man den Druck p_0 im Raume, aus welchem das Gas kommt, und den Druck p im Raume, nach welchem das Gas geht, so findet man aus der Anfangstemperatur T_0 mittelst (7) die Endtemperatur T, so daß v berechnet werden kann.

Beisp. Das auf S. 325 angegebene Beispiel soll mittelst Formel (10) aufgelöst werden. Man hat $p_0 = 1{,}2$; $p = 1$ und $n = 1{,}41$.

Nun nehme man als Anfangstemperatur $T_0 = 273 + 20 = 293^0$.

Daher nach (7) die Endtemperatur $T = 293 \left(\frac{10}{12}\right)^{\frac{0,41}{1,41}} = 277{,}87^0$,

Geschwindigkeit nach (10) $v = \sqrt{2 \,.\, 9{,}808 \,.\, 424 \,.\, 0{,}2377 \,.\, 15{,}13} = 172{,}9\,m$.

Das Resultat nach der Bernoulli'schen Formel ist um 11,9 m kleiner, weil in dieser Formel auf die Temperatursenkung keine Rücksicht genommen ist.

79. Von den Brennstoffen.

Zu den Brennstoffen für industrielle Zwecke werden gezählt: Holz, Torf, Braunkohlen, Steinkohlen, Anthracit, Holzkohlen, Torfkohlen, Koke, Petroleum, Teer und Leuchtgas.

1. **Verkohlung.** Indem man Holz, Torf und Steinkohlen der Glühhitze aussetzt, ohne daß Luft hinzutreten kann (Prozeß der trocknen Destillation), entstehen aus ihnen Kohlen. Diejenigen der Steinkohlen werden Koks genannt.

Bei der Verkohlung liefern dem Gewichte nach:

Holz	0,20 bis 0,22	Steinkohle . .	0,35 bis 0,45
Torf	0,35 „ 0,45	Anthracit . .	0,45 „ 0,55

2. **Gewicht von 1 kbm Brennstoff.** Mittlere Werte sind:

Buchenholz in Scheitern	510 kg	Fichtenkohle	205 kg
Eichenholz „ „	540 „	Tannenkohle . . .	135 „
Tannenholz „ „	300 „	Steinkohle	830 „
Birkenkohle	225 „	Koks aus Meilern .	420 „
Buchenkohle . . .	245 „	Koks aus Gasfabriken	330 „

3. **Wassergehalt der Brennstoffe.** Alle Brennstoffe enthalten eine gewisse Quantität Wasser. Dieser Wassergehalt ist dem Gewichte nach für frisch gefälltes Holz:

Hainbuche . . .	0,37	Kiefer	0,51
Ahorn	0,38	Rotbuche . . .	0,44
Esche	0,41	Erle	0,51
Eiche	0,43	Ulme	0,52
Weißtanne . .	0,47	Fichte	0,50

Lufttrockenes Holz enthält 0,15 bis 0,25 Wasser. Durch Austrocknen in einer Temperatur von 136° C. entfernte Rumford aus jeder Holzart annähernd 0,10 Wasser. Gelegene Holzkohlen enthalten 0,10 bis 0,12 Wasser; Steinkohlen unmittelbar nach ihrer Gewinnung 0,02, später 0,04 bis 0,08 und mehr, je nach dem Grad der Verkleinerung; Koks, an der Luft gelegen, 0,06 bis 0,10.

4. **Gehalt an Asche.** Beim Verbrennen hinterlassen die Brennstoffe einen unverbrennbaren Rückstand, die Asche. Dieser Rückstand ist auf dem Herde größer als bei der chemischen Analyse. Auf dem Herde liefert an Asche:

Holz	0,02 bis 0,04	Holzkohle	0,06 bis 0,08
Torf, wenig erdig	0,05 „ 0,15	Steinkohle . . .	0,04 „ 0,20
Torf, stark erdig	0,20 „ 0,30	Torfkohle, gute Qual.	0,14 „ 0,18

5. **Chemische Zusammensetzung der Brennstoffe.** Die Bestandteile der Brennstoffe, nach Abzug der Rückstände, sind:

	Kohlenstoff.	Wasserstoff.	Sauerstoff.
Anthracit	0,938	0,030	0,032
Braunkohle, bituminös . . .	0,670	0,053	0,277
Braunkohle, erdig	0,742	0,059	0,199
Holzfaser	0,526	0,052	0,422
Holzkohle, bei 432° C. verkohlt	0,820	0,020	0,160
Petroleum	0,840	0,140	0,020
Steinkohle	0,817	0,052	0,131
Torf	0,604	0,060	0,336

6. **Heizkraft der Brennstoffe.** Die Heizkraft der Brennstoffe ist die Anzahl Wärmeeinheiten oder Kalorien (s. die specifische Wärme), welche 1 kg dieser Stoffe bei vollständiger Verbrennung entwickelt. Die Verbrennung besteht in einer chemischen Verbindung des Kohlenstoffes und Wasserstoffes der Brennmaterialien mit dem Sauerstoff der Luft. Zur Verbrennung gehört eine gewisse Temperatur, welche mindestens gleich der Entzündungstemperatur ist. Die festen und flüssigen Brennstoffe, wie Holz, Steinkohlen, Fett, werden in der Hitze zersetzt und erst die aus ihnen sich bildenden Zersetzungsprodukte verbrennen.

Derselbe Stoff liefert bei vollkommener Verbrennung immer die gleiche Heizkraft, unter welchen Umständen auch die Verbrennung erfolge. Brennstoffe von gleicher chemischer Zusammensetzung haben gleiche Heizkraft. Die folgenden Angaben über die Heizkraft sind mittlere Werte.

	Kalor.		Kalor.
Aethylen (C_2H_4)	13033	Leuchtgas	11580
Alkohol	7184	Petroleum	10500
Anthracit	7900	Phosphor	5747
Baumöl	9300	Rüböl	9300
Braunkohle, 1. Qualität .	6000	Stearin	9820
„ 2. Qualität .	5000	Steinkohle	
Graphit	7797	1. Qualität, 0,03 Asche	7500
Grubengas	13063	2. Qualität, 0,10 „	6900
Holz, trocken	4000	3. Qualität, 0,20 „	6100
„ 0,10 Wasser . . .	3600	Talg	8370
„ 0,25 Wasser . . .	3000	Terpentinöl	10852
Holzkohle, trocken . . .	7580	Torf, trocken, 1. Qual. .	4800
„ 0,07 Wasser .	7000	„ „ 2. Qual. .	3000
Koks, 0,10 Asche . . .	7000	„ „ 3. Qual. .	1500
„ 0,20 Asche . . .	6250	Torfkohle, 10,8 Asche . .	5800
Kohlenstoff, rein	8080	Wasserstoff	34462

Beisp. Wie viel Steinkohlen braucht es, um das Wasser für 40 Bäder, wovon jedes 300 Liter enthält, von 12° auf 45° C. zu erwärmen?

Gewicht des zu erwärmenden Wassers .	40 . 300 =	12000 kg.
Temperaturzunahme	45 − 12 =	33° C.
Erforderliche Wärmemenge . . .	12000 . 33 =	396000 Kal.
Wärmemenge, welche 1 kg Steinkohlen entwickelt	=	7000 „
Nützliche Wärme von 1 kg Steinkohlen	0,70 . 7000 =	4900 „
Mithin Steinkohlenmenge . . .	396000 : 4900 =	80,8 kg.

7. **Berechnung der Heizkraft.** Die Wärme, welche ein Brennstoff liefert, ist gleich der Summe aus den Wärmemengen, welche die chemischen Elemente, aus denen er besteht, bei der Verbrennung gäben, wobei jedoch der Teil Wasserstoff nicht zu rechnen ist, welcher mit dem Sauerstoff des Brennstoffes zu Wasser verbrennt.

Nun verbindet sich 1 Gewichtsteil Wasserstoff mit 8 Gewichtsteilen Sauerstoff zu Wasser. Enthält daher ein Brennmaterial den Wasserstoff und Sauerstoff in diesem Verhältnis, so liefert nur der Kohlenstoff bei der Verbrennung die Wärme. In diesem Falle ist nahezu das Holz.

Ist aber mehr Wasserstoff vorhanden, als dieses Verhältnis erfordert, so nennt man den Ueberschuß freien Wasserstoff. Alsdann sind der Kohlenstoff und der freie Wasserstoff die Bestandteile, welche Wärme liefern. Da aber der Gehalt an freiem Wasserstoff in allen Brennstoffen gering ist, so wird die Heizkraft dem Kohlengehalt nahezu proportional sein, also Holz und Torf am wenigsten, Anthracit am meisten Wärme entwickeln.

Beisp. Die Steinkohle, wie sie S. 350, Ziffer 5, aufgeführt ist, hat 0,131 : 8 = 0,0164 Teile gebundenen, also 0,052 − 0,0164 = 0,0356 Teile freien Wasserstoff. Hiernach liefert 1 kg dieser Kohle, frei von Asche und Wasser gedacht, folgende Wärme:

Durch den Kohlenstoff	8080 . 0,8170	= 6601,4	Kal.
„ freien Wasserstoff	34462 . 0,0356	= 1226,8	„
	zusammen	= 7828,2	„
Hiervon ab für 0,08 Asche und 0,02 Wasser . .		782,8	„
Bleibt Heizkraft dieser Steinkohle		7045,4	„

Nach Silbermann und Favre entwickelt 1 kg Kohlenstoff beim Uebergang in Kohlenoxyd, welches Gas der erste Grad der Verbrennung des Kohlenstoffes ist, 2473 Wärmeeinheiten, dagegen beim Uebergang in Kohlensäure, die das Resultat der vollkommensten Verbrennung ist, 8080 Wärmeeinheiten.

Verbrennt das Kohlenoxyd, das aus 1 kg Kohlenstoff entstanden ist, zu Kohlensäure, so werden 5607 Kalorien Wärme entwickelt. Nun sollte der Uebergang aus Kohlenstoff in Kohlenoxyd gerade so viel Wärme entwickeln wie der Uebergang aus Kohlenoxyd in Kohlensäure, also 5607 Kalorien. Da dies nicht der Fall ist, so müssen 5607 — 2473 = 3134 Kalorien auf die Umwandlung des festen in den gasförmigen Zustand verwendet werden; diese 3134 Kalorien sind die latente Wärme des Kohlenstoffes.

8. **Wirkungsgrad der Verbrennung.** Dieser ist das Verhältnis der Wärmemenge bei unvollkommener Verbrennung zur Wärmemenge bei vollkommener Verbrennung.

Beisp. Es verbrenne 1 kg reine Kohle. Gesetzt es verwandeln sich dabei 0,8 kg in Kohlensäure, der Rest in Kohlenoxyd, so erhält man

durch die Kohlensäure	0,8 . 8080	= 6464,0	Kal.
durch das Kohlenoxyd	0,2 . 2473	= 494,6	„
zusammen bei unvollkommener Verbrennung . .		= 6958,6	„
dagegen bei vollkommener Verbrennung . . .		= 8080	„
daher Wirkungsgrad der Verbrennung . .	$\frac{6958,6}{8080}$	= 0,861.	

9. **Luftmenge, welche zur Verbrennung erfordert wird.** Die atmosphärische Luft besteht aus 23 Gewichtsteilen Sauerstoff und 77 Teilen Stickstoff. Während der vollständigen Verbrennung verbinden sich nun 8 Gewichtsteile Sauerstoff mit 3 Gewichtsteilen Kohlenstoff zu Kohlensäure.

Somit verbinden sich mit 1 kg Kohlenstoff $^8/_3$ kg Sauerstoff; allein zu 1 kg Sauerstoff sind $^{100}/_{23}$ kg Luft, also zu $^8/_3$ kg Sauerstoff ist eine Luftmenge nötig gleich

$$\frac{8}{3} \cdot \frac{100}{23} = 11,59 \text{ kg}.$$

Enthält nun z. B. Holz 52,6 Prozent Kohlenstoff, so wird zur Verbrennung von 1 kg Holz eine Luftmenge erfordert

$$11,59 \,.\, 0,526 = 6,096 \text{ kg}.$$

Ein Kilogramm Wasserstoff verbindet sich mit 8 kg Sauerstoff zu

Wasser. Daher ist zur Verbrennung von 1 kg Wasserstoff eine Luftmenge nötig gleich

$$8 \cdot \frac{100}{23} = 34{,}78 \text{ kg}.$$

Bei Dampfkesselfeuerungen ist jedoch die Luftmenge annähernd 2mal größer zu nehmen, weil damit die Temperatur im Feuerraum gerade die richtige Höhe erreicht. Denn bei vollkommener Verbrennung mit dem Minimum der Luft stiege die Temperatur so hoch, daß Kessel und Ofen angegriffen würden (S. 347). Der Luftbedarf ist nach Péclet folgender:

Zu 1 kg Brennstoff.	Kleinste Luftmenge bei 0° C. kbm	kg	Gewöhnliche Luftmenge. kg
Holz, vollkommen trocken . . .	4,70	6,07	12,14
„ lufttrocken (0,20 Wasser) . .	3,60	4,65	9,30
Holzkohle (0,07 Asche u. 0,07 Wasser)	7,64	10,30	20,60
Koks mit 0,15 Asche	7,50	9,70	19,40
Steinkohle, mittlere Qualität . .	8,35	10,80	21,60
Torf, vollkommen trocken . . .	5,64	7,29	14,58
„ 0,20 Wasser	4,51	5,83	11,66
Torfkohle, 0,20 Asche	7,10	9,18	18,36

80. Von den Feuerungsanlagen.

Die Feuerungsanlagen bestehen aus drei Hauptteilen: dem Feuerraum, in welchem die Wärme entwickelt wird; den Kanälen, in welchen die Verbrennungsprodukte ihre Wärme an die Heizfläche abgeben, und dem Kamin, welches die Bewegung der Gase veranlaßt.

1. **Temperatur im Feuerraum.** Es seien zur Verbrennung von 1 kg Brennstoff b kg Luft erforderlich, so werden sich hieraus 1 + b kg Gase bilden. Hierbei steige die Temperatur im Ofen um t Grade. Nun ist die specifische Wärme der Verbrennungsgase durchschnittlich = 0,24, d. h. 1 kg dieser Gase nimmt 0,24 Kalorien Wärme auf bei einer Temperaturzunahme von 1 Grad; also nehmen 1 + b kg solcher Gase 0,24 (1 + b) t Kalorien auf bei der Erwärmung um t Grade. Diese Wärme ist aber gleich derjenigen, welche 1 kg Brennstoff bei der Verbrennung entwickelt und die wir mit H (Heizkraft) bezeichnen. Daher $0{,}24\,(1 + b)\,t = H$ und

$$(1) \qquad t = \frac{H}{0{,}24\,(1 + b)}.$$

Man erkennt hieraus, daß die Temperatur um so niedriger wird, je mehr Luft in den Feuerraum gelangt.

Anwendung auf Steinkohlen. Für mittlere Steinkohlen ist H = 7000 Kalorien, der kleinste Wert von b = 10,8 kg und der gewöhnliche Wert b = 21,6 kg. Folglich wird bei vollkommener Verbrennung

Temperatur für das Minimum der Luft . $\frac{7000}{0,24 . 11,8} = 2472^0$ C.

Temperatur für die doppelte Luftmenge . $\frac{7000}{0,24 . 22,6} = 1290$ „

Anwendung auf Holz. Für Holz mit 0,20 Wasser ist H = 3200 Kalorien, der kleinste Wert von b = 4,65 kg, der gewöhnliche b = 9,30 kg. Hieraus folgt:

Temperatur für das Minimum der Luft . $\frac{3200}{0,24 . 5,65} = 2359^0$ C.

Temperatur für die doppelte Luftmenge . $\frac{3200}{0,24 . 10,30} = 1295$ „

Um eine möglichst hohe Temperatur für gewisse Zwecke zu erzielen, bereitet man zuerst aus dem Brennmaterial Gase und läßt hierauf diese nach der Feuerstelle streichen, wo sie unter Zutritt von möglichst wenig Luft verbrennen.

Würde reine Kohle mit reinem Sauerstoff verbrannt, so wäre H = 8080 Kal., b = 8 : 3 = 2,667 kg und es müßte 0,24 durch 0,2164 (specifische Wärme der Kohlensäure) ersetzt werden. Die Temperatur der Verbrennung würde daher

$$t = \frac{8080}{0,2164\,(1 + 2,667)} = 10191^0 \text{ C.}$$

2. **Rost.** Der Brennstoff soll bequem aufgeschüttet werden können. Zweckmäßig ist ein kontinuierliches Einbringen in der Weise, daß die Vorwärmung des Brennstoffes stetig erfolgen kann. Die Luft soll durch den Brennstoff hindurch, nicht, wie dies noch bei Küchenherden und Zimmeröfen der Fall ist, über denselben weg ziehen. Denn dadurch erreicht man, daß alle Brennstoffteile zu vollkommener Verbrennung gelangen, ohne daß eine zu große Menge Luft dazu aufgewendet wird. Dieser Zweck wird erreicht durch den Rost. — Er besteht aus neben einander liegenden Stäben, auf denen der feste Brennstoff liegt, versehen mit Luftspalten, durch welche die Luft von außen zum Brennstoff gelangt. Passende Dimensionen über die Breite der Luftspalten und Roststäbe gibt folgende Zusammenstellung:

	Spaltenbreite.	Stabbreite.	Verhältnis der Oeffnungen zur ganzen Rostfläche.
Steinkohlen, fett . . .	8 mm	20 mm	$^2/_7$
Steinkohlen, mager . .	6	15	$^2/_7$
Kohlen, klein	4	10	$^2/_7$
Koks	8	24	$^1/_4$
Holz, Torf	6	24	$^1/_5$

Die Größe der Rostfläche richtet sich nach der stündlichen Brennstoffmenge. Es bedarf nämlich 1 kg Steinkohlen 16,7 kbm kalte Luft. Damit diese durch die Luftspalten mit 1,3 m Geschwindigkeit per Sekunde streiche, muß der kleinste Querschnitt der Oeffnungen sein

$$\frac{16,7}{1,3 . 3600} = 0,00357 \text{ qm.}$$

Damit daher 100 kg Steinkohlen in der Stunde verbrennen können, muß der Querschnitt der Rostspalten 0,357 qm und daher die Rostfläche annähernd $^7/_2 \cdot 0{,}357 = 1{,}25$ qm sein.

Man nimmt für das Verhältnis zwischen den Luftöffnungen und der Rostfläche häufig an:

	Rostfläche per 100 kg Brennstoff.	Brennstoffmenge per 1 qm Rostfläche.
Steinkohlen	1,25 qm	80 kg
Koks, Anthracit	0,8 „	125 „
Holz, Torf	1,0 „	100 „

Häufig wird die Rostfläche in Bruchteilen der Heizfläche angegeben.

a) Dampfkessel. Verbrennen auf 1 qm Rostfläche in der Stunde 80 kg Steinkohlen, liefert ferner 1 kg Steinkohlen 7 kg Dampf, so entstehen dabei 7 . 80 kg Dampf. Vermag endlich 1 qm Heizfläche 14 kg Dampf zu liefern, so ist das Verhältnis

$$\frac{\text{Rostfläche}}{\text{Heizfläche}} = \frac{14}{7 \cdot 80} = \frac{1}{40}.$$

Dieses Verhältnis richtet sich indessen nach der Stärke des Zuges und der Größe des Kessels. Man kann dasselbe nehmen für:

	Starken Zug.	Mäßigen Zug.	Schwachen Zug.
Kleine Kessel . . .	$^1/_{35}$	$^1/_{25}$	$^1/_{16}$
Mittlere Kessel . . .	$^1/_{50}$	$^1/_{36}$	$^1/_{22}$
Große Kessel . . .	$^1/_{60}$	$^1/_{42}$	$^1/_{28}$

Für Wasserkessel kann das gleiche Verhältnis benutzt werden.

b) Calorifères. Es ist dafür zu sorgen, daß die Wandflächen nicht verbrannt werden. Daher beträgt das Verhältnis zwischen Rostfläche und Heizfläche hier nur $^1/_{140}$ bis $^1/_{80}$.

3. **Feuerkanal.** Er wird von den heißen Gasen durchzogen. Die Wärme, welche dabei abgegeben wird, zerfällt in zwei Teile: der Teil, welcher durch die Heizfläche dringt, wird nützlich, der andere wird durch Flächen, welche nicht zur Heizfläche gehören, abgeleitet und geht verloren. Darum sollen diese Flächen möglichst klein sein und die Wärme schlecht leiten. Durch Erwärmung geht 1 kbm Luft von 0° über

in	5,42	4,67	3,94	3,20	2,47	1,73 kbm
bei	1200	1000	800	600	400	200°.

Behält der Kanal der ganzen Länge nach den gleichen Querschnitt bei, so verhalten sich die Geschwindigkeiten eines Gasstromes mit diesen Temperaturen umgekehrt wie die Rauminhalte; am Anfang des Kanales ist daher die Geschwindigkeit 3,1mal größer als am Ende desselben, was nicht von Nachteil ist, da die Geschwindigkeit von 1 bis 8 m steigen kann.

4. **Kamin.** Beginnt die Feuerung, so wird die kalte Luft durch eine warme ersetzt, deren Gewicht kleiner ist als das der kalten. Der Unterschied der Gewichte beider Luftsäulen ist die Kraft, womit die Bewegung im Kamin erfolgt. Diese Kraft hat der Luft Geschwindigkeit beizubringen und Widerstände zu überwinden: beim Eintritt der kalten

Luft durch den Rost und den Brennstoff in den Feuerraum; beim Durchgang der Luft durch die Feuerkanäle und das Kamin, und beim Austritt der heißen Luft durch Stoß gegen die kalte Schicht der Atmosphäre.

Ein Kamin muß hoch sein und es muß die Luft mit hoher Temperatur ins Kamin übertreten, wenn die Rostspalten wenig Fläche haben; wenn die Brennstoffschicht dick aufgetragen wird; wenn die Feuerkanäle eng und lang sind, und wenn diese Kanäle sich plötzlich verengen oder erweitern und ihre Richtung plötzlich ändern.

Querschnitt des Kanales. Erfahrungsgemäß kann man für mittlere Verhältnisse in Metermaßen nehmen:

$$\text{Kleinster Kaminquerschnitt} = \frac{0{,}0012\ \mathrm{L}}{\sqrt{\mathrm{H}}},$$

wobei H die Höhe des Kamins und L das Volumen kalte Luft bezeichnet, welches per Stunde auf dem Roste verbrannt werden soll.

Für schwach wirkende Nebenhindernisse nehme man 0,0009 und für starke Widerstände 0,0015 statt 0,0012.

Bei diesem Querschnitt erhält die Luftströmung im Kamin eine Geschwindigkeit von 1,6 m bis 3,2 m per Sekunde.

Beisp. Eine Dampfmaschine von 40 Pferden brauche per Stunde und per Pferd 1,2 kg Steinkohlen und jedes Kilogramm Steinkohlen 15 kbm kalte Luft; das Kamin sei 21 m hoch; welches soll sein kleinster Querschnitt sein?

Hier ist die Luftmenge per Stunde L = 1,2 . 40 . 15 = 720 kbm,
folglich der Kaminquerschnitt . . . . $\frac{0{,}0012 \cdot 720}{\sqrt{21}}$ = 0,19 qm.
Querschnitt per Pferd . . . . 0,19 : 40 = 0,0047 qm,
Querschnitt per 1 kg stündl. Kohlenverbrauch . . . = 0,0040 „

Nach dieser Regel hat man für 1 kg Kohlen per Stunde:

Höhe des Kamins . .	10	20	30	40 m,
Querschnitt des Kamins	0,0057	0,0040	0,0033	0,0028 qm.

Konstruktion des Backsteinkamins. Das Kamin hat die Form einer abgestumpften Pyramide oder eines abgestumpften Kegels und ist auf einen prismatischen oder cylindrischen Sockel aufgesetzt, in welchen der Feuerkanal einmündet.

Die Backsteine haben gewöhnlich 6 cm Dicke, 12 cm Breite und 24 cm Länge. Es ist nun zweckmäßig, der Wanddicke eine ganze Anzahl von Ziegelbreiten zu geben. Man teile daher die Höhe in Stockwerke, gebe dem obersten 12 cm Wanddicke, so wird das zweite Stockwerk 24 cm, das dritte 36 cm ꝛc. Wanddicke erhalten. Die Höhe der Stockwerke kann man von oben nach unten zunehmen lassen, etwa wie die Zahlen 3, 4, 5, 6 ꝛc. Macht man nun den untern Querschnitt noch etwa 1,4- bis 1,6mal größer als den obern, so ergibt sich die Form des Kamins.

Jener Oeffnung im Sockel, welche die Gase eintreten läßt, soll eine gleiche in der gegenüberliegenden Wand entsprechen.

Von Wichtigkeit ist eine genügende Tragkraft des Fundamentes. Dieses soll sich daher über eine große Bodenfläche ausdehnen.

Kamin aus Eisenblech. Die Wanddicke nimmt man oben 3 bis 4, unten 5 bis 6 mm.

5. **Künstliche Mittel zur Anfachung.** Man wendet an, um hohe Kamine zu vermeiden: das Ausblasen des verbrauchten Dampfes mit den Verbrennungsprodukten und Ventilatoren.

6. **Register.** Es ist dies ein Schieber oder eine Klappe, angebracht in dem Kanal, der vom Kessel nach dem Kamin führt, um den Zug regulieren oder auch ganz schließen zu können.

7. **Wirkungsgrad einer Feuerung.** Es gelange 1 kg Brennstoff zur Verbrennung. Es sei

k der Teil davon, welcher wirklich verbrennt (z. B. 0,98 kg),
k_1 der Wirkungsgrad der Verbrennung (S. 352),
t_1 die Temperaturabnahme, welche die Feuergase durch schädliche Abkühlung erleiden, und
t_2 die Temperatur der Gase beim Uebergang in das Kamin,

so ist mit Rücksicht auf Gl. (1) der Wirkungsgrad w der Feuerung

$$(2) \qquad w = k k_1 \left[1 - 0{,}24\,(1 + b)\,\frac{t_1 + t_2}{H}\right].$$

Der Wirkungsgrad wird daher groß, wenn k, k_1 und H groß sind, d. h. wenn aller Brennstoff vollkommen verbrennt und die Heizkraft desselben groß ist; ferner wenn b, t_1 und t_2 klein sind, d. h. wenn nicht mehr Luft in den Feuerraum gelangt als nötig und wenn die Wärmeverluste, herbeigeführt durch t_1 und t_2, klein sind.

Beisp. Für eine ungünstige Kesselfeuerung mit Steinkohlen kann man annehmen:

$$w = 0{,}97 \cdot 0{,}80 \left[1 - 0{,}24\,(1 + 3 \cdot 10{,}8)\,\frac{90 + 280}{6000}\right] = 0{,}392,$$

und für eine solche unter günstigen Umständen:

$$w = 0{,}99 \cdot 0{,}97 \left[1 - 0{,}24\,(1 + 2 \cdot 10{,}8)\,\frac{40 + 200}{7000}\right] = 0{,}782.$$

Im erstern Fall werden nur 39,2, im letztern 78,2 Prozent der Wärme nützlich, welche der Brennstoff liefern könnte. Bei einer guten Anlage soll dieser Wirkungsgrad 0,70 bis 0,75 betragen.

81. Wärmedurchgang durch eine Wand.

Es seien zu beiden Seiten einer Wand Flüssigkeiten von ungleicher Temperatur vorhanden, so wird die wärmere Flüssigkeit Wärme an die kältere abgeben. Nun kommen folgende Fälle vor: Die beiden Flüssigkeiten sind in Ruhe, oder eine bewegt sich längs der Wand oder beide bewegen sich längs derselben. In letzterem Falle bewegen sich die Flüssig-

keiten in gleicher oder entgegengesetzter Richtung (Parallel- und Gegenstrom).

1. **Gesetz des Wärmedurchganges.** Es bezeichne

F die Oberfläche der Wand, welche Wärme leitet,
e die Dicke der Wand,
T die Temperatur der Flüssigkeit, welche Wärme abgibt,
t die Temperatur der andern, welche Wärme aufnimmt,
Q die Wärmemenge, welche in der Stunde durch die Fläche F geht,
k die Wärmemenge, welche in der Stunde durch 1 qm Fläche geht, wenn die Temperaturen der beiden Flüssigkeiten nur um 1^0 von einander abweichen,

so ist die Wärmemenge proportional der Größe der leitenden Fläche und, für nicht zu dicke Wände, proportional der Temperaturdifferenz T — t; daher

$$Q = k (T - t) F. \tag{1}$$

Die Werte von k sind wesentlich bedingt durch die Fähigkeit der Wand, die Wärme aufzunehmen und abzugeben, weniger dagegen vom Leitungsvermögen im Innern der Wand. Daher ist bei dünnen Wänden, wie Fensterglas, Eisenblech 2c. die Dicke ohne merklichen Einfluß auf den Wärmedurchgangskoefficienten k. Ebenso sind die Werte von k bedingt durch den Umstand, ob die Wärme aufnehmende Flüssigkeit in Ruhe oder Bewegung ist (wie unter Ziffer 3 zu ersehen).

Kommt die Wanddicke in Rechnung, wie bei den Umfassungsmauern der Gebäude, so kann man dem Wert von k die Form geben

$$k = \frac{a}{b + c \cdot e}, \tag{2}$$

wo a, b, c konstante Größen bezeichnen.

Wenn an verschiedenen Stellen der Wand die Temperatur der einen oder andern Flüssigkeit verschiedene Werte hat, so bezeichnen T und t in Formel (1) die mittleren Werte dieser Temperaturen.

2. Werte für den Durchgangskoefficienten k:

Wärmeübergang in eine ruhende Flüssigkeit.	Natur der Wand.	Kalorien.
a) Aus Dampf in Wasser (Dampfschlange im Farbkessel, Vorwärmer des Speisewassers mittelst Abgangdampf 2c.) . .	Schmiedeisen	700
b) Aus Dampf in Luft (Dampfheizung)	Schmiedeisen	10
" " " " " .	Gußeisen	12
c) Aus Wasser in Luft (Warmwasserheizung)	Schmiedeisen	10
" " " " "	Gußeisen	12
d) Aus Luft in Wasser (Dampfkessel 2c.) .	Schmiedeisen	23
e) Aus Luft in Dampf (Dampfkessel über dem Dampfraum)	Schmiedeisen	11
f) Aus Luft in Dampf (Dampfüberhitzer) .	Gußeisen	13

Wärmeübergang in eine ruhende Flüssigkeit.	Natur der Wand.	Kalorien.
g) Aus Luft in Luft (Calorifère)		
für eine untere horizontale Fläche . .	Gußeisen	14
„ „ obere horizontale Fläche . . .	„	4
„ „ horizontale cylindrische Röhre .	„	6
„ „ vertikale cylindrische Röhre . .	„	8
h) Aus Luft in Luft (Heizung eines Gebäudes) für folgende Gebäudeteile:		
Zimmerboden		0,4
Zimmerdecke		0,5
Einfache Bretterwand		1,5
Zimmerthüren aus Tannenholz, 3 cm dick . .		1,8
Hausthüren aus Eichenholz		2,2
Glasfenster, einfache		3,7
Glasfenster, doppelte		2,0
Oberlichtfenster, einfach		5,4
„ doppelt		2,6
Mauer aus gewöhnlichen Backsteinen		$\frac{3}{1+5e}$
Mauer aus harten Backsteinen		$\frac{3}{1+4,5e}$
Mauer aus Sandsteinen		$\frac{3}{1+2,3e}$
Mauer aus Kalksteinen		$\frac{3}{1+1,5e}$

Die unter (h) aufgeführten Werte gelten für eine geschützte Lage der Gebäude. Sind diese dem Wind und Wetter ausgesetzt, so müssen die Koefficienten um 10 bis 30 Prozente erhöht werden. Für Mauern erhält man folgende Zusammenstellung:

Wärmedurchgangskoefficienten für gemauerte Wände.

Natur der Wand.	Wanddicke in Metern:				
	0,20	0,35	0,50	0,70	1,00
Backstein, gewöhnlich . .	1,50	1,08	0,87	0,66	0,50
Backstein, hart	1,57	1,17	0,95	0,75	0,57
Sandstein	2,06	1,66	1,39	1,15	0,91
Kalkstein	2,31	1,97	1,71	1,46	1,20

Beisp. 1. Es werde Dampf in einem Schlangenrohr durch Wasser geleitet, um dasselbe zu erwärmen. Wie groß muß die Heizfläche des Schlangenrohrs sein, wenn 400 Liter Wasser in 20 Minuten von 10° auf 80° zu erwärmen sind und der Dampf 100° Temperatur besitzt?

Das Rohr hat in 20 Minuten abzugeben 400 . (80 — 10) Kalorien, also in 1 Stunde das 3fache. Nun ist die mittlere Temperatur des Wassers 45° und der Wärmedurchgangskoefficient 700; daher

$$3 . 400 . (80 - 10) = 700 (100 - 45) F,$$

woraus als Wert für die Heizfläche F = 2,18 qm folgt.

Beisp. 2. Ein Fabriksaal habe 30 m Länge, 10 m Breite und 4 m Höhe. Er sei eingeschlossen von Kalksteinmauern von 0,62 m Dicke, welche 100 qm Fensteröffnung und 15 qm Thürflächen haben. Wenn die Temperatur im Freien — 16° und die im Saal während der Arbeitszeit + 16° sein soll, wie viel Wärme führen die Wände bei ruhiger Atmosphäre in der Stunde ab?

Für 1° Temperaturdifferenz erhält man folgende Wärmeverluste durch Abkühlung:

Boden	30 . 10 . 0,4 =	120 Kal.
Decke	30 . 10 . 0,5 =	150 „
Thüren	15 . 1,8 =	27 „
Fenster, doppelt	100 . 2,0 =	200 „
Mauern (innere Fläche) .	(302 — 100 — 15) . 1,55 =	290 „
Summe dieser Verluste	=	787 „
Verluste bei 32° Temperaturdifferenz .	787 . 32 =	25184 „

3. **Einfluß der bewegten Flüssigkeit auf den Wärmedurchgang.** Ueber den Durchgang der Wärme aus Dampf in Wasser gibt Ser folgenden Versuch an. Der Apparat bestand aus einem kleinen cylindrischen Dampfraum von 31,4 cm Länge. Durch diesen ging, der Achse entlang, eine kupferne Röhre von 1 cm innerm Durchmesser und 0,1 cm Wanddicke. Durch diese Röhre wurde Wasser mit verschiedener Geschwindigkeit geleitet und aus der Wassermenge, welche sich im Dampfraum (von 100°) durch Kondensation bildete, geschlossen auf die übergeführte Wärme. Die Resultate sind

Geschwindigkeit.	Wert von k.	Geschwindigkeit.	Wert von k.	Geschwindigkeit.	Wert von k.
m	Kal.	m	Kal.	m	Kal.
0,1	1400	0,5	2860	0,9	3480
0,2	2230	0,6	3020	1,0	3640
0,3	2250	0,7	3180	1,1	3800
0,4	2710	0,8	3330		

4. **Wärmedurchgang beim Einstrom-Apparat.** Beim Betrieb der Dampfkessel bleibt das Wasser (die kältere Flüssigkeit) in Ruhe, während heißere Gase, welche Wärme abgeben, die Heizfläche des Kessels bestreichen. Dabei sinke die Temperatur T auf T_1, so ist

$$F = \frac{Q}{k} \cdot \frac{2,303}{T - T_1} \log \frac{T - t}{T_1 - t}. \tag{3}$$

5. **Wärmedurchgang beim Parallel- und Gegenstrom-Apparat.** Beide Flüssigkeiten sind in Bewegung. Dabei sinke die Temperatur der heißern Flüssigkeit von T auf T_1, dagegen steige die der kältern von t auf t_1, so ist in genannter Reihenfolge

$$F = \frac{Q}{k} \cdot \frac{2,303}{(T - T_1) + (t_1 - t)} \log \frac{T - t}{T_1 - t_1},$$

$$F = \frac{Q}{k} \cdot \frac{2,303}{(T - T_1) - (t_1 - t)} \log \frac{T - t_1}{T_1 - t}.$$

Unter gleichen Umständen geht beim Gegenstrom mehr Wärme durch als beim Parallelstrom und bei diesem etwas mehr als beim einfachen Strom.

Beisp. 1. Es sollen in der Stunde 600 kg Wasser in einer Röhre vorgewärmt werden von 10° auf 60° mittelst Feuergasen, welche von einem Dampfkessel kommen und nun die Oberfläche der Vorwärmer in dem Maße bestreichen, daß dadurch ihre Temperatur von 300° auf 150° sinkt. Wie groß muß die Heizfläche des Vorwärmers sein für parallele und Gegenströmung?

Es ist $T = 300$; $T_1 = 150$; $t = 10$; $t_1 = 60$ und $k = 23$.
Steigerung der Temperatur des Wassers um $60 - 10 = 50°$;
daher Wärmezufuhr für 600 kg . . $Q = 600 \cdot 50 = 30000$ Kal.
Somit die Heizfläche für den Parallel- und Gegenstrom:

$$F = \frac{30000}{23} \cdot \frac{2,303}{150 + 50} \log \frac{290}{90} = 15 \log \frac{29}{9} = 7,623 \text{ qm.}$$

$$F = \frac{30000}{23} \cdot \frac{2,303}{150 - 50} \log \frac{240}{140} = 30 \log \frac{12}{7} = 7,023 \quad ''$$

Die Anlage mit Parallelstrom braucht also $7,623 - 7,023 = 0,6$ qm mehr Heizfläche als derjenige mit Gegenstrom.

Beisp. 2. In einem Dampfkessel werde die Temperatur auf 150° erhalten, während sich die Feuergase von 1200° auf 210° abkühlen. Welches ist die mittlere Temperatur dieser Gase?

Die gesuchte mittlere Temperatur sei x, so erhält man nach Formel (1) $Q = k(x - 150) F$. Setzt man diesen Wert von Q in (3), so folgt

$$1 = \frac{(x - 150) \cdot 2,303}{990} \log \frac{1050}{60}; \; x = 496°.$$

6. **Einfluß einer Isolierschicht.** Soll die Wärme durch einen Kanal, eine Röhre ꝛc. weiter geleitet werden, so daß möglichst wenig Wärme unterwegs verloren geht, so müssen die Wände entweder selbst schlecht leitende Massen sein oder mit solchen eingehüllt werden.

Brüll hat Versuche über die Abkühlung eines cylindrischen Gefäßes gemacht; es bestand aus Eisenblech von 0,07 mm Dicke, hatte 20 cm Weite und Höhe und war mit Oel angefüllt, das eine Anfangstemperatur von 160° besaß. Die Resultate sind:

	Hüllendicke mm	Temperatur		Zeit zur Abkühlung auf 102°.	Verhältnis der abgegebenen Wärme.
		äußere.	nach 5 St. Abkühlg.		
Metallwand, ohne Hülle .	—	16°	38°	1,80 St.	1
Eichenholz in Dauben . .	27	14,9	59	2,12	0,59
Korkholz	12	16,6	76	3,05	0,42
Masse aus Kork und Papier	15	16,8	81	3,40	0,36
Filz	20	16,5	87	4,03	0,32
Stroh, in der Längenrichtung	25	17	88	4,10	0,31

82. Heizung und Ventilation.

1. **Wärmequellen zur Beheizung.** Die zur Erwärmung eines Gebäudes erforderliche Wärme kann herkommen:

a) Von anwesenden Menschen. Jeder erwachsene Mensch gibt cirka 80 Kal. Wärme in der Stunde ab. Da sich gleichzeitig 0,055 kg Wasser ausscheiden, so verbraucht dasselbe zur Verdunstung cirka 35 Kal., welche als latent nichts zur Erwärmung beitragen. Daher verbleiben für die Zwecke der Heizung 45 Kal.

b) Von der Beleuchtung nachts. Ein Kilogramm Steinkohlengas gibt bei guter Verbrennung 7200 Kal. Wärme ab. Ein gewöhnlicher Brenner bedarf in der Stunde cirka 50 Gramme Gas; er liefert also $7200 \cdot 0{,}05 = 360$ Kal.

c) Von der Reibung der Maschinen. Sind Maschinen im Betrieb, so wird ein Teil ihrer Arbeit in Wärme umgesetzt. Ein Pferd liefert in der Stunde $75 \cdot 3600$ mkg, also $75 \cdot 3600 : 424 = 637$ Kal.

d) Von besonderen Heizeinrichtungen. Diese zerfallen in lokale und centrale Heizungen, die letzteren wieder in Luft-, Dampf- und Wasserheizungen.

2. **Wärmebedarf, veranlaßt durch Abkühlung.** Wird ununterbrochen gleichförmig geheizt, so tritt ein Beharrungszustand ein und es ist dann in der Stunde eine Wärmemenge nötig, die nach dem Vorhergehenden bestimmt werden kann und mit Q bezeichnet werde. Daher sind dann an einem Tag 24 Q Kal. nötig.

Wird aber die Heizung unterbrochen, z. B. auf 10 Stunden beschränkt, so ist alsdann nicht eine Wärmemenge = 10 Q nötig, sondern noch jene, welche während der Unterbrechungszeit, also während 14 Stunden, den Wänden entzogen wird. Die zuzuführende Wärme nimmt dann einen Wert an, der zwischen den Grenzwerten 10 Q und 24 Q liegt, doch näher dem erstern. Er beträgt 10 Q und noch nahe $^1/_5$ von der Differenz beider, also in diesem Falle cirka 12,8 Q. Mithin sind in der Stunde dem Gebäude 1,28 Q Wärmeeinheiten zuzuleiten. Der auf diese Weise berechnete Wärmebedarf wird für die Folge mit W bezeichnet.

3. **Wärmebedarf, veranlaßt durch die Ventilation.** Reine atmosphärische Luft besteht dem Volumen nach aus 21 Teilen Sauerstoff und 79 Teilen Stickstoff. Die Luft im Freien enthält durchschnittlich 0,0005 Raumteile Kohlensäure. Steigt der Kohlensäuregehalt der Luft (wegen Verbrennung des Sauerstoffs) auf das 3fache dieses Betrages, also auf 0,0015 des Luftvolumens, so beginnt er nachteilig auf die Gesundheit des Menschen zu wirken. Nun scheidet ein Mensch durch Lunge und Haut per Stunde 18 Liter Kohlensäure aus. Mithin bringt er per Stunde

$$18 : 0{,}0015 = 12000 \text{ Liter} = 12 \text{ kbm}$$

Luft in jenen Zustand, in welchem er der Gesundheit nachteilig wird.

Den Lokalitäten, deren Luft nur durch Menschen verdorben wird, soll folgende Luftmenge per Stunde und per Kopf zugeführt werden:

Schulhäusern, Kasernen, Fabriksälen . . 15— 25 kbm.
Krankenhäusern, in gewöhnlichen Zeiten . 30— 50 „
„ in Zeiten der Epidemie . 70—100 „

Durch die Beleuchtung eines Raumes wird der Sauerstoff der Luft ebenfalls verbraucht, die Luft also verdorben. Zu einem Stearinkerzenlicht ist etwa die Hälfte und zu einer mittleren Gasflamme das 4fache jener Luftmenge erforderlich, die ein Mensch bedarf.

Aus der Luftmenge, welche zur Ventilation verwendet wird und der Anzahl Grade, um welche sie erwärmt werden muß, ergibt sich der benötigte Wärmeaufwand.

4. **Feuchtigkeit der Luft.** Ein mit Luft erfüllter Raum vermag gerade so viel Wasser in dampfförmigem Zustand aufzunehmen wie ein luftleerer bei gleicher Temperatur. Erreicht dabei die Dampfmenge ihren höchsten Betrag, so ist die Luft gesättigt. Nach der mechanischen Wärmetheorie beträgt das Gewicht Wasserdampf in 1 kbm gesättigter Luft:

Temperatur.	Dampf. Gr.	Temperatur.	Dampf. Gr.	Temperatur.	Dampf. Gr.	Temperatur.	Dampf. Gr.	Temperatur.	Dampf. Gr.
–20°	0,78	+ 0°	3,88	20°	14,68	40°	46,36	60°	123,9
18	0,94	2	4,52	22	16,60	42	51,56	62	137,8
16	1,10	4	5,13	24	18,73	44	57,24	64	149,2
14	1,31	6	5,91	26	21,08	46	63,46	66	165,1
12	1,54	8	6,77	28	23,73	48	70,25	68	180,3
10	1,77	10	7,74	30	26,64	50	77,66	70	196,8
8	2,07	12	8,83	32	29,85	52	85,73	72	214,5
6	2,43	14	10,05	34	33,41	54	94,54	74	233,5
4	2,84	16	11,43	36	37,32	56	100,05	76	254,0
2	3,33	18	12,96	38	41,63	58	114,40	78	275,9

Nach dieser Tabelle ist z. B. Luft von + 16° gesättigt, wenn 1 kbm Luft 11,43 Gramm Wasser aufgelöst enthält. Käme aber weniger Dampf darin vor, z. B. nur 7,2 Gramm, so wäre das Verhältnis beider 7,2 : 11,43 = 0,63. Dieses Verhältnis heißt Sättigungsgrad, auch relative Feuchtigkeit. Geht die relative Feuchtigkeit unter 0,35, so empfindet man die Luft beim Atmen trocken; geht sie über 0,8 hinauf, so heißt sie naß. Trockene Luft nimmt im Körper beim Atmen viel Feuchtigkeit auf, weshalb sie die Atmungsorgane austrocknet und dadurch unangenehm wirkt.

In geheizten Räumen mit zu trockner Luft soll Wasser zum Verdunsten gebracht werden. Auf je 1 kg Wasser muß dazu eine Wärmemenge verwendet werden gleich

$$606,5 - 0,695\,t \text{ Kal.},$$

wo t die Temperatur im Verdunstungsraum bezeichnet.

5. **Luftheizung.** In einer festgemauerten Kammer, die gewöhnlich im Souterrain angelegt wird, befindet sich ein Ofen, in welchem die Verbrennung stattfindet. An denselben schließt sich ein Röhrensystem an, das von den Verbrennungsgasen durchstrichen wird, bevor sie nach dem Kamin ziehen. Die kalte, reine Luft wird von außen her durch einen Kanal zur Heizkammer geleitet; hier umspült sie die erhitzten Wände des Calorifère, nimmt dadurch Wärme auf und gelangt durch besondere Kanäle in die Räume, welche geheizt werden sollen. Die Einrichtung ist, soweit möglich, so zu treffen, daß eine Gegenströmung (S. 360) entsteht.

Die kalte Luft trete mit -16^0 in die Heizkammer und verlasse dieselbe mit 74^0. Im Gebäude herrsche eine Temperatur von $+16^0$, so kühlt sich die Luft im Zimmer ab um 58^0 und beim Entweichen in die Atmosphäre um 32^0. Die Wärmemengen, welche auf die Heizung und Ventilation verwendet werden, verhalten sich daher wie 58 : 32 oder 1 : 0,55. Daher die gesamte Wärme, welche der Calorifère in der Stunde zu liefern hat

$$W + 0{,}55\,W = 1{,}55\,W,$$

welcher Wert noch wegen der natürlichen Ventilation etwas erhöht werden sollte.

Die Verbrennungsgase über dem Rost haben cirka 850^0 Temperatur und sollten mit etwa 150^0 in das Kamin übergehen. Mit diesen Daten kann die Heizfläche nach einer der Formeln auf S. 360 berechnet werden. Sie ergibt sich aber auch annähernd wie folgt. Die mittlere Temperatur der reinen Luft ist 29^0, die der Verbrennungsgase cirka 369^0, ihre Differenz 340^0. Nun lasse 1 qm der gußeisernen Wand bei 1^0 Temperaturunterschied in der Stunde k Kalorien durchtreten (S. 358), so wird

$$\text{Heizfläche} = \frac{1{,}55\,W}{340\,.\,k}\,.$$

Für eine 8stündige Heizung wäre $W = 1{,}4\,Q$ zu rechnen.

Der Rostfläche gibt man $^1/_{80}$ bis $^1/_{140}$ von der Heizfläche. Je kleiner sie angenommen wird, um so eher kann man verhüten, daß die Wände des Feuertopfes glühend werden.

Die spec. Wärme der Luft ist 0,2377. Daher gibt die heiße Luft im Gebäude bei Abkühlung um 58^0 ab $0{,}2377\,.\,58 = 13{,}8$ Kal. Daher wird die benötigte Luftmenge in Kilogrammen $= W : 13{,}8$, welcher Wert in Kubikmetern umzusetzen ist. Ein Kubikmeter Luft von 0^0 wiegt 1,293 kg. Da $13{,}8\,.\,1{,}293 = 17{,}84$, so wird

$$\text{Luftmenge von } 0^0 = \frac{W}{17{,}84}\ \text{kbm.}$$

Für irgend eine andere Temperatur t hat man diese Größe mit $1 + 0{,}00367\,t$ zu multiplizieren.

Die Luftmenge gelangt durch den Kaltluftkanal in die Heizkammer und von da durch die Warmluftkanäle in die zu heizenden Lokalitäten. Die Geschwindigkeit der Luft in diesen Kanälen soll höchstens sein: in einem engen langen Kanal 0,5 m, in einem kurzen weiten 1,8 m. Die Ventilationskanäle sind so anzubringen, daß nicht die

frisch zugeführte Luft, sondern die verdorbene abziehen muß. Dividiert man das Volumen Luft, welches durch einen Kanal gehen soll, mit der Geschwindigkeit, beide Werte für die Sekunde berechnet, so erhält man den Querschnitt des Kanals.

Der Querschnitt des **Kamins** kann nach den auf S. 356 angegebenen Regeln bestimmt werden.

Beisp. Für den auf S. 360 erwähnten Fabriksaal, in dem sich 85 Personen aufhalten, soll eine Luftheizung angelegt werden. Wie sind die Hauptdimensionen für eine 10stündige Heizperiode zu nehmen?

Stündl. Wärmeverlust bei ununterbrochener Heizung Q = 25184 Kal.
Dagegen für 14stündige Unterbrechung . . 1,28 Q = 32235 „
und für Verdunstung von 1 kg Wasser per Stunde
bei 16^0 Temperatur . . . . 606,5 − 0,695 . 16 = 595 „
Daher ganzer Wärmeaufwand (Summe) . . . . . = 32830 „
Daran tragen 85 Personen bei . . . . . 45 . 85 = 3823 „
Somit stündlicher Beitrag an die Heizung . . W = 29005 „
Ebenso an die Ventilation . . . . . . 0,55 W = 15953 „
Summe beider Beträge . . . . = 44958 „
Daher Heizfläche des Calorifère (für k = 7) $\frac{44958}{340 . 7} = 18{,}9$ qm.
Luftmenge von 0^0 . . . . 29005 : 17,84 = 1626 kbm.
Luftvolumen bei − 16^0 . . 1626 (1 − 0,00367 . 16) = 1530 „
Luftvolumen bei + 16^0 . . 1626 (1 + 0,00367 . 16) = 1721 „
Luftvolumen bei + 74^0 . . 1626 (1 + 0,00367 . 74) = 2067 „
Geschwindigkeit im Kaltluftkanal, angenommen . . . = 0,7 m.
Geschwindigkeit in den Warmluftkanälen, angenommen = 1,0 „
Daher Querschnitt des Kaltluftkanales 1530 : 3600 . 0,7 = 0,607 qm.
und des Warmluftkanales . . . . 2067 : 3600 . 1,0 = 0,574 „
Rauminhalt des Saales nach S. 360 . . . . . . = 1200 kbm.
Lufterneuerung in der Stunde . . . 2067 : 1200 = 1,72mal.
Luftmenge per Person in der Stunde . . 2067 : 85 = 24,3 kbm.
Die Luft von − 16^0, welche zugeführt wird, sei gesättigt,
sie enthält daher pro Kubikmeter eine Wassermenge = 1,1 Gr.
Es macht dies auf alle Kubikmeter . . . 1530 . 1,1 = 1683 „
Die 85 Personen liefern stündlich Dunst . . 85 . 55 = 4675 „
Dazu kommt der Betrag durch direkte Verdunstung . = 1000 „
Daher Dampfmenge pro Stunde (Summe) . . . . = 7358 „
Was auf 2067 kbm bei + 16^0 ausmacht 7358 : 2067 = 3,56 „
Allein bei 16^0 enthält gesättigte Luft pro Kubikmeter = 11,43 „
Daher die relative Feuchtigkeit nur . 3,56 : 11,43 = 0,31 „

weshalb eine stärkere direkte Verdunstung nötig wird: 4 bis 5 kg statt nur 1 kg.

6. **Dampfheizung.** Vom Dampfkessel, der gewöhnlich im Souterrain aufgestellt wird, geht der Dampf durch besondere Leitungen in die Räume, welche geheizt werden sollen. Hier sind Gefäße vorhanden, welche den Dampf kondensieren, wodurch er Wärme abgibt. Das Wasser,

welches in den Kondensatoren sich bildet, wird in den Kessel zurückgeleitet.

Konstruktion und Ausrüstung der Dampfkessel, Ofen, Rost und Kamin wie für Maschinenkessel. Eine geringe Dampfspannung (0,5 bis 1 Atmosphäre Ueberdruck) genügt, um die Cirkulation zu bewerkstelligen. Ein Kilogramm Dampf enthält 640 Kal. Wärme. Geht das Kondensationswasser mit 100^0 in den Kessel zurück, so gibt 1 kg 540 Kal. Wärme ab. Daher

$$\text{Dampfmenge in der Stunde} = \frac{W}{540}\ \text{kg}.$$

Nun liefert 1 qm Heizfläche des Kessels in einer Stunde 14 kg Dampf; mithin

$$\text{Heizfläche des Kessels} = \frac{W}{540\ .\ 14}.$$

Die Röhren, welche den Dampf vom Kessel nach den Kondensatoren leiten, sind so anzulegen, daß das Wasser, welches sich in ihnen bildet, in den Kessel zurückfließen kann.

Die Kondensatoren sind häufig Röhren von 7 bis 20 cm Weite, welche den Dampf kondensieren. Es werden dafür aber auch aufrechte Kessel angewendet mit Röhren, durch welche die Zimmerluft streicht und sich dabei erwärmt. Diese Kessel (Oefen) gewähren den Vorteil, daß man in ihnen einen Teil des Kondensationswassers als Wärmereservoir zurückhalten kann.

Wenn die Temperatur im Zimmer 16^0, so kondensieren gußeiserne Röhren in der Stunde 1,8 kg Dampf, schmiedeiserne etwas weniger.

Beisp. Für den auf S. 360 erwähnten Fabriksaal und eine 10stündige Heizzeit erhält man:

Wärmemenge, in der Stunde zu liefern . . .	W = 29005 Kal.
Daher Dampfmenge in der Stunde .	29005 : 540 = 53,8 kg.
Heizfläche des Kessels	53,8 : 14 = 3,85 qm.
Oberfläche der Kondensatoren	53,8 : 1,8 = 30 „

Die Rückleitung des Wassers aus den Kondensatoren kann erfolgen durch die Dampfleitungsröhren, wenn diese weit genug sind, daß sich die entgegengesetzten Strömungen von Dampf und Wasser nicht stören. Gewöhnlich aber werden besondere enge Röhren dazu angewendet, die sich in einer Hauptröhre zunächst dem Kessel vereinigen. Diese ist mit einem Ventil zu versehen, das sich öffnet, wenn der Druck des über ihm liegenden Wassers größer ist als der Dampfdruck im Kessel, dagegen sich schließt, wenn das Umgekehrte der Fall ist. Aus Kondensatoren, die nur eine geringe Höhe über dem Kessel haben, wird das Wasser in ein offenes Reservoir abgeführt und von hier aus, mit frischem Wasser vermischt, mittelst Pumpe in den Kessel getrieben.

Die Leitungen und Kondensatoren enthalten Luft. Strömt nun Dampf aus dem Kessel in diese Hohlräume, so treibt er die Luft vor sich her. Hat diese Luft keinen Ausweg, so gelangt nur wenig Dampf in die entfernten Kondensatoren. Die Luftentweichung wird auf zweifache Weise erreicht: Man leitet die Luft durch besondere Röhrchen in den Kesselraum. Hier öffnet der Heizer den Hahn dieser Röhrchen

in dem Augenblick, da der Dampf in die Leitung übergeht, und schließt ihn ab, wenn die Röhrchen keine Luft mehr, sondern Dampf liefern. Oder man bringt an den Enden der Kondensatoren Luftventile (Bläser) an, welche im kalten Zustand offen sind, also die Luft ein- und austreten lassen, dagegen sich schließen, wenn sie warm werden, also der Dampf sie umgibt. Wo die Kondensatoren keine Bläser haben, wird der Kessel bisweilen mit einem Ventil versehen, das sich nach innen öffnet, wenn der Kessel erkaltet. Alsdann tritt Luft in den Kessel und verhindert ein Zusammendrücken desselben.

Wegen der Verlängerungen und Verkürzungen, welche die Leitungen bei der starken Temperaturveränderung erfahren, sind Kompensatoren anzubringen, welche einen Bruch verhindern.

Soll mit der Heizung Ventilation verbunden werden, so hat die Heizung einen entsprechenden Mehrbetrag an Wärme zu liefern.

Beisp. Wenn im oben erwähnten Fabriksaal 85 Arbeiter sich aufhalten, denen per Mann in der Stunde 15 kbm frische Luft zugeführt werden soll; wie viel Wärme ist für die Ventilation aufzuwenden bei gleichen Lufttemperaturen wie im Beispiel über Luftheizung?

Es ist das Gewicht von 1275 kbm Luft bei 0° . . = 1648 kg.
Dieser Luft muß eine Wärmemenge zugeführt werden
für 32° Temperaturzunahme . 1648 . 0,2377 . 32 = 12535 Kal.
Für die Heizung ist aber Wärmebedarf (S. 366) . . = 29005 „
Daher Vermehrung der Heizfläche um 12535 : 29005 = 0,432 „
Somit Heizfläche . . . . 1,432 . 3,85 = 5,13 qm.

7. **Dampfcalorifère.** Mit der Dampfheizung ist nicht, wie bei der Luftheizung, eine Ventilation direkt verbunden. Eine solche entsteht jedoch, wenn bei einer Luftheizung die Erwärmung der Luft in der Heizkammer durch Dampfkondensatoren erfolgt. Diese bilden eine oder mehrere Spiralen aus Röhren, welche den Dampf auf der obern Seite aufnehmen und das durch Kondensation entstandene Wasser auf der untern Seite in den Kessel leiten.

Bei der Dampfheizung ist der Unterschied der Temperaturen in den Kondensatoren und der Luft in dem Zimmer 100 — 16 = 84°, beim Dampfcalorifère jedoch nur 100 — 30 = 70°. Daher muß auch die Kondensatorfläche im Verhältnis 70 auf 84 vergrößert werden, abgesehen von der Zunahme, welche durch die Ventilation veranlaßt wird.

8. **Warmwasserheizung.** Vom Kessel, gewöhnlich im Souterrain aufgestellt, geht eine Röhrenleitung nach den Lokalitäten, welche geheizt werden sollen, und führt wieder zum Kessel zurück. Kessel und Leitung sind ganz mit Wasser anzufüllen. Wird der Kessel geheizt, so werden die wärmeren Schichten des Wassers in die Höhe getrieben, so daß eine Cirkulation des Wassers in der Leitung entsteht. Damit aber die Leitung durch die Ausdehnung des Wassers nicht zersprengt wird, macht man sie oben offen und sammelt das überschüssige Wasser daselbst im Expansionsgefäß, dessen Inhalt etwa 0,05 von dem der ganzen Wassermenge ist.

Da der Kessel ganz mit Wasser gefüllt ist, so kann auch seine ganze äußere Oberfläche als Heizfläche benutzt werden. Liegt das Ex-

pansionsgefäß z. B. 20 m über dem Kessel, so ist der Ueberdruck, dem der Kessel ausgesetzt wird, 2 Atmosphären.

In die zu heizenden Räume werden entweder eiserne Gefäße (Oefen) aufgestellt, durch welche das Wasser sich bewegt, oder es dient die Röhrenleitung, die sich in mehreren Windungen hin und her ziehen kann, als Abkühlungsfläche. Die Größe dieser Fläche ergibt sich wie folgt. Es sei die höchste Temperatur des Wassers 96°, die niederste 36°, also seine mittlere Temperatur = 66°; daher der Unterschied der Temperaturen in den Abkühlungsgefäßen und außerhalb derselben (in den Zimmern) 66 — 16 = 50°. Daher

$$\text{Abkühlungsfläche} = \frac{W}{50\,k}.$$

Für 10stündige Beheizung des obigen Fabriksaales und k = 11 wird die Abkühlungsfläche = 52,8 qm.

9. **Wassercalorifère.** Aehnlich dem Dampfcalorifère, nur daß der Dampf durch warmes Wasser ersetzt wird. Vom Kessel aus geht das Wasser nach der obern Seite der Wasserspiralen, welche die Heizkammer durchziehen, und führt unten abgekühlt zum Kessel zurück. Expansionsgefäß nötig. Berechnung der Heiz- und Abkühlungsflächen wie bei der Warmwasserheizung.

10. **Ventilationsvorrichtungen.** Die künstliche Ventilation erfolgt entweder durch Eintreiben frischer Luft (Pulsation) oder durch Wegsaugen (Aspiration) der verdorbenen Luft.

Apparate der ersteren Art sind die Luftheizung, der Dampf- und Wassercalorifère. Die Luft kann auch durch einen Ventilator eingetrieben werden. Vorrichtungen der zweiten Art sind:

a) Man errichtet ein Kamin und unterhalb in demselben an der Stelle, wo die verdorbene Luft angesogen wird, eine Flamme oder ein Feuer.

b) Man bringt über schon vorhandenen Wärmequellen, z. B. Kronleuchtern, Abzugsröhren an. Diese Ventilationsmethode ist besonders im Sommer anzuwenden.

c) Man stellt zwei Röhren oder Kamine koncentrisch in einander. Die innere dieser Röhren führt den Rauch von irgend einer Feuerstelle ab (Rauchkamin). Zwischen der innern und äußern ist ein angemessener Raum, der als Aspirationskamin benutzt wird. Die Lokalitäten, deren Luft abzuführen ist, stehen mit diesem Kamin durch Kanäle in Verbindung. Wird nun das innere Kamin geheizt, so wird auch die Luft im äußern Kamin erwärmt und daher emporsteigen.

d) Ein Ventilator saugt die verdorbene Luft aus dem Lokal, von der entgegengesetzten Seite tritt frische Luft ein.

Die Oeffnungen für die Zu- und Ableitung sind so anzulegen, daß die Luftströmung, welche sie im Lokal veranlassen, die Bewohner möglichst wenig belästigt. Es ist daher nötig, daß der Eintritt wie der Austritt durch mehrere Oeffnungen erfolgen und daß der eintretende Strom jeweilen durch ein Gitter zerteilt wird. Es erscheint zweckmäßig, die Eintrittsöffnungen oben und die Austrittsöffnungen

unten in den Zimmerwänden anzubringen. Die unteren Luftschichten sind nämlich schwer und am meisten verdorben und können bei dieser Strömungsrichtung am sichersten entfernt werden.

83. Trocknen mittelst warmer Luft.

1. **Anlage.** Die Stoffe, welche zu trocknen sind, werden in einem länglichen, geschlossenen Raume so aufgehängt, daß sie sich über den ganzen Querschnitt möglichst gleichförmig verteilen. Auf der einen Seite tritt nun Luft von hoher Temperatur und geringem Wassergehalt ein, durchströmt das Lokal, absorbiert unterwegs von dem Wasser, das in den Stoffen enthalten ist, kühlt sich dabei ab und verläßt den Raum auf der gegenüber liegenden Seite in gesättigtem Zustande mit einer Temperatur von 30° bis 40° C. Der Stoff aber wird der Luft entgegengeführt.

2. **Wassergehalt der gesättigten Luft.** Nachzusehen S. 363.

3. **Luftmenge, welche zum Trocknen nötig ist.** Die Wärme, welche die heiße Luft im Trockenraume abgibt, teilt sich in einen nützlichen und schädlichen Teil. Der nützliche wird verwendet zur Verdampfung des Wassers der nassen Stoffe; der schädliche wird veranlaßt durch folgende Verluste: Es tritt Luft aus dem Raum, ohne vollständig gesättigt zu sein; die Stoffe, welche getrocknet sind, führen bei der Wegnahme Wärme mit; dabei dringt kalte Luft in den Trockenraum; der Raum verliert durch Abkühlung an die Umgebung erheblich viel Wärme, weil die Differenz der Temperaturen im Raum und außerhalb desselben größer ist als bei Wohnräumen. Diese Verluste betragen 60 bis 100 Prozent vom nützlichen Teil.

Behufs Durchführung der Rechnung mögen folgende Daten dienen: Gewicht von 1 kbm Luft bei 0° und 1 Atm. Druck = 1,293 kg; spec. Wärme der Luft = 0,2377; Wärme, welche 1 kg Dampf von 0° enthält = 606,5 Kal.; Zunahme derselben für jeden Grad = 0,305 Kal.

4. **Erwärmungsapparat.** Als solcher kann jeder Calorifère, wie er der Luftheizung dient, verwendet werden; ebenso der Dampfkessel rc. Dabei soll das Prinzip der Gegenströmung in Anwendung kommen.

Beisp. Es soll 1 kg Wasser, enthalten in den nassen Stoffen, als Dunst abgeführt werden. Dabei sei die Anfangstemperatur des Wassers = 10°, die Temperatur der gesättigten, abziehenden Luft = 36°; die Luft habe bei ihrem Eintritt in den Erwärmungsapparat 10° und sei gesättigt. Wie viel Luft ist aufzuwenden, wenn von der gesamten Wärme 0,4 verloren gehen, und welche Temperatur muß sie beim Eintreten in den Trockenraum haben?

Wassermenge in 1 kbm gesättigter Luft bei 36° (S. 363) = 37,32 gr.
Wassermenge in 1 kbm gesättigter Luft bei 10° . . = 7,74 „
Daher vermag 1 kbm Luft Wasser aufzunehmen . . = 29,58 „

Luftmenge, um 1 kg Wasser zu absorbieren . $\frac{1}{0,02958} = 33,81$ kbm.
Gewicht von 1 kbm dieser Luft . . . $\frac{1,293}{1 + 0,00367 \, . \, 36} = 1,142$ kg.
Gewicht von 33,81 kbm . . . . . . 33,81 . 1,142 = 38,61 „
Diese Luft gibt bei 1° Abkühlung ab . 0,2377 . 38,61 = 9,18 Kal.
Wärmemenge, um 1 kg Wasser von 10° in Dampf von
36° zu verwandeln . . . . 606,5 + 0,305 . 26 = 614,4 „
Wärmebedarf mit Rücksicht auf die Verluste $\frac{5}{3} \cdot 614,4 = 1024$ „
Daher muß die Luft sich abkühlen um . . 1024 : 9,18 = 112 Grade.
Mithin Temperatur der Luft beim Eintritt 36 + 112 = 148 „

Sollen nun in der Stunde z. B. 30 kg Wasser verdampft werden, so muß auch 30mal mehr Luft und Wärme aufgewendet werden.

In der Rechnung ist die Wärmeänderung, welche obige 7,74 gr Wasser erfahren, als unerheblich nicht berücksichtigt.

84. Vom Wasserdampf.

1. **Gesättigter Dampf.** Die Verdunstung der Flüssigkeit geht an der Oberfläche derselben, bei jeder Temperatur, vor sich; die Verdampfung dagegen findet im Innern derselben statt und zwar nur bei derjenigen Temperatur, bei welcher die Expansivkraft der aufsteigenden Dampfteilchen im stande ist, die darüberliegenden Flüssigkeitsschichten zu durchbrechen und den Druck, welcher auf die Oberfläche der Flüssigkeit ausgeübt wird, zu überwinden.

In einem offenen Gefäße ist dieser äußere Druck der Luftdruck; in einem verschlossenen Gefäße kann dieser Druck sowohl von der allfällig vorhandenen Luft, als von schon gebildeten und über der Flüssigkeit liegenden Dämpfen herkommen. Fehlt dieser äußere Druck, d. h. befindet sich die Flüssigkeit im leeren Raum, so siedet sie ungehindert bei jeder Temperatur.

Ist in einem verschlossenen Gefäße Flüssigkeit und Dampf von bestimmter Temperatur und wird dasselbe noch mehr erwärmt, so wächst die Expansivkraft im Innern der Flüssigkeit, es löst sich eine ganz bestimmte Menge neuer Dampfteile ab, welche in den Dampfraum steigen und den schon vorhandenen Dampf zusammendrängen. Hat der Dampf für diese Temperatur das Maximum an Dichtigkeit und Spannkraft erreicht, so ist er gesättigt. Wird die Temperatur weiter erhöht, so findet wieder eine Vermehrung des Dampfquantums, der Dichtigkeit und Spannkraft statt, bis der Dampf gesättigt ist. Einer jeden Temperatur entspricht also ein besonderer Sättigungsgrad. Sinkt die Temperatur im Gefäße um eine gewisse Anzahl Grade, so verwandelt sich ein entsprechender Teil des Dampfes in Flüssigkeit; er kondensiert und der übrig gebliebene Dampf ist gesättigt.

2. **Ueberhitzter Dampf.** Ist in einem verschlossenen Gefäße alle Flüssigkeit in Dampf aufgelöst und wird die Temperatur gleichwohl

noch erhöht, so wird der Dampf **überhitzt**. Jeder Dampf, der nicht gesättigt ist, kann als überhitzt angesehen werden. Solche Dämpfe verhalten sich mit Rücksicht auf ihre Spannung und Temperatur sehr nahe wie permanente Gase.

3. **Spannung und Temperatur des gesättigten Dampfes.** Diese Werte sind nach Regnault in Tabelle I, S. 373, zusammengestellt.

4. **Wärmemenge zur Bildung von gesättigtem Dampf.** Wenn 1 kg Wasser von 0^0 in gesättigten Dampf von bestimmter Temperatur verwandelt werden soll, so sind hierzu zweierlei Wärmemengen erforderlich (S. 344, Ziffer 2):

a) Wärme, welche das Wasser erwärmt bis zu der Temperatur, bei welcher die Verdampfung beginnt. Man nennt diesen Teil **fühlbare** oder **sensible Wärme**, auch **Flüssigkeitswärme**.

b) Wärme, welche die Aenderung des Aggregatzustandes bewirkt, ohne die Temperatur zu erhöhen. Dieser Teil heißt **latente Wärme** oder auch **Verdampfungswärme**. Bei der Aenderung des Aggregatzustandes überwindet ein Teil dieser Wärme den innern Zusammenhang, der andere den äußern Druck, womit der Dampf zusammengepreßt ist. Der erstere heißt **innere**, der letztere **äußere** latente Wärme. Nun seien

t die Temperatur des Dampfes in Centigraden,
q, r die sensible und latente Wärme desselben per 1 kg,
a, i die äußere und innere latente Wärme per 1 kg und
Q die gesamte in 1 kg Dampf enthaltene Wärme, so ist nach Regnault

$$(1) \qquad q = t + 0{,}00002\, t^2 + 0{,}0000003\, t^3 \text{ Kal.}$$

$$(2) \qquad Q = 606{,}5 + 0{,}305\, t \text{ Kal.}$$

Für Dampf von 100^0 wird daher

Flüssigkeitswärme $= 100 + 0{,}2 + 0{,}3 = 100{,}5$ Kal.
Gesamte Wärme $= 606{,}5 + 0{,}305 \cdot 100 = 637$ „

Nun sind von diesen 637 Kalorien 100,5 sensibel, weil diese Wärme nötig ist, um 1 kg Wasser von 0^0 auf 100^0 zu erwärmen. Die latente Wärme beträgt daher 536,5 Kalorien.

Ferner ist $Q = q + r$. Da nun aus (1) und (2) sich die Werte von Q und q ergeben, so kann man auch r als bekannt ansehen. Diese drei Werte sind in Tabelle II, S. 375 eingetragen. Da auch

$$(3) \qquad r = a + i,$$

so handelt es sich noch darum, die Werte von a und i zu bestimmen. Es seien

T die absolute Temperatur des Dampfes,
p die entsprechende Dampfspannung per 1 qm Fläche,
$u' = u + 0{,}001$ das specifische Volumen, d. h. das Volumen per 1 kg Dampf, und
424 die Joule'sche Zahl (S. 345).

Man schließe 1 kg Wasser von der Temperatur T in einen Dampfcylinder von 1 qm Querschnitt und lasse ihn bei dieser Temperatur voll-

ständig verdampfen, so muß ihm die Wärme r zugeführt werden. Nach Maßgabe des Verdampfens wird der Kolben fortgeschoben mit dem Drucke p längs eines Weges u; es entsteht daher die Arbeit = p u. Diese ist aber auch = 424 a; daher die Gleichung

$$(4) \qquad a = \frac{p\,u}{424}.$$

Um a berechnen zu können, muß man u kennen. Zu diesem Zwecke lasse man den Dampf in obigem Cylinder längs eines sehr kleinen Weges expandieren, so sinkt die Temperatur T und Spannung p um sehr kleine Größen, die mit ΔT und Δp bezeichnet seien.

Der Dampf hat nun die eine Hälfte des Carnot'schen Kreislaufes durchgemacht. Man lasse ihn auch noch die andere Hälfte durchmachen, indem ihm beim Rücklauf zuerst Wärme so entzogen wird, daß seine Temperatur $T - \Delta T$ und seine Spannung $p - \Delta p$ konstant bleiben, und endlich werde er noch durch Kompression in Wasser von T Graden verwandelt. Dadurch wird die nützliche Arbeit bei einem Kreislauf für eine sehr kleine Spannungsabnahme $= u \,.\, \Delta p$, die entsprechende Wärme $= \frac{u \Delta p}{424}$, und da während des Prozesses der Wärmeaufwand = r, so geht die Carnot'sche Proportion (S. 346) über in

$$\frac{u \,.\, \Delta p}{424\, r} = \frac{\Delta T}{T},$$

woraus zur Bestimmung von u folgt

$$(5) \qquad u = 424 \,\frac{r}{T} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta p}.$$

Um diese Formel anzuwenden, denke man sich den Zusammenhang zwischen T und p graphisch dargestellt. Es seien die Werte von T die Abscissen, diejenigen von p die Ordinaten, so entsteht eine Kurve. Man nehme auf ihr zwei Punkte an, deren Koordinaten T, p und $T + \Delta T$, $p + \Delta p$ seien und lege durch diese Punkte eine Sekante, so wird sie mehr und mehr zu einer Tangente an den Punkt T, p, je kleiner ΔT wird. Nun soll man sich in der That in Gleichung (5) die Größen ΔT, Δp unendlich klein denken, so daß aus der Sekante eine Tangente wird. Die Richtung dieser Tangente zur Abscissenachse gibt der Bruch $\frac{\Delta T}{\Delta p}$ an, wenn Zähler und Nenner desselben unendlich klein sind. Allein die zur Verfügung stehenden zugehörenden Werte von ΔT und Δp sind endlich, nicht unendlich klein. Um gleichwohl mit endlichen Werten die Richtung der Tangente zu erhalten, nehme man auf der Kurve zu den zwei Punkten mit den Ordinaten p und $p + \Delta p$ noch einen dritten an mit der Ordinate $p - \Delta p$ und lege nun durch den zweiten und dritten Punkt eine Sekante, so kann man annehmen, es sei diese Sekante sehr annähernd parallel zur Tangente durch den ersten Punkt T, p. Allein dann sind die Differenzen der Abscissen und der Ordinaten des zweiten und dritten Punktes beim Bruche $\frac{\Delta T}{\Delta p}$ der Formel (5) in Rechnung zu bringen.

Tabelle I.

Temperatur und Druck des gesättigten Wasserdampfes, nach Regnault.

Temper. Centigr.	Druck Atmosph.	Temper. Centigr.	Druck Atmosph.	Temper. Centigr.	Druck Atmosph.	Temper. Centigr.	Druck Atmosph.
— 32	0,000408	6	0,0092	41	0,0762	73	0,3489
31	0,000442	7	0,0099	42	0,0803	74	0,3640
30	0,000480	8	0,0105	43	0,0847	75	0,3796
29	0,000522	9	0,0113	44	0,0892	76	0,3958
28	0,000567	10	0,0124	45	0,0939	76,25	0,4
27	0,000616	11	0,0129	46	0,0989	77	0,4126
26	0,000670	12	0,0138	46,21	0,1	78	0,4300
25	0,000728	13	0,0147	47	0,1041	79	0,4480
24	0,000792	14	0,0157	48	0,1095	80	0,4666
23	0,000861	15	0,0167	49	0,1151	81	0,4859
22	0,000936	16	0,0178	50	0,1210	81,71	0,5
21	0,001018	17	0,0190	50,63	0,1250	82	0,5058
20	0,001107	17,83	0,02	51	0,1272	83	0,5265
19	0,001205	18	0,0202	52	0,1336	84	0,5478
18	0,001313	19	0,0215	53	0,1403	85	0,5698
17	0,001426	20	0,0229	54	0,1473	86	0,5926
16	0,001551	21	0,0243	55	0,1546	86,32	0,6
15	0,001690	22	0,0259	56	0,1622	87	0,6161
14	0,001839	23	0,0275	56,57	0,1667	88	0,6404
13	0,002001	24	0,0292	57	0,1701	89	0,6655
12	0,002179	25	0,0310	58	0,1783	90	0,6914
11	0,002372	26	0,0329	59	0,1869	90,32	0,7
10	0,002583	27	0,0349	60	0,1959	91	0,7181
9	0,002812	28	0,0370	60,45	0,2	92	0,7457
8	0,003062	29	0,0392	61	0,2051	92,15	0,75
7	0,003333	29,35	0,04	62	0,2147	93	0,7742
6	0,003629	30	0,0415	63	0,2247	93,88	0,8
5	0,003953	31	0,0440	64	0,2352	94	0,8036
4	0,004304	32	0,0465	65	0,2460	95	0,8339
3	0,004795	33	0,0492	65,36	0,25	96	0,8652
2	0,005104	33,27	0,05	66	0,2572	97,08	0,9
1	0,005558	34	0,0521	67	0,2689	98	0,9306
0	0,0061	35	0,0551	68	0,2810	99	0,9649
+ 1	0,0065	36	0,0582	69	0,2936	100	1
2	0,0070	37	0,0614	69,49	0,3	101	1,0363
3	0,0075	38	0,0649	70	0,3067	102	1,0737
4	0,0080	39	0,0685	71	0,3203	103	1,1122
5	0,0086	40	0,0722	72	0,3343	104	1,1518

Temper. Centigr.	Druck Atmosph.	Temper. Centigr.	Druck Atmosph.	Temper. Centigr.	Druck Atmosph.	Temper. Centigr.	Druck Atmosph.
105	1,1926	138	3,3776	168	7,4721	199	15,0625
106	1,2346	139	3,4753	168,15	7,5	200	15,3802
106,36	1,25	139,25	3,5	169	7,6564	201	15,7031
107	1,2778	140	3,5758	170	7,8443	201,60	16
108	1,3222	141	3,6784	170,81	8	203	16,3645
109	1,3680	141,68	3,75	171	8,0358	204	16,7030
110	1,4150	142	3,7833	172	8,2309	204,86	17
111	1,4636	143	3,8904	173	8,4297	205	17,0469
111,74	1,5	144	4	173,35	8,5	206	17,3962
112	1,5129	145	4,1126	174	8,6323	207	17,7510
113	1,5640	146	4,2273	175	8,8387	207,69	18
114	1,6164	146,19	4,25	175,77	9	208	18,1112
115	1,6703	147	4,3446	176	9,0490	209	18,4770
116	1,7256	148	4,4644	177	9,2631	210	18,8484
116,43	1,75	148,29	4,5	178	9,4812	210,40	19
117	1,7824	149	4,5870	178,08	9,5	211	19,2254
118	1,8408	150	4,7121	179	6,7033	212	19,6081
119	1,9007	150,30	4,75	180	9,9295	213,01	20
120	1,9622	151	4,8400	180,31	10	214	20,0310
120,60	2	152	4,9707	181	10,1597	215	20,7912
121	2,0253	152,22	5	182	10,3941	215,51	21
122	2,0901	153	5,1042	183	10,6327	216	21,1973
123	2,1565	154	5,2405	184	10,8755	217	21,6094
124	2,2247	154,07	5,25	184,50	11	217,93	22
124,36	2,25	155	5,3797	185	11,1226	218	22,0275
125	2,2946	155,85	5,5	186	11,3741	219	22,4517
126	2,3663	156	5,5218	187	11,6300	220	22,8821
127	2,4397	157	5,6669	188	11,8903	220,27	23
127,80	2,5	157,56	5,75	188,41	12	221	23,3186
128	2,5151	158	5,8151	189	12,1542	222	23,7614
129	2,5913	159	5,9663	190	12,4246	222,53	24
130	2,6714	159,22	6	191	12,6986	223	24,2104
130,97	2,75	160	6,1206	192	12,9772	224	24,6659
131	2,7725	161	6,2780	192,08	13	224,72	25
132	2,8356	162	6,4386	193	13,2605	225	25,1277
133	2,9206	162,37	6,5	194	13,5487	226	25,5960
133,91	3	163	6,6025	195	13,8416	226,85	26
134	3,0078	164	6,7697	195,53	14	227	26,0707
135	3,0970	165	6,9402	196	14,1394	228	26,5521
136	3,1884	165,34	7	197	14,4408	228,92	27
136,66	3,25	166	7,1141	198	14,7498	229	27,0401
137	3,2819	167	7,2913	198,80	15	230	27,5347

Tabelle II.

Dichte und Wärmegehalt des gesättigten Wasserdampfes, nach Zeuner.

Druck in Atmosphären.	Temperatur. Centigr.	Gewicht von 1 kbm in kg.	Volumen von 1 kg in kbm.	Wärmegehalt von 1 kg Wasserdampf. Fühlbare Wärme.	Latente Wärme: Innere.	Aeußere.	Zusammen.	Gesamte Wärme.
0,1	46,21	0,069	14,552	46,3	538,8	35,5	574,3	620,6
0,2	60,45	0,133	7,543	60,6	527,6	36,8	564,4	625,0
0,3	69,49	0,195	5,140	69,7	520,4	37,6	558,0	619,7
0,4	76,25	0,255	3,916	76,5	515,1	38,2	553,3	627,8
0,5	81,71	0,315	3,171	82,0	510,8	38,6	549,4	631,4
0,6	86,32	0,374	2,671	86,7	507,1	39,0	546,1	632,8
0,7	90,32	0,433	2,310	90,7	504,0	39,4	543,4	634,1
0,8	93,88	0,491	2,037	94,3	501,1	39,7	540,8	635,1
0,9	97,08	0,549	1,823	97,5	498,6	40,0	538,6	636,1
1	100	0,606	1,650	100,5	496,3	40,2	536,5	637,0
1,1	102,68	0,663	1,509	103,2	494,2	40,4	534,6	637,8
1,2	105,17	0,719	1,390	105,7	492,2	40,6	532,8	638,5
1,3	107,50	0,776	1,289	108,1	490,4	40,8	531,2	639,3
1,4	109,68	0,832	1,202	110,3	488,6	41,0	529,6	639,9
1,5	111,74	0,887	1,127	112,4	487,0	41,2	528,2	640,6
1,6	113,69	0,943	1,061	114,4	485,5	41,3	526,8	641,2
1,7	115,54	0,998	1,002	116,3	484,0	41,5	525,5	641,8
1,8	117,30	1,053	0,949	118,1	482,6	41,6	524,2	642,3
1,9	118,99	1,108	0,902	119,8	481,3	41,7	523,0	642,8
2	120,60	1,163	0,860	121,4	480,0	41,9	521,9	643,3
2,1	122,15	1,218	0,821	123,0	478,8	42,0	520,8	643,8
2,2	123,64	1,272	0,786	124,5	477,6	42,1	519,7	644,2
2,3	125,07	1,236	0,754	126,0	476,5	42,2	518,7	644,7
2,4	126,46	1,381	0,724	127,4	475,4	42,3	517,7	645,1
2,5	127,80	1,435	0,697	128,8	474,3	42,4	516,7	645,5
2,6	129,10	1,488	0,672	130,1	473,3	42,5	515,8	645,9
2,7	130,35	1,542	0,649	131,4	472,3	42,6	514,9	646,3
2,8	131,57	1,596	0,627	132,6	471,3	42,7	514,0	646,6
2,9	132,76	1,649	0,606	133,8	470,4	42,8	513,2	647,0
3	133,91	1,702	0,587	135,0	469,5	42,9	512,4	647,4
3,1	135,03	1,756	0,570	136,1	468,6	43,0	511,6	647,7
3,2	136,12	1,809	0,553	137,2	467,7	43,0	510,7	647,9
3,3	137,19	1,862	0,537	138,3	466,9	43,1	510,0	648,3
3,4	138,23	1,915	0,522	139,4	466,1	43,2	509,3	648,7
3,5	139,24	1,968	0,508	140,4	465,3	43,3	508,6	649,0

Druck in Atmosphären.	Temperatur. Centigr.	Gewicht von 1 kbm in kg.	Volumen von 1 kg in kbm.	Wärmegehalt von 1 kg Wasserdampf.				
				Fühlbare Wärme.	Latente Wärme:			Gesamte Wärme.
					Innere.	Aeußere.	Zusammen.	
3,6	140,23	2,020	0,495	141,5	464,5	43,3	507,8	649,3
3,7	141,21	2,073	0,482	142,5	463,7	43,4	507,1	649,6
3,8	142,15	2,126	0,470	143,4	463,0	43,5	506,5	649,9
3,9	143,08	2,178	0,459	144,4	462,2	43,5	505,7	650,1
4	144,00	2,230	0,448	145,3	461,5	43,6	505,1	650,4
4,1	144,89	2,283	0,438	146,2	460,8	43,7	504,5	650,7
4,2	145,76	2,335	0,428	147,1	460,1	43,7	503,8	650,9
4,3	146,61	2,387	0,419	148,0	459,4	43,8	503,2	651,2
4,4	147,46	2,439	0,410	148,9	458,8	43,9	502,7	651,6
4,5	148,29	2,491	0,401	149,7	458,1	43,9	502,0	651,7
4,6	149,10	2,543	0,393	150,5	457,5	44,0	501,5	652,0
4,7	149,90	2,595	0,385	151,4	456,8	44,0	500,8	652,2
4,8	150,69	2,647	0,378	152,2	456,2	44,1	500,3	652,5
4,9	151,46	2,698	0,371	153,0	455,6	44,1	499,7	652,7
5	152,22	2,750	0,364	153,7	455,0	44,2	499,2	652,9
5,1	152,97	2,802	0,356	154,5	454,4	44,2	498,6	653,1
5,2	153,70	2,853	0,351	155,3	453,8	44,3	498,0	653,3
5,3	154,43	2,905	0,344	156,0	453,2	44,3	497,5	653,5
5,4	155,14	2,956	0,338	156,7	452,7	44,4	497,1	653,8
5,5	155,85	3,007	0,332	157,5	452,1	44,4	496,5	654,0
5,6	156,54	3,059	0,327	158,2	451,6	44,5	496,1	654,3
5,7	157,22	3,110	0,321	158,9	451,0	44,5	495,5	654,4
5,8	157,90	3,161	0,316	159,6	450,5	44,6	495,1	654,7
5,9	158,56	3,212	0,311	160,3	450,0	44,6	494,6	654,9
6	159,22	3,263	0,306	160,9	449,5	44,7	494,2	655,1
6,1	159,87	3,314	0,302	161,6	448,9	44,7	493,6	655,2
6,2	160,50	3,365	0,297	162,3	448,4	44,8	493,2	655,5
6,3	161,14	3,416	0,293	162,9	447,9	44,8	492,7	655,6
6,4	161,76	3,467	0,288	163,6	447,4	44,8	492,2	655,8
6,5	162,37	3,518	0,284	164,2	447,0	44,9	491,9	656,1
6,6	162,98	3,569	0,280	164,8	446,5	44,9	491,4	656,2
6,7	163,58	3,619	0,276	165,4	446,0	45,0	491,0	656,4
6,8	164,18	3,670	0,272	166,0	445,5	45,0	490,5	656,5
6,9	164,76	3,721	0,269	166,6	445,1	45,0	490,1	656,7
7	165,34	3,771	0,265	167,2	444,6	45,1	489,7	656,9

Druck in Atmosphären.	Temperatur. Centigr.	Gewicht von 1 kbm in kg.	Volumen von 1 kg in kbm.	Wärmegehalt von 1 kg Wasserdampf.				
				Fühlbare Wärme.	Latente Wärme:			Gesamte Wärme.
					Innere.	Aeußere.	Zusammen.	
7,25	166,77	3,897	0,257	168,7	443,5	45,2	488,7	657,4
7,50	168,15	4,023	0,248	170,1	442,4	45,2	487,6	657,7
7,75	169,50	4,149	0,241	171,5	441,3	45,3	486,6	658,1
8	170,81	4,275	0,234	172,9	440,3	45,4	485,7	658,6
8,25	172,10	4,400	0,227	174,2	439,3	45,5	484,8	659,0
8,50	173,35	4,525	0,221	175,5	438,3	45,6	483,9	659,4
8,75	174,57	4,650	0,215	176,8	437,3	45,6	482,9	659,7
9	175,77	4,774	0,209	178,0	436,4	45,7	482,1	660,1
9,25	176,94	4,898	0,204	179,2	435,4	45,8	481,2	660,4
9,50	178,08	5,023	0,199	180,4	434,5	45,9	480,4	660,8
9,75	179,21	5,145	0,193	18,16	433,6	45,9	479,5	661,1
10	180,31	5,270	0,190	182,7	432,8	46,0	478,8	661,6
10,25	181,38	5,394	0,185	183,8	431,9	46,1	478,0	661,8
10,50	182,44	5,517	0,181	184,9	431,1	46,1	477,2	662,1
10,75	183,48	5,641	0,177	186,0	430,3	46,2	476,5	662,5
11	184,50	5,764	0,173	187,0	429,5	46,2	475,7	662,7
11,25	185,51	5,886	0,170	188,1	428,7	46,3	475,0	663,1
11,50	186,49	6,009	0,166	189,1	427,9	46,4	474,3	663,4
11,75	187,46	6,132	0,162	190,1	427,1	46,4	473,5	663,6
12	188,41	6,254	0,160	191,1	426,3	46,5	472,8	663,9
12,25	189,35	6,376	0,157	192,1	425,6	46,5	472,1	664,2
12,50	190,27	6,499	0,154	193,0	424,9	46,6	471,5	664,5
12,75	191,18	6,621	0,151	194,0	424,2	46,6	470,8	664,8
13	192,08	6,742	0,148	194,9	423,5	46,7	470,2	665,1
13,25	192,96	6,864	0,146	195,9	422,8	46,7	469,5	665,4
13,50	193,83	6,987	0,143	196,8	422,1	46,8	468,9	665,7
13,75	194,69	7,107	0,141	197,7	421,4	46,8	468,2	665,9
14	195,53	7,228	0,138	198,5	420,7	46,9	467,6	666,1

Beisp. Es soll das Volumen von 1 kg Dampf von 5 Atm. bestimmt werden.

In der Tab. II auf S. 376 sind als benachbarte Werte des Druckes anzusehen: 5,1 über und 4,9 unter 5 Atmosphären. Daher

Druckdifferenz (0,2 Atm. entsprechend) . . . $\Delta p = 0{,}2 \,.\, 10333$ kg.
Temperatur für 5,1 Atm. . . . . $= 152{,}97^{\,0}$.
Temperatur für 4,9 Atm. . . . . $= 151{,}46^{\,0}$.
Daher Temperaturdifferenz . . . . $= \quad 1{,}51^{\,0}$.

Absolute Temperatur für 5 Atm. $T = 273 + 152{,}22 = 425{,}22°$.
Latente Wärme für 5 Atm. . . . . $r = 499{,}2$ Kal.
Mithin nach Formel (5) . $u = \frac{424 \,.\, 499{,}2}{425{,}22} \cdot \frac{1{,}51}{2066} = 0{,}3638$ kbm.
Daher das gesuchte Volumen . $u' = u + 0{,}001 = 0{,}3648$ „

Die Tabelle gibt 0,364 statt 0,365. Der Grund liegt darin, daß die Differenzen ΔT und Δp noch kleiner hätten genommen werden sollen.

Sind die Werte von u berechnet, so können auch diejenigen von a nach (4) bestimmt werden. Alsdann folgt auch $i = r - a$.

5. **Gewicht des Dampfes per Kubikeinheit.** Das Volumen u' gibt 1 kg Dampf; folglich wiegt 1 kbm $\frac{1}{u'}$ kg. Es ist daher das Gewicht der reciproke Wert des Volumens.

In Tab. II, S. 376, sind die Werte von Q, q und r nach Regnault und diejenigen von a, i, u' und $\frac{1}{u'}$ nach Zeuner enthalten.

Beisp. 1. In einem Dampfkessel, der zum Teil mit Wasser gefüllt ist, seien 2,5 kbm Dampf von 3 Atmosphären. Wenn die Spannung dieses Dampfes auf 5 Atmosphären gebracht wird, wie viel neuer Dampf wird sich in demselben Raum bilden?

Es ist das Gewicht von 1 kbm Dampf von 3 Atm. . = 1,702 kg.
Gewicht von 1 kbm von 5 Atm. . . . . = 2,750 „
Zunahme an Gewicht per 1 kbm . . . . = 1,048 „
Zunahme an Gewicht per 2,5 kbm . . . 2,5 . 1,048 = 2,620 „

Beisp. 2. Wie viel Dampf von 1 Atmosphäre braucht es, um 300 kg Wasser von 11° auf 28° C. zu erwärmen, wenn dieser Dampf direkt aus dem Kessel in das Wasser strömt?

Es werde die specifische Wärme des Wassers konstant = 1 vorausgesetzt. Der Dampf verwandelt sich in Wasser von 28°. Jedes daraus entstandene Kilogramm Wasser enthält 28 Kalorien. Jedes Kilogramm Dampf von 1 Atmosphäre enthält zusammen 637 Kalorien Wärme; folglich gibt jedes Kilogramm Dampf beim Kondensieren 637 — 28 = 609 Kalorien Wärme ab.

Nun brauchen 300 kg Wasser bei einer Temperaturzunahme von 17° eine Wärmemenge = 300 . 17 = 5100 Kalorien; folglich ist hierzu eine Dampfmenge von 5100 : 609 = 8,38 kg erforderlich. Die Mischung besteht also aus 300 + 8,38 = 308,38 kg Wasser von 28°.

Beisp. 3. Ein Dampfkessel enthalte 2000 kg Wasser; er zerspringe bei einer Spannung von 6 Atmosphären. Wie viel Dampf wird sich durch das austretende Wasser in der Atmosphäre bilden?

Die Dampfbildung wird fortdauern, bis die Spannung auf 1 Atmosphäre gesunken. Nun ist die Flüssigkeitswärme bei 6 Atmosphären = 160,9, bei 1 Atmosphäre = 100,5, also ihr Unterschied = 60,4 Kalorien. Folglich beträgt die Wärmemenge, welche das Wasser zur Dampfbildung abgibt, 60,4 . 2000 Kalorien. Der sich bildende Dampf hat aber 1 Atmo-

sphäre Spannung, er bedarf daher einen Wärmezuschuß per 1 kg von 536,5 Kalorien; folglich beträgt die sich bildende Dampfmenge

$$60{,}4 \cdot 2000 : 536{,}5 = 225{,}1 \text{ kg}.$$

Würde dieser Dampf gleichzeitig neben einander bestehen, so hätte er einen Raum nötig von 225,1 . 1,650 kbm = 371 kbm.

6. **Wärmegehalt des feuchten Dampfes.** Es sei q die Flüssigkeitswärme des Wassers im Augenblicke der Verdampfung, r die bei der Verdampfung von 1 kg nötige latente Wärme und x das Gewicht reinen Dampfes, das in 1 kg feuchten Dampfes enthalten ist, so werden auf die Verdampfung von x kg verwendet x r Kalorien; daher die in 1 kg der Mischung enthaltene Wärmemenge

$$Q = q + x\,r. \tag{6}$$

Es sei ferner q_0 die Flüssigkeitswärme des Speisewassers, so hat der Kessel an 1 kg solchen Dampfes eine Wärmemenge abzugeben gleich

$$q - q_0 + x\,r. \tag{7}$$

Beisp. Das Wasser komme mit 10° in den Kessel und verdampfe bei 5 Atmosphären Druck, der Dampf enthalte aber 30 Prozent Wasser, so ist $q = 153{,}7$; $q_0 = 10$; $x = 0{,}7$; $r = 499{,}2$; folglich die Wärme, welche 1 kg dieses Dampfes im Kessel aufnimmt:

$$153{,}7 - 10 + 0{,}7 \cdot 499{,}2 = 493{,}1 \text{ Kalorien.}$$

7. **Wärme des überhitzten Dampfes.** Nach Regnault ist die specifische Wärme des Dampfes für gleichen Druck (S. 341) = 0,4806; nach Hirn = 0,5. Wird daher gesättigter Dampf um t Grade überhitzt, so nimmt er annähernd 0,5 t Kalorien auf.

8. **Wassergehalt des feuchten Dampfes.** Dem Dampfe, wie er aus dem Kessel kommt, ist gewöhnlich Wasser beigemischt. Man leite solchen feuchten Dampf in kaltes Wasser, so aber, daß er sich darin vollständig kondensiert, so kann mittelst eines solchen Versuches der Wassergehalt des Dampfes ermittelt werden.

Es sei das Gewicht des Dampfes = 1 kg; darin seien x kg reiner Dampf enthalten von der Flüssigkeitswärme q und der Verdampfungswärme r, so enthält dieser Dampf eine Wärmemenge $= q + x\,r$. Dieser Dampf kondensiere sich in p kg Wasser, dessen Flüssigkeitswärme q_0 sei, so enthält dieses Wasser $p\,q_0$ Kalorien Wärme. Nach der Mischung sind $1 + p$ kg Wasser vorhanden; ihre Flüssigkeitswärme sei q_1, so wird der Wärmegehalt dieses Wassers sein $= q_1\,(1 + p)$. Geht während des Vorganges keine Wärme verloren, so muß sein

$$q_1\,(1 + p) = p\,q_0 + q + x\,r, \tag{8}$$

woraus x berechnet werden kann.

Beisp. Das kalte Wasser habe 10°, der Dampf 152,2° und das aus beiden entstandene warme Wasser 20° Temperatur, so ist zunächst

$$q_0 = 10;\; q = 153{,}7;\; r = 499{,}2;\; q_1 = 20.$$

Das Gewicht des kalten Wassers auf je 1 kg Dampf sei = 50 kg, so wird

$$20\,(50 + 1) = 50 \cdot 10 + 153{,}7 + 499{,}2\,x,$$

woraus folgt $x = 0{,}734$. Es enthält daher 1 kg der Mischung, wie sie aus dem Kessel kommt, 0,734 kg Dampf und 0,266 kg Wasser.

9. **Dampfmenge per 1 kg Brennstoff.** Es sei H die Heizkraft und w der Wirkungsgrad der Feuerung, so werden wH Kalorien Wärme nützlich. Haben q_0, q, x und r die unter (6) angegebene Bedeutung, so erfordert 1 kg des feuchten Dampfes einen Wärmezuschuß $= q - q_0 + x\,r$. Daher kann mit 1 kg Brennstoff folgendes Gewicht G feuchten Dampfes erzeugt werden:

$$(9) \qquad G = \frac{w\,H}{q - q_0 + x\,r}.$$

Hiernach wird die Dampfmenge groß, wenn die Heizkraft und der Wirkungsgrad groß sind, wenn das Wasser mit hoher Temperatur in den Kessel kommt und wenn der Dampf viel Wasser enthält.

Beisp. Es sei die Heizkraft der Steinkohle $H = 7000$ Kalorien; der Wirkungsgrad der Feuerung $w = 0{,}7$, die Temperatur des Speisewassers $= 0$, also auch $q_0 = 0$; das Wasser verdampfe bei 6 Atmosphären Druck, so daß $q = 160{,}9$ Kalorien; ferner enthalte der Dampf 10 Prozent Wasser, es ist also $x = 0{,}9$ kg. Daher kann 1 kg dieser Steinkohle folgende Dampfmenge hervorbringen, da $r = 494{,}2$:

$$G = \frac{0{,}7 \,.\, 7000}{160{,}9 + 0{,}9 \,.\, 494{,}2} = 8{,}09 \text{ kg}.$$

Für eine Temperatur des Speisewassers von 0^0 und einen Dampfdruck von 5 Atm. erhält man folgende Zusammenstellung:

Dampfmenge per 1 kg Steinkohle.

Heizkraft.	Für einen Wirkungsgrad der Feuerung von 0,80			0,70			0,60		
	und einen Wassergehalt des Dampfes von 0	0,1	0,2	0	0,1	0,2	0	0,1	0,2
Kal.	kg	kg	kg	kg	kg	kg	kg	kg	kg
7500	9,19	9,95	10,85	8,04	8,71	9,49	6,89	7,46	8,14
7000	8,57	9,29	10,13	7,50	8,12	8,86	6,43	6,96	7,59
6500	7,96	8,62	9,40	6,97	7,54	8,22	5,97	6,46	7,05
6000	7,35	7,96	8,68	6,43	6,96	7,59	5,51	5,97	6,51

10. **Aenderung der Dampfmenge bei der Ausdehnung und Zusammendrückung.** Dehnt sich Dampf in einem Gefäße aus, ohne daß das Gefäß Wärme aufnimmt oder abgibt, so wird dem Dampf gleichwohl ein Teil seiner Wärme entzogen und zwar derjenige Teil, welcher sich bei der Ausdehnung in Arbeit umsetzt. Diese in Arbeit verwandelte Wärme hat zur Folge, daß sich ein Teil des Dampfes kondensieren muß.

Wird gesättigter Dampf in einem Gefäße zusammengepreßt, ohne daß das Gefäß Wärme aufnimmt oder abgibt, so muß eine äußere

Arbeit verrichtet werden, um die Zusammenpressung zu bewirken. Diese äußere Arbeit verwandelt sich in Wärme, welche der Dampf aufnimmt. Infolge dieser Wärmeaufnahme kann der Dampf überhitzt werden.

Es sei: T die absolute Temperatur des Dampfes, r seine latente Wärme und x die in 1 kg der Mischung enthaltene Dampfmenge für den Anfangszustand; ferner T_1, r_1 und x_1 dasselbe am Ende der Expansion und die mittlere specifische Wärme der Mischung 1,018, so kann x_1 bestimmt werden nach folgender Formel von Clausius:

$$(10) \qquad \frac{x_1 r_1}{T_1} = \frac{x\,r}{T} + 1{,}018 \cdot 2{,}3026 \log \frac{T}{T_1} \cdot$$

Das Gesetz gilt auch für die Zusammendrückung, so lange der Dampf nicht überhitzt wird.

Beisp. 1. Es dehne sich Dampf von 6 Atmosphären arbeitend aus, bis der Druck auf 0,8 Atmosphären gesunken ist. Er habe einen Wassergehalt = 0,05; wie groß ist dieser im Endzustand?

Hier ist x = 0,95 und gemäß Tab. II auf S. 376 für 1 kg Dampf

$$r = 494{,}2 \text{ Kal.}, \quad T = 159{,}22 + 273 = 432{,}22^0.$$
$$r_1 = 540{,}8 \ \text{„} \quad T_1 = \ 93{,}88 + 273 = 366{,}88^0.$$

Daher nach (10)

$$\frac{x_1 \,.\, 540{,}8}{366{,}88} = \frac{0{,}95 \,.\, 494{,}2}{432{,}22} + 1{,}018 \cdot 2{,}3026 \log \frac{432{,}22}{366{,}88} \cdot$$
$$x_1 \,.\, 1{,}47405 = 1{,}08623 + 0{,}16685; \quad x_1 = 0{,}8501.$$

Mithin besteht das Gemisch im Endzustand aus annähernd 85 Prozent Dampf und 15 Prozent Wasser. Zu dem ursprünglichen Wassergehalt von 5 Prozent sind noch 10 Prozent hinzugekommen.

Beisp. 2. Während der Expansion wird Wärme in Arbeit verwandelt. Diese Wärme entstammt zum Teil dem im Dampf enthaltenen Wasser, da dessen Temperatur sinkt. Es läßt sich nun denken, es sei der Wassergehalt im Endzustand gleich dem im Anfangszustand. Wie groß ist dieser, wenn die Spannung wie oben von 6 auf 0,8 Atm. erfolgt?

Hier ist $x_1 = x$ als Unbekannte zu betrachten. Daher nach Formel (10)

$$x \left(\frac{540{,}8}{366{,}88} - \frac{494{,}2}{432{,}22} \right) = 0{,}16685; \quad x = 0{,}504.$$

Mithin enthält in diesem Fall das Gemisch 0,5046 Dampf und 0,4954 Wasser.

11. **Druck des Dampfes während der Ausdehnung und Zusammenpressung.** Die Aenderung des Dampfes erfolge auf adiabatischem Wege (S. 346), so ändert sich der Druck nach dem Poisson'schen Gesetze (S. 347)

$$(11) \qquad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v} \right)^n.$$

p_0, v_0 Druck und spec. Volumen des Dampfes im Anfangszustand,
p, v dasselbe für den Endzustand.

Im Beispiel 1 auf S. 381 wurden im Anfangszustand 6 Atmosphären Druck, 0,05 kg Wasser und 0,95 kg Dampf vorausgesetzt und eine Expansion bewirkt auf 0,8 Atm. Druck. Dabei ergab sich eine specifische Dampfmenge von 0,85 kg. Es sei nun Formel (11) auf diesen Vorgang zur Bestimmung des Exponenten n anzuwenden.

Es ist $p_0 = 6$; $p = 0{,}8$ und nach Tab. II, S. 376
Volumen von 1 kg Dampf von 6 Atm. . . . . . = 0,306 kbm.
Volumen von 1 kg Dampf von 0,8 Atm. . . . . = 2,037 „
Daher Volumen von 0,95 kg von 6 Atm. 0,95 . 0,306 = 0,2907 „
und Volumen von 0,85 kg von 0,8 Atm. 0,85 . 2,037 = 1,7314 „

Setzt man diese Werte in (11), so wird

$$\frac{0{,}8}{6} = \left(\frac{0{,}2907}{1{,}7314}\right)^n; \text{ folgl. } n = 1{,}129.$$

Dieser Wert von n gilt aber nur für Dampf mit 0,05 ursprünglichem Wassergehalt; für einen andern Wassergehalt ändert sich auch der Exponent n.

Bezeichnet wie oben x den specifischen Dampfgehalt im Anfangszustand, so ist annähernd

$$(12) \qquad n = 1{,}033 + 0{,}1\,x.$$

Setzt man hierin $x = 0{,}95$, entsprechend der Annahme, so wird

$$n = 1{,}033 + 0{,}1 \cdot 0{,}95 = 1{,}128$$

annähernd wie oben angegeben worden.

Für trockenen Dampf wird $x = 1$; daher der Exponent für solchen Dampf

$$(13) \qquad n = 1{,}133.$$

12. **Geschwindigkeit des Dampfes.** Es seien $q + x\,r$ und $q_1 + x_1\,r_1$ die Wärmemengen, welche 1 kg Dampf enthält unmittelbar vor und nach der Oeffnung, durch welche der Dampf mit der Geschwindigkeit v abströmt, so entspricht der Differenz dieser Wärmemengen eine akkumulirte Arbeit $= 1 \cdot \frac{v^2}{2g}$; daher

$$\frac{v^2}{2g} = 424\,(q - q_1 + x\,r - x_1\,r_1).$$

Die Differenz $x\,r - x_1\,r_1$ ist gegenüber $q - q_1$ klein; daher annähernd die gesuchte Geschwindigkeit (vergleiche Gleichung 10, S. 349)

$$(14) \qquad v = \sqrt{424 \cdot 2g\,(q - q_1)}.$$

Beisp. Mit welcher Geschwindigkeit strömt Dampf von 2 Atmosphären in die freie Luft ab?

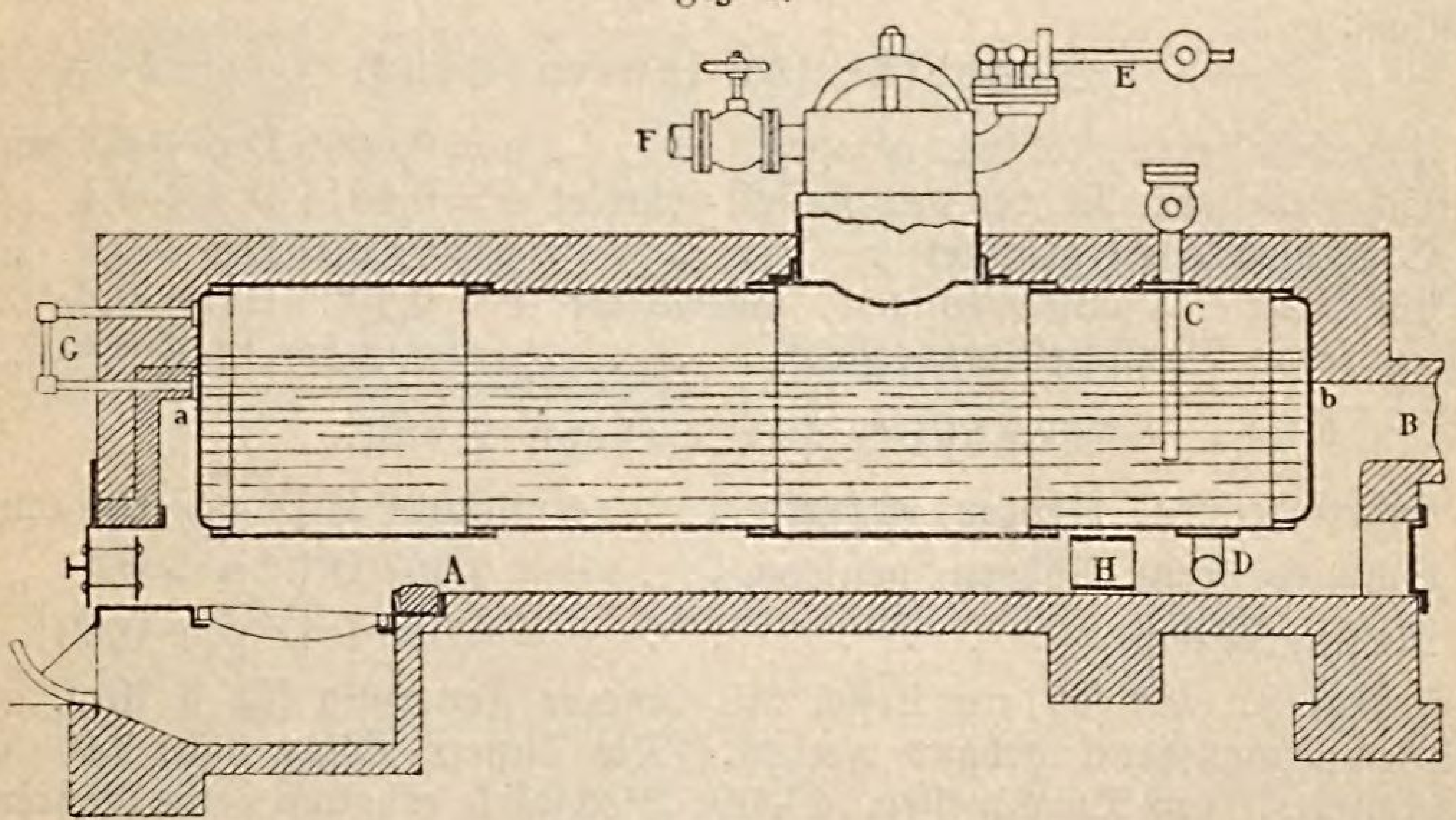
Nach Tab. II, S. 375 ist für 2 Atm. . . . $q = 121{,}4$ Kalor.
und für 1 Atm. . . . $q_1 = 100{,}5$ „
Daher nach Formel (14)

$$v = \sqrt{424 \cdot 2 \cdot 9{,}808\,(121{,}4 - 100{,}5)} = 417 \text{ m}.$$

85. Dampfkessel und seine Teile.

1. **Wesentlicher Bestand einer Kesselanlage.** Den einfach cylindrischen Kessel stellt in vertikalem Längenschnitt dar Fig. 1. Die gasförmigen Verbrennungsprodukte, die auf dem Roste gebildet werden, ziehen unter dem Kessel in der Richtung von A nach D hin und gelangen durch den Kanal B nach dem Kamin. Sie bestreichen die Kesselfläche bis hinauf zur Horizontalen a b, welche Feuerlinie heißt. Die bestrichene Fläche ist die Heizfläche; diese soll nicht nur mit Wasser bedeckt sein, sondern es soll das Wasser im Kessel um 10 bis 18 cm

Fig. 1.



über a b hinaufreichen. Es sind: C das Speiserohr; D das Ablaßrohr; E das Sicherheitsventil; F die Abschließung in der Leitung, beide letztern am Dampfdom (Raum über dem Kessel, um daraus möglichst trockenen Dampf zu gewinnen) angebracht; G das Wasserstandsglas (Wasserstandszeiger); H ein Kesselträger. Unterhalb B liegt in der Ofenwand eine Oeffnung zum Reinigen des Rauchkanals. Wo die Temperatur im Ofen hoch ist, wie bei a, muß die Kesselwand mit einer feuerfesten Backsteinschicht gefüttert werden.

2. **Kesselmaterial.** Zu Dampfkesseln soll nur vorzügliches Material verwendet werden. Hierzu gehört die Eigenschaft der Zähigkeit, Ausdehnbarkeit. Wenn neben einander liegende Kesselteile ungleich erwärmt werden, so wird die heißere Zone verkürzt durch die kältere und diese verstreckt durch die heißere. Ist die heißere die kleinere, so kann sie bauchig werden; ist die kältere die kleinere, so kann sie reißen und eine Explosion veranlassen. Dies letztere wird um so weniger eintreten, je dehnbarer das Material ist.

3. **Kesselvernietung.** Darüber nachzusehen S. 183.

4. **Blechdicke der Kessel.** Nach der französischen Verordnung vom 22. Mai 1843 soll die Wanddicke e des Eisenbleches für cylindrische Kessel, welche einen Druck von innen auszuhalten haben, sein

$$e = 0{,}0018\ D\ p + 0{,}3\ \text{cm},$$

wo D den Durchmesser des Cylinders in Centimetern und p den Ueberdruck des Dampfes in Atmosphären bezeichnen.

Obschon diese Formel fast in allen Ländern zur Geltung kam, ist man doch in neuerer Zeit mehr und mehr davon abgekommen.

Nach Radinger war bei den europäischen Kesseln der Wiener Weltausstellung im Mittel

$$e = 0{,}0011\ D\ p + 0{,}3\ \text{cm}.$$

Für die verschiedenen Fälle kann man sich an die folgenden Regeln halten:

Wanddicke für innern Druck.

Schmiedeiserne Röhren, gezogen . . .	$e = 0{,}0009\ D\ p + 0{,}3$ cm.
Schmiedeiserne Röhren und Kessel, genietet	$e = 0{,}0011\ D\ p + 0{,}4$ „
Stahlblechkessel, genietet	$e = 0{,}0007\ D\ p + 0{,}3$ „
Gußeiserne Dampfleitungen, Vorwärmer	$e = 0{,}0025\ D\ p + 0{,}8$ „
Kupferne Dampfleitungsröhren	$e = 0{,}0015\ D\ p + 0{,}4$ „

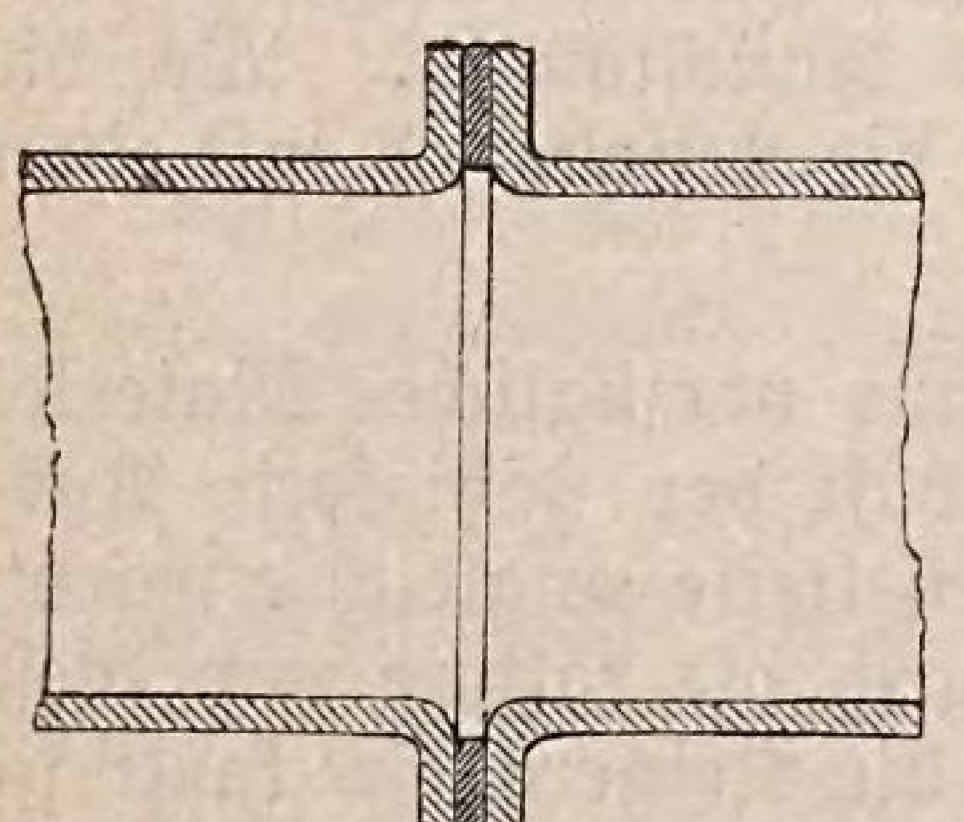
Wanddicke für äußern Druck.

Schmiedeiserne Röhren, gezogen . .	$e = 0{,}006\ D \sqrt[3]{p} + 0{,}2$ cm.
Schmiedeiserne Röhren, genietet . .	$e = 0{,}007\ D \sqrt[3]{p} + 0{,}4$ „
Messingröhren	$e = 0{,}010\ D \sqrt[3]{p} + 0{,}22$ „

Beisp. Es soll ein Kessel mit innerer Feuerung für 6 Atm. absoluten Dampfdruck gebaut werden. Die äußere Röhre habe 140 cm, die innere 70 cm Durchmesser. Welche Blechstärke erhalten beide Röhren?

Zieht man von den 6 Atm. absolutem Druck den der äußern Luft ab, so bleibt ein Ueberdruck $p = 5$ Atm. Hierfür ist

für den äußern Kessel . . .	$e = 0{,}0011 \cdot 140 \cdot 5 + 0{,}4 = 1{,}2$ cm
für die Feuerröhre	$e = 0{,}007 \cdot 70 \sqrt[3]{5} + 0{,}4 = 1{,}3$ „



Um bei langen Feuerröhren das Plattdrücken zu verhindern, werden auf der äußern Seite der Röhre in gewissen Abständen Ringe oder Flanschen, welche die Kreisform sichern, am häufigsten nach der in beistehender Figur angegebenen Verbindung angebracht.

Die Endflächen cylindrischer Kessel sind entweder gewölbt oder flach. Die Wanddicke der letztern soll größer sein als die des cylindrischen Teiles.

Den ebenen Endflächen, welche durch Stehbolzen verankert sind, gibt man folgende Wanddicke:

$$e = 0{,}03\,a \sqrt{p} + 0{,}4\ \text{cm},$$

worin a die Entfernung der Bolzen von einander bezeichnet. Die Bolzen selbst erhalten folgende Durchmesser:

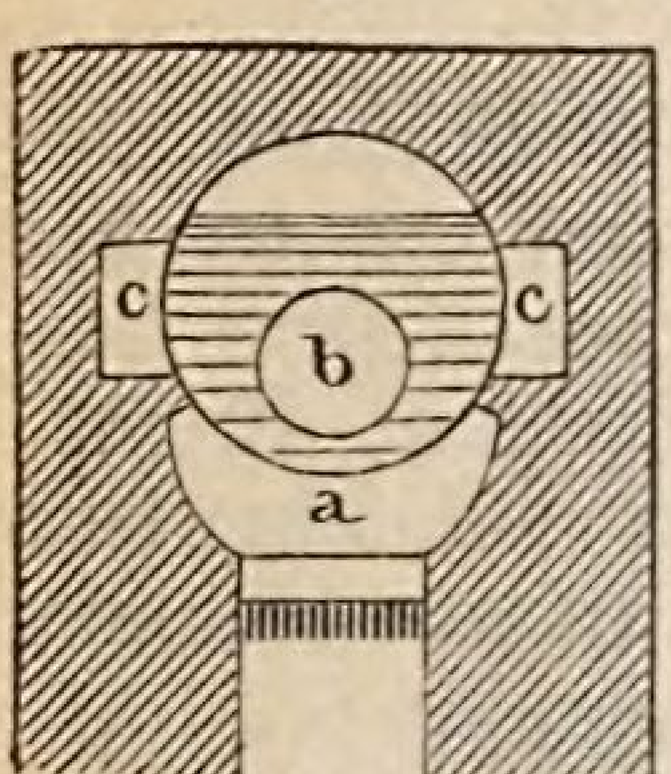
$$d = 0{,}05\,a\sqrt{p} + 0{,}5 \text{ cm}.$$

5. **Kesselformen.** Man kann folgende Formen unterscheiden:

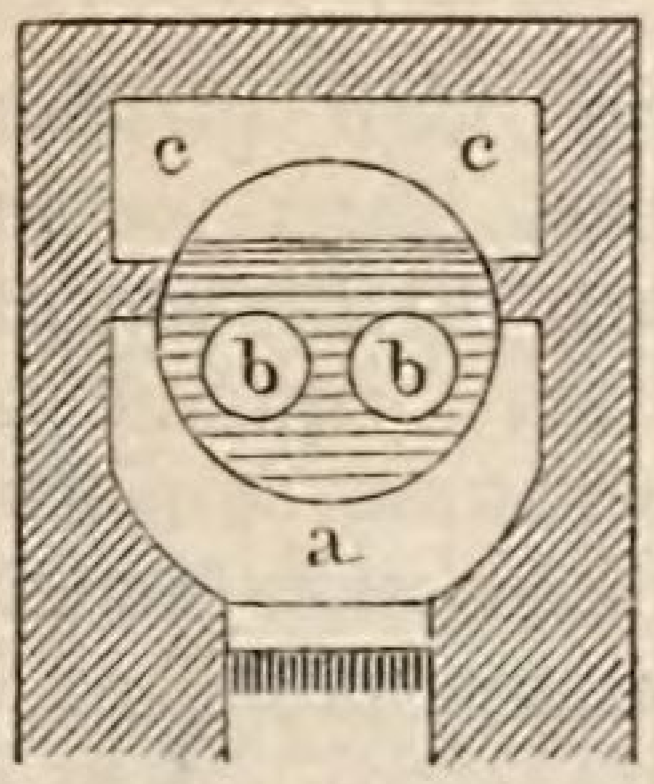
a) Kessel mit äußerer Feuerung: einfache Cylinderkessel wie oben, Kessel mit 1 oder 2 weiten Rauchröhren, Fig. 2 und 3, Kessel mit engen Rauchröhren (Röhrenkessel), Kessel mit 2 und 3 Siederröhren (Bouilleurs), Fig. 4, Kessel mit engen Wasserröhren (System Belleville, Root 2c.).

b) Liegende Kessel mit innerer Feuerung: Kessel mit einem

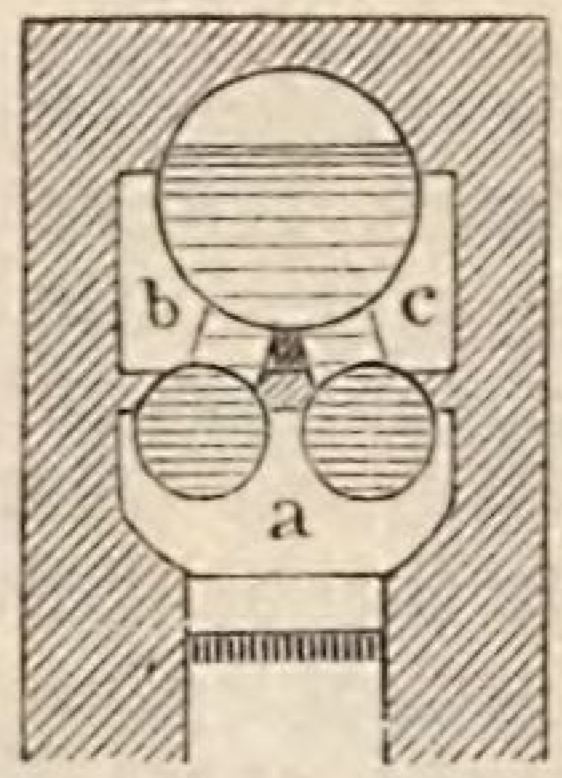
2.



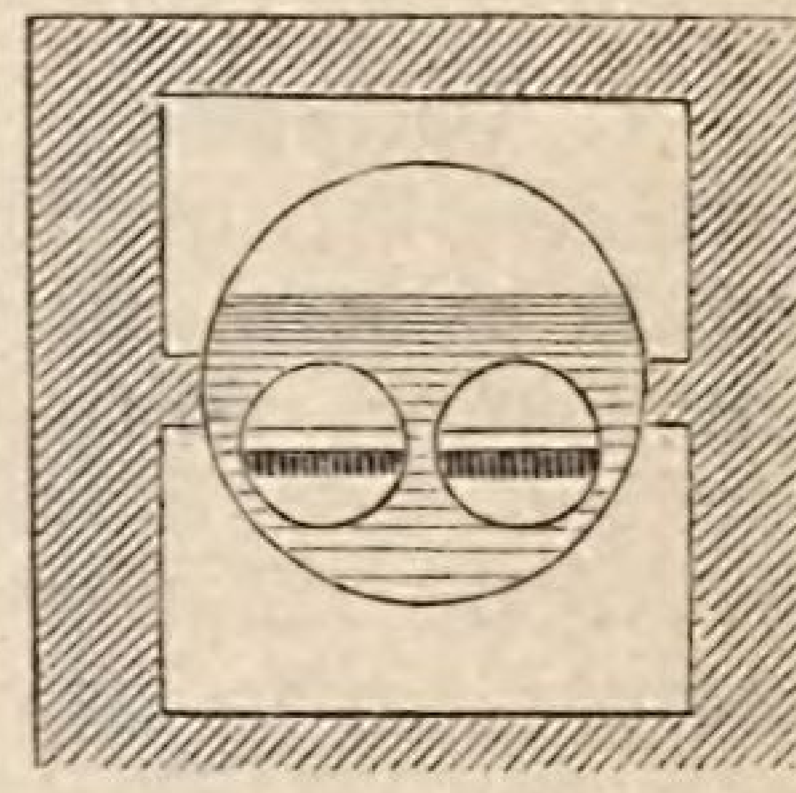
3.



4.

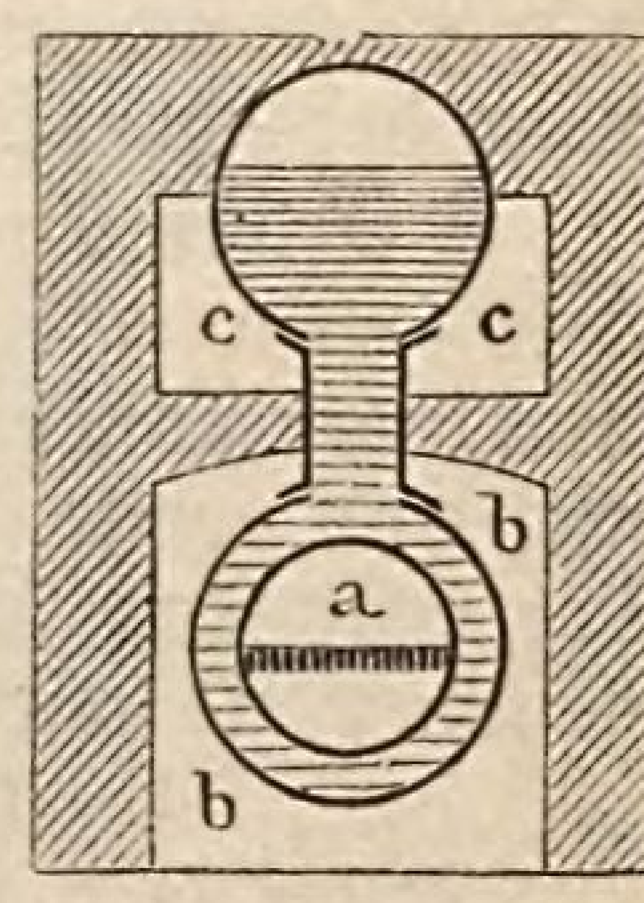


5.



Feuerrohr (Cornwall-Kessel), mit 2 Feuerröhren, Fig. 5, mit Flammrohrkessel und darüber liegendem Wasserkessel (nach Fairbairn), Fig. 6, mit einer Feuerröhre und parallelen engen Rauchröhren, Lokomobil- und Lokomotiv-Kessel mit Feuerbüchse vorn, engen Rauchröhren in der Mitte und Rauchkasten hinten, Schiffskessel mit flachen und mit cylindrischen Wänden u. s. w.

6.



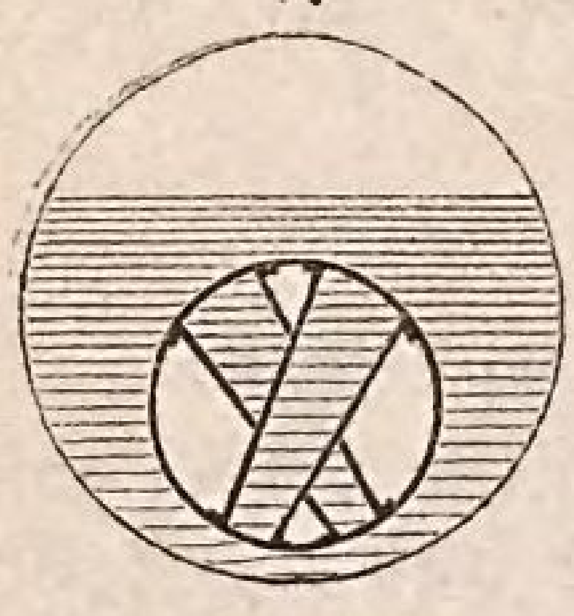
Bei Kessel 2 geht die heiße Luft vom Roste aus durch den Feuerkanal a vorwärts, kommt durch das Rohr b rückwärts und streicht durch die Züge c, c wieder vorwärts nach dem Kamin.

Bei Kessel 3 ziehen die heißen Gase durch den Zug a vorwärts, kommen durch die Röhren b, b rückwärts und gelangen mit einer Temperatur von cirka 300° in den Zug c, c über den Kessel. Sie bestreichen hier den Teil der Kesselfläche, welcher inwendig mit Dampf statt mit Wasser belegt ist. Diese Anordnung, auch bei Kessel 4 angewendet, ist zulässig, wenn die Heizfläche der vorhergehenden Züge verhältnismäßig groß ist. In England und der Schweiz existieren viele solche Einmauerungen seit mehr als 30 Jahren. Es haben sich dabei keinerlei Uebelstände gezeigt.

Bei Kessel 4 wird unter die beiden Siederröhren gefeuert, die heiße Luft zieht durch den Feuerkanal a vorwärts, durch b rückwärts und c vorwärts nach dem Kamin.

Bei Kessel 5 findet die Feuerung in den Röhren statt. Die heiße Luft bewegt sich durch diese Röhren, kommt unter dem Kessel rückwärts und gelangt über dem Kessel vorwärts nach dem Kamin.

7.



Kessel 6 hat drei Züge: Zug a in der Flammröhre, b um den untern Kessel herum und c unter dem obern Kessel gegen das Kamin.

In Kesseln mit innerer Feuerung werden häufig noch Gefäße in den Räumen angebracht, welche die heißen Gase durchziehen, z. B. in Feuerröhren, Fig. 7, hinter dem Rost Querröhren (nach Galloway), welche die Heizfläche vermehren und zur Cirkulation des Wassers beitragen.

c) Aufrechte Cylinderkessel mit innerer Feuerung. Um deren Heizfläche möglichst groß zu machen, werden im Innern Röhren angebracht. Die einen dieser Röhren werden vom Rauch durchstrichen, andere sind mit Wasser gefüllt. Die einen liegen quer, andere aufrecht u. s. w.

6. **Heizfläche.** Je größer, unter sonst gleichen Umständen, die Heizfläche ist, um so mehr Wärme wird durch sie in das Innere des Kessels dringen, um so größer also der Wirkungsgrad des Kessels sein. Die Wärme, welche irgend ein Teil der Heizfläche aufnimmt, ist proportional dem Unterschied der Temperaturen außerhalb und innerhalb des Kessels. Man denke sich die Heizfläche eines Kessels in auf einander folgende gleiche Teile zerlegt. Die Temperatur des Dampfes sei 150°, die Temperatur im Feuerraum am Anfang des ersten Flächenteils 1200°, am Ende des ersten, bezw. am Anfang des zweiten Flächenteils 800°; so werden sich die Gase unter dem ersten Teil abkühlen um 400°. Der Gang der Abkühlung unter den folgenden Teilen ergibt sich nun wie folgt.

Die Temperaturdifferenz ist: am Anfang des ersten Flächenteils $1200 - 150 = 1050^\circ$, am Anfang des zweiten $800 - 150 = 650^\circ$. Man kann nun annehmen, es verhalten sich die Wärmemengen, welche der erste und zweite Flächenteil aufnehmen, wie diese Temperaturdifferenzen. Der erste Teil kühlt die Temperatur ab um 400°, der zweite kühle sie ab um x, so wird sein

$$1050 : 650 = 400 : x; \text{ daher } x = 248^\circ.$$

Unter dem zweiten Flächenteil sinkt daher die Temperatur von 800° auf $800 - 248 = 552^\circ$. Verfährt man mit dem zweiten und dritten, dem dritten und vierten Flächenteil rc. in gleicher Weise, so ergeben sich folgende Resultate:

Nr. der Flächenteile.	Temperaturen.		Abkühlung		Mittlere Temperaturdiff.	
	Anfang.	Ende.	um Grade.	in Proz.	für 1 Teil.	für alle Teile.
1	1200	800	400	0,333	850	850
2	800	552	248	0,207	526	688
3	552	399	153	0,128	325	567
4	399	304	95	0,079	202	476
5	304	246	58	0,048	125	405
6	246	210	36	0,030	78	351
7	210	188	22	0,018	49	308

Aus dieser Uebersicht ergeben sich unmittelbar folgende Schlüsse:

a) Die letztern Flächenteile nehmen nur sehr wenig Wärme mehr auf, so der sechste 3, der siebente 1,8 Prozent der gesamten Wärme.

b) Gibt man dem Kessel nur 6 Flächenteile, so gehen die heißen Gase mit 210° in den Schornstein über, sie sind also nur noch 60° heißer als der Dampf. Eine größere Wärmeaufnahme kann ohne Vorwärmer nicht erreicht werden, ohne den Kessel all zu sehr zu vergrößern. Hierfür ist die mittlere Temperaturdifferenz 351°.

7. **Verschiedene Einflüsse für den Wärmedurchgang.** Außer der Temperaturdifferenz hat auf die Wärmemenge, welche per Stunde durch 1 qm Heizfläche dringt, Einfluß: die Lage der Heizfläche zur Richtung der Gase, die Dicke der Wand, der Zustand ihrer Oberfläche, insbesondere das Belegtsein derselben mit Ruß, Asche, Kesselstein, Dampf 2c.

Eine Heizfläche, welche mit Wasser belegt ist, nimmt 2mal mehr Wärme auf, als eine mit Dampf belegte. Es ist daher wichtig, daß an den Kesselwänden keine „Dampfpelze" unter Wasser hängen bleiben. Aus diesem Grunde steigt die Verdampfungsfähigkeit eines Kessels, wenn das Wasser in demselben in Bewegung ist, wie z. B. bei einem Lokomotivkessel während der Fahrt.

8. **Verdampfungsvermögen.** Ein Kessel kann, unter oben erwähnten Umständen, wenn sich die Gase bis auf 210° abkühlen, per 1 qm Heizfläche in der Stunde 13 kg Dampf liefern.

Läßt man das letzte Sechstel der Kesselfläche weg, d. h. gibt man ihr nur $^5/_6$ der angenommenen Heizfläche, so steigt die mittlere Temperaturdifferenz von 351° auf 405°; daher kann der Kessel folgende Wassermenge per 1 qm in der Stunde verdampfen:

$$13 \cdot \frac{405}{351} = 15 \text{ kg}.$$

Allein in diesem Falle gehen die Gase mit der höheren Temperatur von 246° in das Kamin, der Wirkungsgrad wird also kleiner.

Bei 13 kg Verdampfung gehen annähernd 13 . 630 = 8190 Kalorien Wärme bei 351° Temperaturdifferenz in den Kessel; es macht dies auf 1° Temperaturdifferenz in der Stunde per 1 qm Heizfläche 8190 : 351 = 23 Kalorien (S. 358).

9. **Dimensionen der Kessel.** Gewöhnlich geht man mit der Dicke des Bleches bei cylindrischen Wänden nicht über 2 cm hinaus. Deshalb kann auch der Durchmesser cylindrischer Kessel gewisse Grenzen nicht überschreiten. Für eine große Dampfspannung ist es zweckmäßig, die nötige Heizfläche in der Vergrößerung der Kessellänge, statt in der des Durchmessers zu suchen.

Aus der Heizfläche oder der Dampfmenge, welche der Kessel per Stunde liefern soll, können die Dimensionen des Kessels immer bestimmt werden. Dabei ist es selbstverständlich, daß man nicht Kessel baut mit jeder beliebigen Heizfläche. Es ist dies wegen der aufzuwendenden Blechtafeln nicht zulässig. Daher steigt die Heizfläche in runden Zahlen, wie z. B. 10, 15, 20 2c.

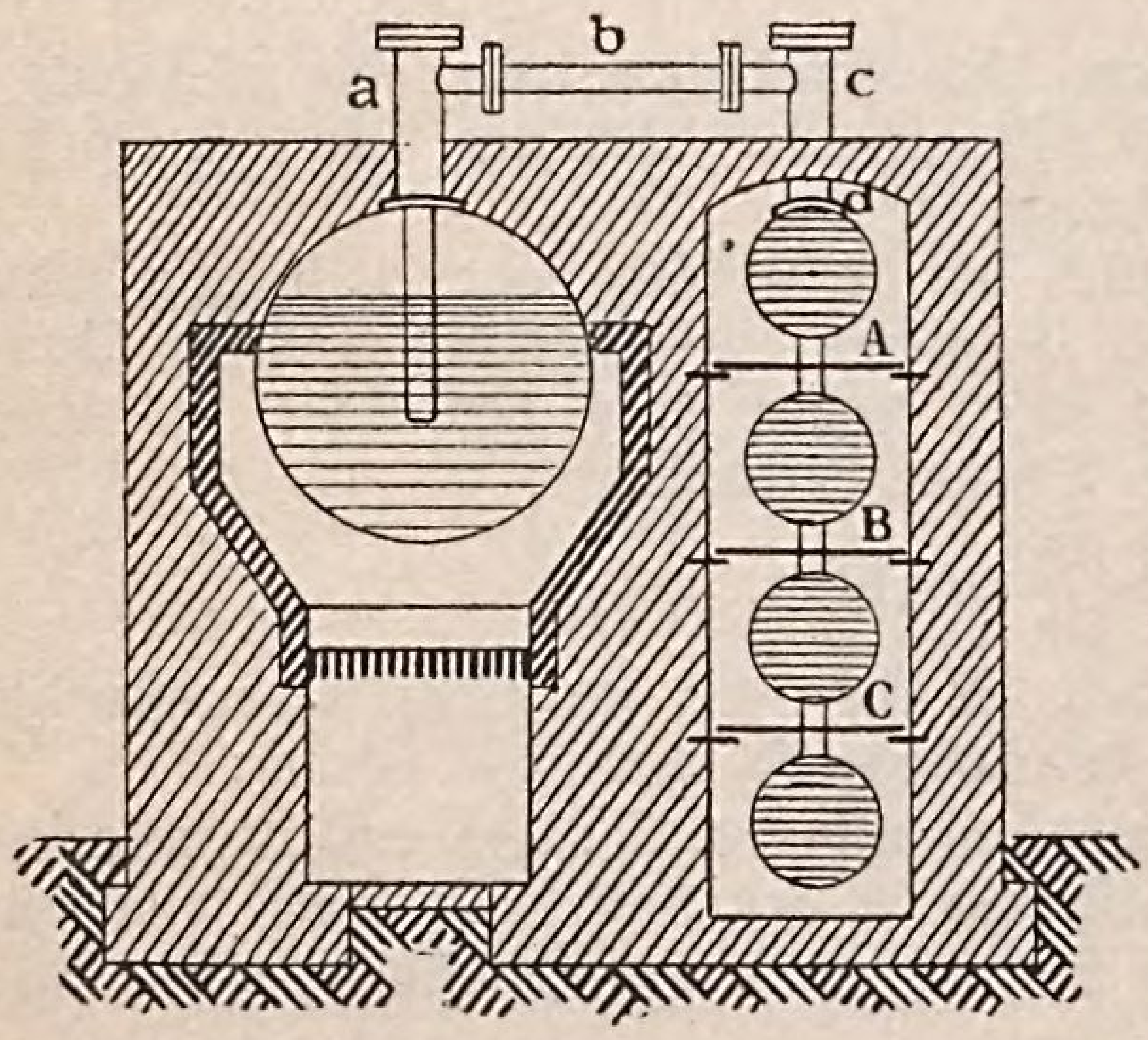
Beisp. Welche Dimensionen muß ein einfach cylindrischer Kessel haben, welcher 120 kg Dampf per Stunde liefern kann?

Nehmen wir an, 1 qm Heizfläche gebe 13 kg Dampf per Stunde, so ist die Heizfläche 120 : 13 = 9,23 qm.

10. **Wassergehalt der Kessel.** Ist derselbe groß, so bedarf er einer großen Wärmemenge, um Dampf zu bilden; das Anheizen dauert also lange. Vermöge des großen Wärmevorrats erhält er, auch bei unregelmäßigem Heizen, die Spannung möglichst konstant, richtet aber im Falle einer Explosion große Verheerungen an. Ist der Wassergehalt klein, so erhält man in kurzer Zeit Dampf, es muß aber die Speisung sehr regelmäßig sein, um den Wasserstand im Kessel auf der richtigen Höhe zu erhalten.

Wenn die Oberfläche des Wassers im Kessel im Verhältnis zur Heizfläche klein ist, so wird der aus dem Innern des Wassers hervortretende Dampf die Wasseroberfläche rasch durchbrechen, der Dampf wird daher feucht werden.

11. **Rauchvorwärmer.** Um die Wärme der Gase, welche den Kessel verlassen, noch weiter auszunützen, wendet man Vorwärmer an, in welche das Wasser gespiesen wird. Diese Vorwärmer bilden ein System von Röhren A, B, . . von 20 bis 60 cm Weite. Das Wasser soll nach beistehender Anlage z. B. am einen Ende der untersten Röhre eintreten, alle Röhren der ganzen Länge nach durchstreichen und zuletzt längs des Weges d c b a vorgewärmt in den Kessel gelangen. Die Gase aber sollen in entgegengesetzter Richtung das Röhrensystem bestreichen, also dasselbe da verlassen, wo das Wasser am kältesten ist. Die Heizfläche wird bestimmt mittelst der letzten Formel auf S. 360 für k = 23.



12. **Dampfvorwärmer.** Bei einzelnen Anlagen wird es möglich, das Speisewasser durch den Abdampf vorzuwärmen. Ein Röhrensystem ist in ein Gefäß eingeschlossen, welches das Speisewasser enthält. Der Dampf strömt in die Röhren und erwärmt das Wasser. Die Heizfläche ist zu bestimmen nach der letzten Formel S. 360 für k = 700.

13. **Dampfüberhitzungsapparate.** Sie bestehen in einem Röhrensystem, in welchem der Dampf bei seinem Durchgang durch die heißen Röhren getrocknet und zugleich noch erwärmt wird. Beim Ueberhitzer soll das Prinzip der Gegenströmung wie beim Vorwärmer zur Geltung

kommen. Da der Dampf die Heizfläche weniger abkühlt als das Wasser, so wird der Ueberhitzer in hoher Temperatur bald zerstört.

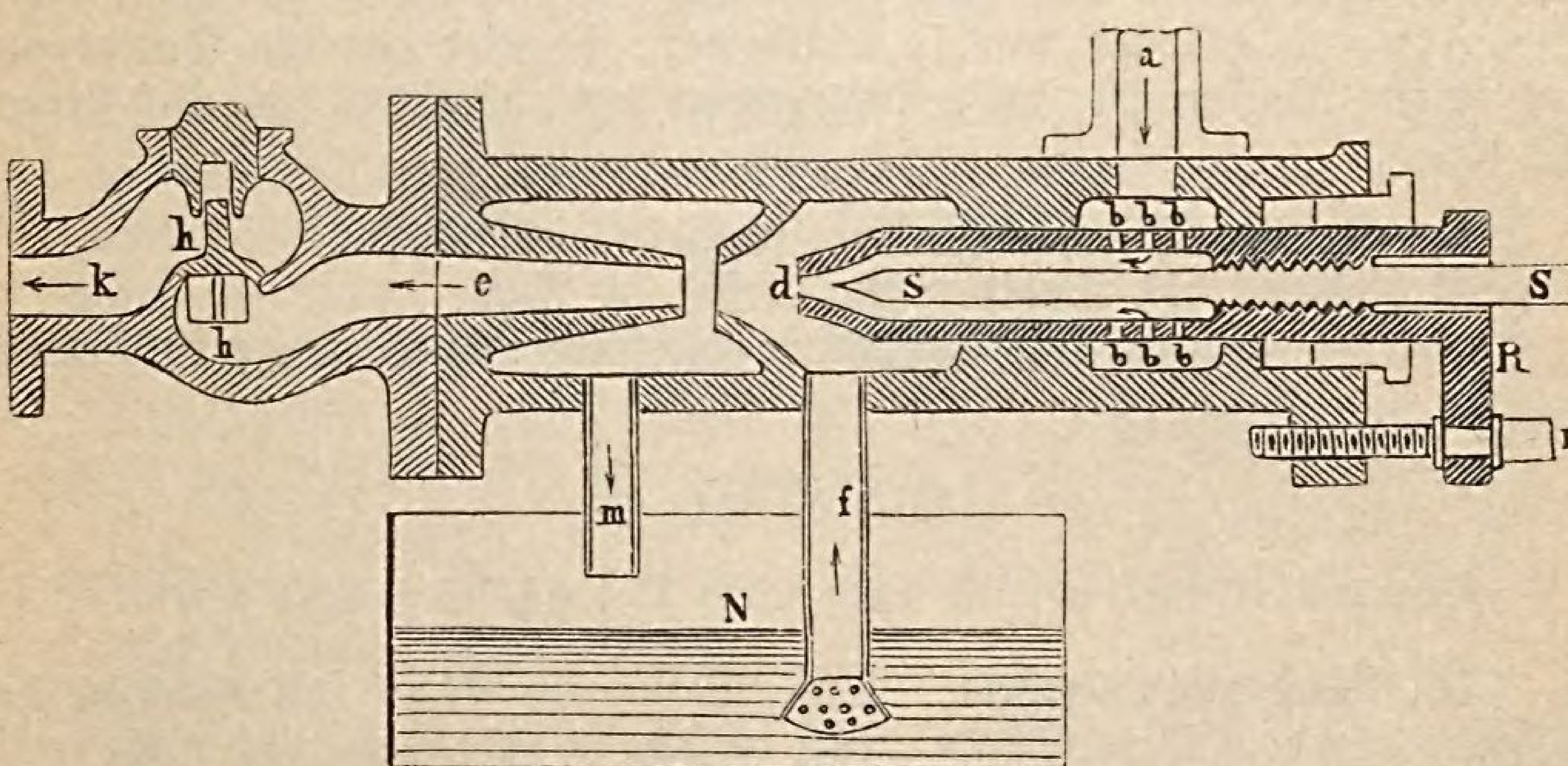
14. **Kesselproben.** Sie haben den Zweck, den Kessel sowohl auf Dichtheit als Widerstandsfähigkeit zu prüfen. Man füllt zu diesem Zweck den Kessel mit Wasser und schließt hierauf alle seine Oeffnungen. Sodann treibt man mittelst einer Pumpe etwas Wasser in den Kessel, oder man erwärmt das Wasser im Kessel, bis der Druck im Innern den nötigen Grad erreicht hat. Dieser soll 3 bis 4 Atmosphären mehr betragen, als wofür der Kessel bestimmt ist.

15. **Speiseapparate.** Das Speiserohr soll das Wasser in denjenigen Teil des Kessels leiten, wo die Temperatur der umgebenden Gase die niederste ist. Diese Speisung findet statt:

a) Durch den Druck des Wassers. Man bringt über dem Kessel ein Reservoir an, aus dem das Wasser durch sein Uebergewicht über den Dampfdruck in den Kessel fließt. Hat der Dampf 0,5 Atm. Ueberdruck, so muß das Niveau des Wasserbehälters wenigstens um 0,5 . 10,33 m = 5,17 m über dem Kessel liegen.

b) Durch gewöhnliche Pumpen. Diese sind so einzurichten, daß sie 3—4mal mehr Wasser liefern können, als gewöhnlich nötig.

c) Durch die unmittelbare Wirkung des Dampfes. Ein Speiseapparat dieser Art ist der Injektor von Giffard (1858). Er steht durch die Röhren a und k mit dem Kessel in Verbindung. Der Dampf strömt durch a und tritt durch die kleinen Oeffnungen b, b in den



hohlen Raum der Röhre dR. Durch die Spindel S kann die konische Oeffnung d dieser Röhre geschlossen oder offen gehalten werden. Ist d geöffnet, so springt der Dampfstrahl in den Kanal e über und kondensiert sich zum Teil. Dadurch entsteht ein luftverdünnter Raum, wodurch kaltes Wasser, wie bei einer Pumpe, aus dem Behälter N durch das Rohr f aufgesogen wird. Dieses Wasser kondensiert den Dampfstrahl ganz; es bildet sich also aus dem kalten Wasser und dem Dampf warmes Wasser; dasselbe strömt mit einer gewissen Geschwindigkeit gegen das

Ventil h, überwindet den Gegendruck des Kesselwassers auf das Ventil und gelangt somit in den Kessel. Durch die Schraube r kann das Rohr R d verschoben, der Wasserzufluß also reguliert werden. Durch das Rohr m fließt allfällig überschüssiges Wasser ab. Um eine Vorstellung von der Wirkungsweise des Apparates zu geben, machen wir folgende Annahmen:

Es sei der Dampfüberdruck im Kessel = 1 Atmosphäre; also die Höhe der Wassersäule, welche diesen Druck mißt = 10,33 m; folglich die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus dem Kessel fließen würde (S. 235) $= \sqrt{2 . 9{,}808 . 10{,}33} = 14{,}2$ m.

Der Dampf aber strömt theoretisch mit einer Geschwindigkeit von 417 m (S. 382) in den Raum d, wo seine Kondensation stattfindet. Nehmen wir an, der Dampf stoße mit dieser Geschwindigkeit gegen das Kondensationswasser. Dieses Wasser sei kalt und es genügen 7 kg davon, um 1 kg Dampf zu kondensieren, so verteilt sich die Quantität der Bewegung (S. 66), welche in der Masse 1 enthalten ist, auf $7 + 1 = 8$ Masseneinheiten; also wird die Geschwindigkeit der Masse 8 nur noch $^1/_8$ von der Geschwindigkeit des Dampfes, also $417 : 8 = 52$ m sein. Diese Geschwindigkeit wird durch die Nebenhindernisse auf cirka 50 Prozent reduziert, also nur betragen $0{,}5 . 52 = 26$ m. Da diese Geschwindigkeit, mit welcher das Kondensationswasser gegen das Kesselwasser fließt, größer ist als die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus dem Kessel fließen würde, so wird der Druck des Kondensationswassers ausreichen, um den Druck des Kesselwassers zu überwinden. Der Apparat arbeitet um so wirksamer, je niederer die Temperatur des kalten Wassers ist; diese Temperatur kann höchstens auf 65° steigen. Es sei

d der kleinste Durchmesser der Fangdüse in Millim.,
p Ueberdruck des Dampfes im Kessel in Atm.,
Q die pro Stunde im Maximum gelieferte Wassermenge in Litern,

so ist nach K. Jenny

$$Q = 35\, d^2 \sqrt{p}.$$

Für $p = 4$ und $d = 2$ wird $Q = 35 . 4 \sqrt{4} = 280$ Liter.

16. **Wasserstandszeiger.** Das Wasser im Kessel soll nicht zu hoch steigen, um den Dampfraum nicht zu sehr zu verengen, und nicht so tief sinken, daß die Heizfläche vom Wasser entblößt wird. Bei gewöhnlichem Betrieb soll das Wasser mindestens 12 cm über der höchsten Feuerlinie stehen. Die gewöhnlichen Wasserstandszeiger sind:

a) Die Glasröhren, in welchen das Niveau des Wassers eben so hoch steht als im Kessel. Am meisten in Anwendung.

b) Die Schwimmer, welche an einem durch die Kesseldecke gehenden Draht hängend, durch ein Gegengewicht balanciert werden. Nicht zu empfehlen, weil der Aufhängedraht leicht in der Stopfbüchse stecken bleibt. Dieser Schwimmer ist öfters mit einer Lärmpfeife versehen.

c) *Die Schwimmer mit horizontaler Achse*, welche durch den Kesselboden hindurchgeht und außerhalb des Kessels einen Hebel mit Zeiger dreht. Empfehlenswert.

d) *Die Schwimmer* von Lethuillier *mit magnetischer Führung* über dem Kessel. Empfehlenswert.

e) *Wasserstandshähne*, 2 oder 3 in verschiedenen Höhen. Obschon nicht selbstthätig, sind sie doch, weil einfach, viel angewendet.

Jeder Kessel sollte mit 2 Wasserstandszeigern versehen sein.

17. **Manometer.** Dies sind Vorrichtungen, welche den Dampfdruck im Kessel anzeigen. Die gewöhnlichsten sind (S. 321):

a) *Flüssigkeitsmanometer.* Es werden nur Quecksilbermanometer angewendet, jedoch nur für niedern Druck, oder aber dann als Kontrollapparate für die folgenden.

b) *Metallmanometer.* Die Röhre, welche den Kessel mit dem Apparat verbindet, soll zunächst dem letztern eine Biegung abwärts und dann wieder aufwärts machen. In dieser soll sich Wasser sammeln, das den Apparat vor hoher Temperatur schützt.

18. **Sicherheitsventil.** Um jede Erhöhung der Dampfspannung über eine gewisse Grenze hinaus zu verhüten und Explosionen unmöglich zu machen, ist jeder kleine Dampfkessel mit einem, jeder größere Kessel mit zwei Sicherheitsventilen zu versehen. Nach der französischen Verordnung von 1843 soll der kleinste Durchmesser d des Ventils in Centimeter sein:

$$d = 2{,}6 \sqrt{\frac{F}{P - 0{,}412}},$$

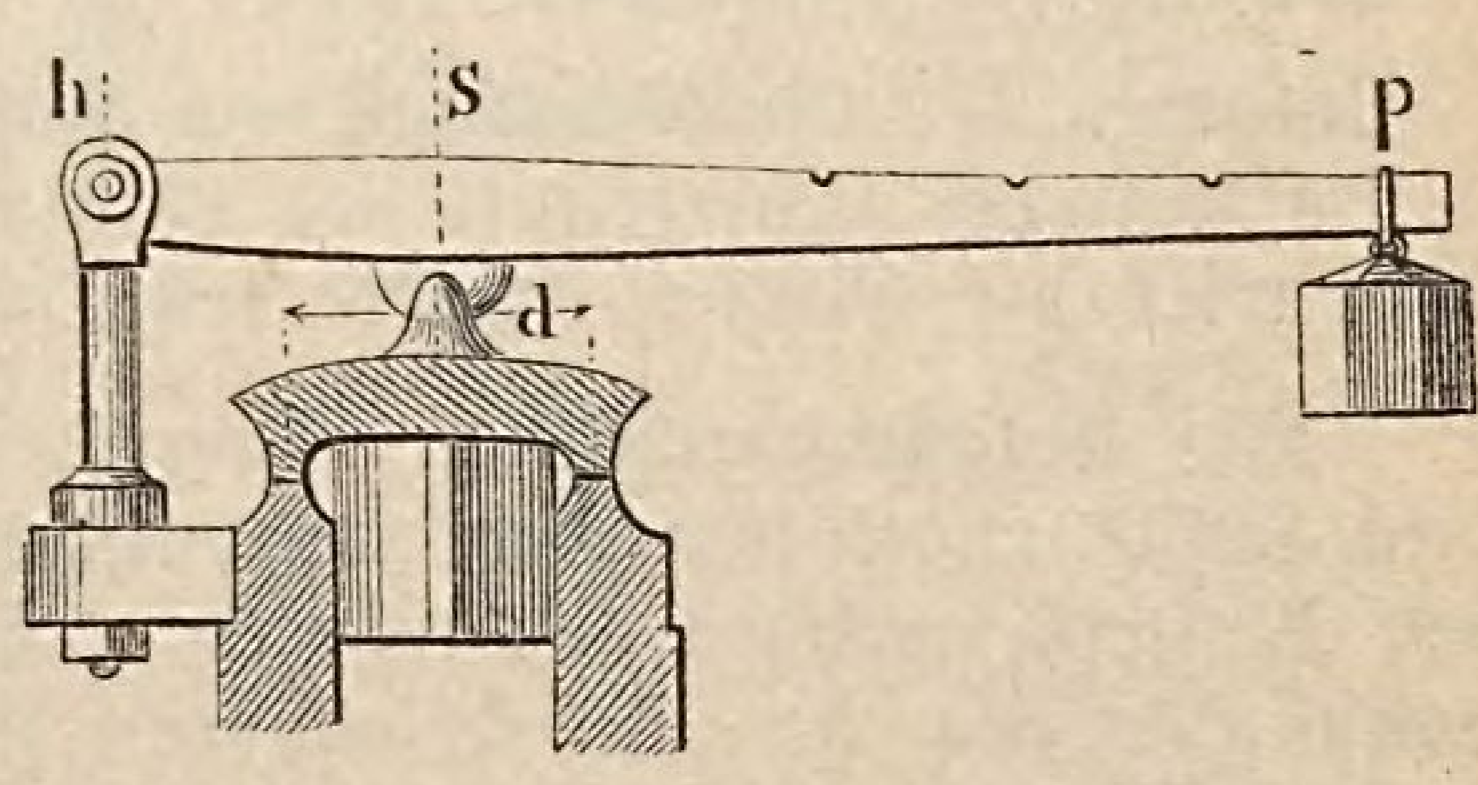
wo F die gesamte Heizfläche in Quadratmetern und
P den absoluten Druck des Dampfes in Atmosphären bedeuten.

Nach dieser Formel ist per 1 qm Heizfläche:

Absoluter Dampfdruck .	1,5	2	4	6	8	Atm.
Kleinster Ventilquerschnitt	4,87	3,33	1,47	0,95	0,70	qcm.

Die Breite der Auflagfläche soll nicht mehr als $^1/_{30}$ des Durchmessers des Ventils und in keinem Fall mehr als 2 mm betragen.

Die Ventile sind entweder mit Spiralfedern zugedrückt, wie bei Lokomotiven, oder durch Gewichte. Das Gewicht liegt entweder direkt auf dem Ventil, wie häufig bei Schiffskesseln, oder an einem *Hebel*. In diesem Fall drückt von oben herab: das Gewicht des Ventils, das Gewicht der Hebelstange, vom Schwerpunkt der Stange auf die Mitte S des Ventils reduziert, und das aufgehängte Gewicht P, ebenfalls reduziert auf die Ventilmitte S.



Diese drei Gewichte sind im Augenblick des Oeffnens zusammen gleich dem Dampfdruck, der auf eine Fläche vom Durchmesser d aufwärts

wirkt. Häufig zieht man das Gewicht des Ventils und der Stange als unbedeutend nicht in Betracht.

Beisp. Es soll das Gewicht P am Hebel eines Sicherheitsventils berechnet werden, das bei 6 cm Durchmesser für 5 Atm. absoluten Dampfdruck bestimmt ist.

Von innen drücken 5, von außen 1 Atm. gegen das Ventil; der Ueberdruck beträgt somit nur 4 Atmosphären. Nun ist der Druck auf 1 qcm Fläche bei 1 Atm. = 1,033 kg, bei 4 Atm. = 4 . 1,033 = 4,132 kg und auf die ganze Ventilfläche, deren Inhalt 28,27 qcm beträgt, = 116,81 kg.

Es sei die Entfernung Sh des Ventils vom Drehpunkt = 6 cm, die Entfernung Ph des Gewichts P vom Drehpunkt = 60 cm, das Gewicht des Ventils = 0,5 kg, dasjenige des Hebels = 1,5 kg und die Entfernung des Hebelschwerpunktes bis zum Drehpunkt = 25 cm, so ist

$$\frac{P \cdot 60}{6} + \frac{1{,}5 \cdot 25}{6} + 0{,}5 = 116{,}81 \text{ kg}$$

und somit das anzuhängende Gewicht P = 11,006 kg.

19. **Dampfdom und Dampfleitung.** Um möglichst trockenen Dampf zu erhalten, wird häufig der gewöhnliche Dampfraum durch einen Dom erweitert, der an einer Stelle angebracht wird, wo das Kesselwasser möglichst ruhig ist und von welchem die Dampfleitung ausgeht. Diese soll anfangs steigen, um das Kondensationswasser nach dem Kessel zurückleiten zu können.

Hat der Kessel Dampf zu einer Maschine zu leiten, bei welcher die Füllungsperiode nur kurze Zeit dauert, so wird bei enger Leitung die Geschwindigkeit des Dampfes sehr groß und es reduziert sich der Dampfdruck sehr bemerkbar.

Beisp. Ein Dampfkessel von 70 qm Heizfläche liefere in der Stunde 70 . 13 kg Dampf. Man gebe der Dampfleitung 17 cm Durchmesser. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der Dampf in dieser Leitung, wenn er 5 Atm. Spannung hat und zu einer Dampfmaschine führt, bei welcher die Füllungszeit 1/4 von der Hubzeit beträgt?

Es ist das Volumen von 1 kg Dampf . . . . . . = 0,364 kbm
Folglich dasjenige von 70 . 13 kg per Sek. $\frac{70 \cdot 13 \cdot 0{,}364}{3600}$ = 0,092 „
Volumen bei ununterbrochenem Abströmen . 4 . 0,092 = 0,368 „
Da nun der Querschnitt der Leitung . . . . = 0,023 qm,
so wird die Geschwindigkeit des Dampfes 0,368 : 0,023 = 16,0 m.

20. **Ablaßvorrichtung.** Von Zeit zu Zeit muß das Wasser aus dem Kessel abgelassen werden; entweder teilweise, um denjenigen Teil des Wassers, welches den meisten Schlamm enthält, zu entfernen, oder vollständig, um den Kessel befahren zu können. Zu diesem Zweck wird gewöhnlich an der tiefsten Stelle des Kessels, jedoch nie direkt über dem Feuerraum, eine Oeffnung mit einer Abzugsröhre angebracht, welche durch einen Hahn oder ein Ventil geöffnet werden kann.

21. **Mannloch, Putzdeckel.** Es ist zweckmäßig, die Kessel so einzurichten, daß sie im Innern gut gereinigt werden können. Ist ein direktes Befahren durch den Arbeiter möglich, so wird auch eine zu diesem Zwecke dienende Oeffnung angebracht, welche durch einen Deckel von innen geschlossen werden kann. Im andern Fall bringt man mehrere Putzöffnungen an.

Es ist zweckmäßig, das Wasser vor seiner Verwendung im Kessel zu reinigen. Wo dies nicht geschieht, wendet man zur Verhütung der Kesselsteinbildung folgende Mittel an: Natronlauge, kalcinierte und gewöhnliche Soda, Chlorbaryum, Gerbsäure (Eichenholz in Stücken), Katechu oder Cachou, Kartoffeln u. s. w. Das Mittel ist in kurzen Zeiträumen einzubringen.

22. **Kesselträger.** Man unterscheidet Bodenträger und Seitenträger. Um nicht bald zerstört zu werden, sollen sie keiner hohen Temperatur ausgesetzt werden.

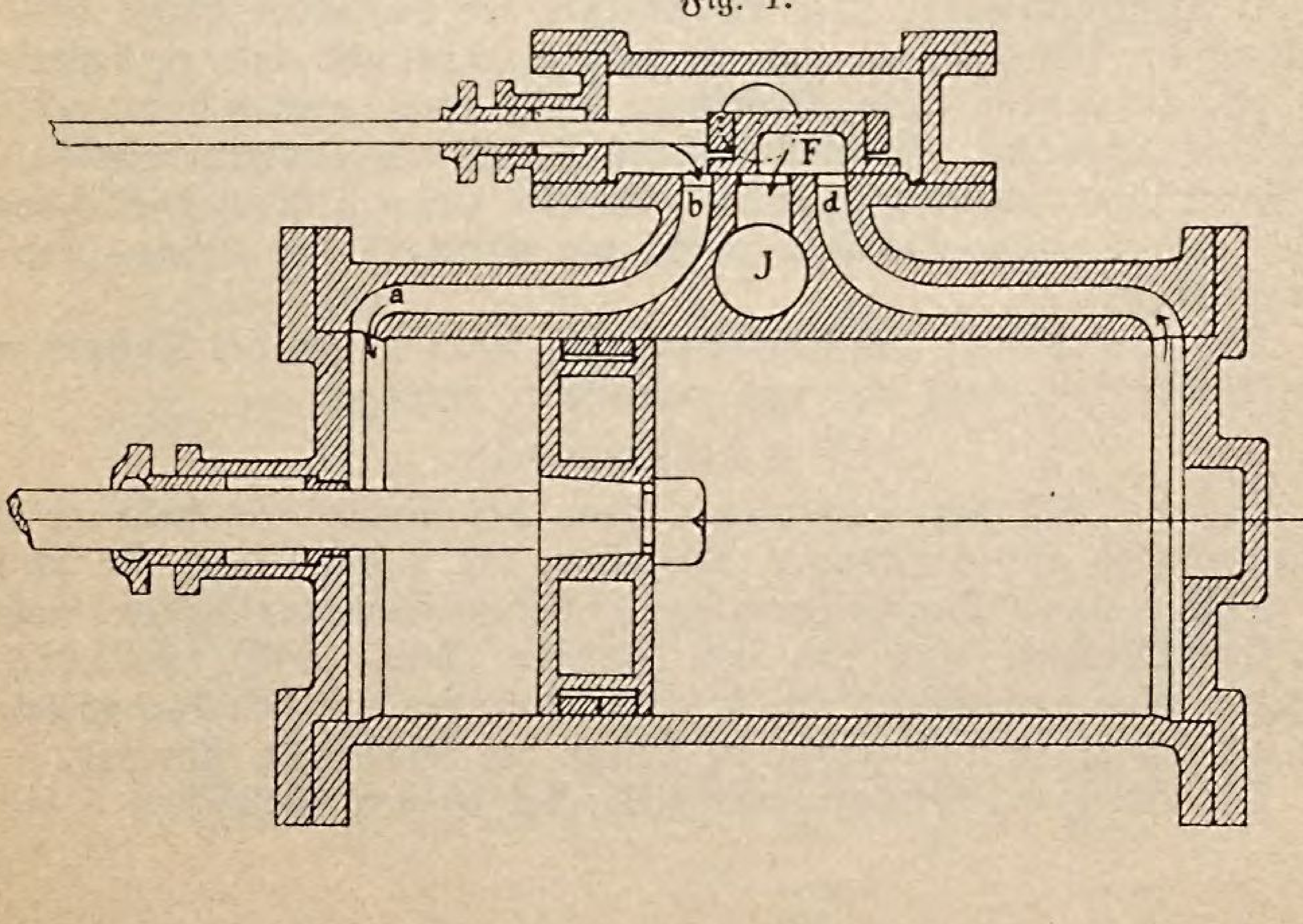
23. **Rost, Feuerzüge, Kamin.** Nachzusehen Abteilung Feuerungsanlagen, S. 353.

24. **Umhüllung.** Der Kessel, Dom, die Dampfleitung 2c. geben viel Wärme an die Umgebung ab. Es ist daher angezeigt, diese Wärmeverluste möglichst zu vermindern. Dazu dienen schlecht leitende Umhüllungen. Ebenso soll das Kessellokal warm schließen, ein beständiger Luftzug also vermieden werden.

86. Von den Dampfmaschinen.

Die Dampfmaschinen unterscheidet man in einfach- und doppeltwirkende Maschinen, in Hochdruck-, Mitteldruck- und Niederdruckmaschinen; in Maschinen mit oder ohne Kondensation, mit oder ohne

Fig. 1.



Expansion des Dampfes; in solche mit Schieber- und Ventilsteuerung; mit Balancier, mit Schubstange und Kurbel; in oszillierende; mit einem oder mehreren Cylindern; in Land- und Schiffsmaschinen; in fixe und bewegliche und diese letzteren in Lokomobilen und Lokomotiven.

Die Hauptteile einer Dampfmaschine (Fig. 1) sind: der Cylinder, der Dampfkolben und die Steuerung. Die Steuerung ist diejenige Vorrichtung, durch welche der Dampf regelmäßig in den Cylinder und aus dem Cylinder geleitet wird. Die betreffenden Organe sind Schieber oder Ventile. — Fig. 1 stellt eine Maschine mit einem Schieber dar. Der Dampf tritt aus dem Kessel durch ein Seitenrohr in den Schieberkasten und von da durch den Kanal b in den Cylinder vor den Kolben, um ihn vorwärts zu treiben. Der Dampf hinter dem Kolben tritt durch den Kanal d unter den Schieber F in das Abzugsrohr J. Durch die hin- und hergehende Bewegung des Schiebers vertauschen die Kanäle b und d ihre Rollen regelmäßig.

In sämtlichen Abschnitten über Dampfmaschinen sei:

- D der Durchmesser des Cylinders,
- H der Hub der Maschine,
- h der Teil des Hubes, längs welchem Dampf einströmt,
- v die mittlere Kolbengeschwindigkeit per Sekunde,
- n die Anzahl Drehungen der Maschine in der Minute,
- P der Dampfdruck, welcher im Cylinder längs des Weges h herrscht,
- P_0 der mittlere Gegendruck, welchen der aus dem Cylinder abströmende Dampf auf den Kolben ausübt,
- p der mittlere Ueberdruck des Dampfes im Cylinder; diese Kräfte per 1 qcm Fläche; die Längen dagegen in Metern und
- F die Kolbenfläche in qcm.

I. Teile der Dampfmaschinen.

1. **Dampfcylinder.** Der Durchmesser des Cylinders hängt von der Leistung der Maschine ab und ist nach S. 411 und 413 zu berechnen. Der Hub soll bei fixen Maschinen cirka 2mal größer sein als der Cylinderdurchmesser. Je größer dieses Verhältnis genommen wird, um so länger und schwerer fällt das Gestelle aus; je kleiner es gewählt wird, um so mehr Umläufe macht die Maschine bei gleicher Kolbengeschwindigkeit.

Die Wanddicke des Cylinders soll, schon wegen des Aufspannens beim Ausbohren, stark sein und mindestens betragen

$$1{,}5 + 2D \text{ Centimeter.}$$

Befindet sich der Kolben am Ende des Hubes, so steht er vom Cylinderdeckel ab: bei kleinen Maschinen um 3 bis 4 mm, bei großen um 6 bis 8 mm. Der zwischenliegende Raum samt demjenigen, welcher dem Eintrittskanal nach bis zum Schieber führt, heißt schädlicher Raum. Man verwandelt ihn in einen Cylinder mit der Grundfläche F und der Länge h_0 und nennt h_0 Länge des schädlichen Raumes.

Die Größe h_0 beträgt gewöhnlich: bei kleinen Maschinen 5 bis 6,

bei mittleren 4 bis 5 und bei großen 3 bis 4 Prozent vom Hube H. Besonders klein kann h_0 bei Corliß- und Ventilmaschinen gehalten werden.

An den Enden wird der Cylinder um 1 bis 2 mm weiter gebohrt als an der Fläche, welche vom Kolben bestrichen wird.

Wo die Kolbenstange durch den Deckel hindurchgeht, ist eine Stopfbüchse nötig, welche gewöhnlich mit Hanf gedichtet wird.

Die Querschnitte der Röhren und Kanäle, welche den Dampf in den Cylinder leiten, sollen annähernd sein

bei großer Kolbengeschwindigkeit $^1/_{14}$ der Kolbenfläche,
bei mittlerer Kolbengeschwindigkeit $^1/_{20}$ „ „
bei kleiner Kolbengeschwindigkeit $^1/_{26}$ „ „

Sind besondere Austrittsöffnungen vorhanden, so nimmt man deren Querschnitt 1,3- bis 1,6mal größer als für den Eintritt.

Damit bei der Schiebersteuerung der Weg des Schiebers nicht zu groß ausfällt, nehme man die Eintrittsöffnungen dieser Kanäle 6- bis 8mal länger als breit.

2. **Dampfkolben.** Bei der Metallliderung wird der Druck der Ringe gegen die Cylinderwand durch die Elasticität von Federn oder durch diejenige der Dichtungsringe selbst hervorgebracht. Man nehme

Höhe der Metallliderung des Kolbens $= 2{,}5 + 5\,D$ cm;
Höhe der Hanfliderung „ „ $= 5{,}0 + 4\,D$ cm.

Der Weg des Kolbens bei einem Hin- und Hergang ist $= 2\,H$, in der Minute $= 2\,H\,n$, aber auch $= 60\,v$; daher

$$60\,v = 2\,H\,n. \tag{1}$$

Brauchbare Werte der Kolbengeschwindigkeit v für den gewöhnlichen Gang einer Dampfmaschine liefert folgende empirische Formel

$$v = 1{,}6\sqrt[3]{H}.$$

Für den Hub . . H =	0,25	0,50	0,75	1,00	1,50	2,00 m
wird Geschwindigkeit v =	1,00	1,25	1,45	1,60	1,80	2,00 „
und Tourenzahl . n =	120	75	58	48	36	30 „

3. **Dicke der Kolbenstange.** Bei doppelt wirkenden Dampfmaschinen wird die Kolbenstange auf Zug und Druck in Anspruch genommen; allein ihr Durchmesser d ist nur auf Druck zu berechnen mittelst der auf S. 203 angegebenen Formel. Man nehme für Schmiedeisen als Wert von E für 18fache Sicherheit 100 000 kg und bezeichne die Länge der Kolbenstange mit L, so wird

$$d^2 = 0{,}004\,D\,L\sqrt{P},$$

aus welcher Gleichung folgende Zusammenstellung abgeleitet ist:

P	L = 1,5 D	L = 2 D	L = 2,5 D	L = 3 D
3 kg	0,102 D	0,118 D	0,131 D	0,144 D
6 „	0,121 „	0,140 „	0,156 „	0,171 „
9 „	0,134 „	0,154 „	0,173 „	0,190 „
12 „	0,144 „	0,165 „	0,186 „	0,203 „

Hieraus kann für alle vorkommenden Fälle der Durchmesser der Kolbenstange entnommen werden.

4. **Steuerung.** Die Steuerung wird bewirkt durch Schieber oder Ventile. Die Schieber sind entweder flach oder cylindrisch mit hin- und hergehender Bewegung oder cylindrisch mit drehender Bewegung.

Die Schieber werden in der Regel durch Excenter bewegt, welche als Kurbeln zu betrachten sind (S. 71). Da nun die Schubstangen dieser Schieber gewöhnlich lang sind im Verhältnis zum Schieberweg, so kann die Bewegung des Schiebers auf den beiden Hälften dieses Weges sehr nahe als übereinstimmend angesehen werden.

A. Einfacher Muschelschieber.

a) Die Hauptpositionen. In den Figuren 2 bis 5 ist dieser Schieber in vier verschiedenen Lagen gezeichnet. In allen Figuren bezeichnet A die Kurbelwelle, AD die Kurbel, d die Mitte der excentrischen Scheibe, welche den Schieber bewegt, also Ad die Excentricität, die gleich ist dem halben Hub des Schiebers, df die Excenterstange, welche in f mit der Schieberstange zusammenhängt. Wegen des Raumes ist die Kurbel, ebenso die Stange df ꝛc. zu kurz eingetragen. Die Kurbelwelle soll parallel zur Geraden yz gedacht werden.

In Fig. 2 befindet sich der Kurbelzapfen D im toten Punkt, also der Dampfkolben am Ende des Hubes. In dieser Lage soll der Schieber bereits frischen Dampf durch die Spalte ab in den Cylinder und Gegendampf durch die Spalte a′b′ aus dem Cylinder treten lassen. Man erreicht dies, wenn der Winkel DAd, Fig. 2, stumpf ist. Es sei die Gerade SA senkrecht auf DA, so nennt man den Winkel SAd Voreilungswinkel. Dreht man d nach S zurück, so kommt der Schieber in seine mittlere Lage. In dieser überdeckt er die Kanäle ac und a′c′ nach außen und innen. Man nennt die betreffenden Breiten äußere und innere Ueberdeckung. Nach diesen Ueberdeckungen richtet sich der Voreilungswinkel, sowie die Spaltenweite ab und a′b′.

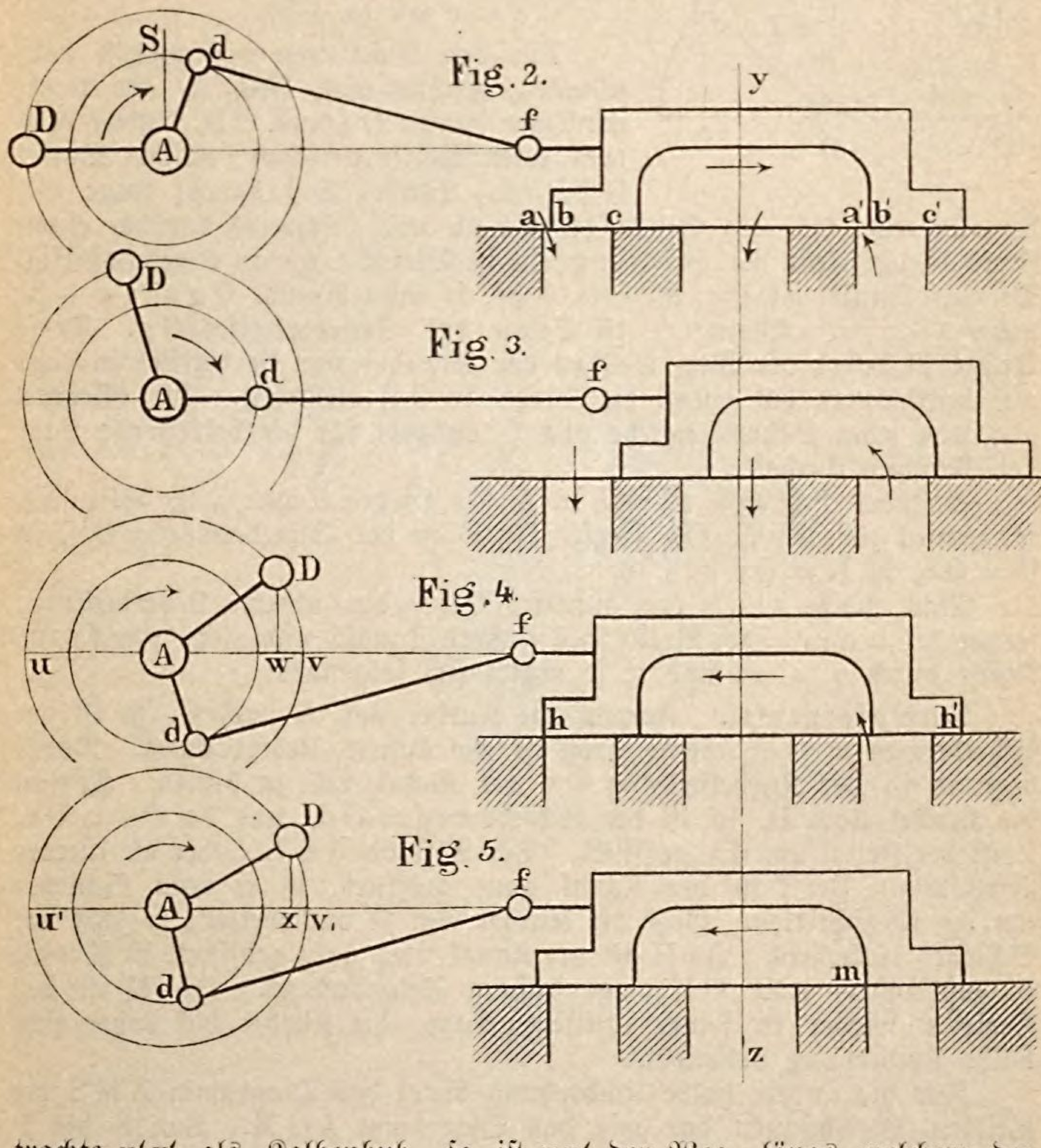
Wenn der Kolben im Begriffe ist, den toten Punkt auf der einen Seite zu erreichen, so soll bereits auf dieser Seite frischer Dampf einströmen, damit der Kolben die Bewegung nach der andern Seite mit vollem Druck beginnen kann; auf der Abströmungsseite soll ebenso sofort die Entleerung des Cylinders erfolgen, damit der Gegendruck rasch sinken kann. Wenn aber das Voreilen zu groß ist, so tritt auf der einen Seite Dampf in den Cylinder, bevor der Kolben den Hub durchlaufen hat, übt daher einen schädlichen Gegendruck aus, und auf der andern Seite strömt der Dampf schon ab zu einer Zeit, da er noch arbeiten sollte.

Dreht man die Kurbel in die Lage der Fig. 3, so rückt d in den toten Punkt und somit der Schieber in die Grenzlage rechts. Man sieht, wie rasch bei dieser Drehung die Kanäle ac, a′c′ geöffnet werden.

Kommt die Kurbel in die Lage der Fig. 4, so bewegt sich der Schieber in entgegengesetzter Richtung. Er verengt mehr und mehr die Dampfkanäle. Der Schieber ist in der Lage gezeichnet, wo bei h der

Dampfeintritt aufhört. Man fälle D w senkrecht auf u v und betrachte u v als Hub des Dampfcylinders, so strömt mithin Dampf in den Cylinder, während der Kolben den Weg u w durchläuft. Längs des Weges w v dehnt sich der Dampf aus und wirkt durch Expansion.

Geht die Kurbel über in die Lage der Fig. 5, so schließt sich der Dampfaustritt bei m ab. Man fälle D x senkrecht auf u′ v′ und be-

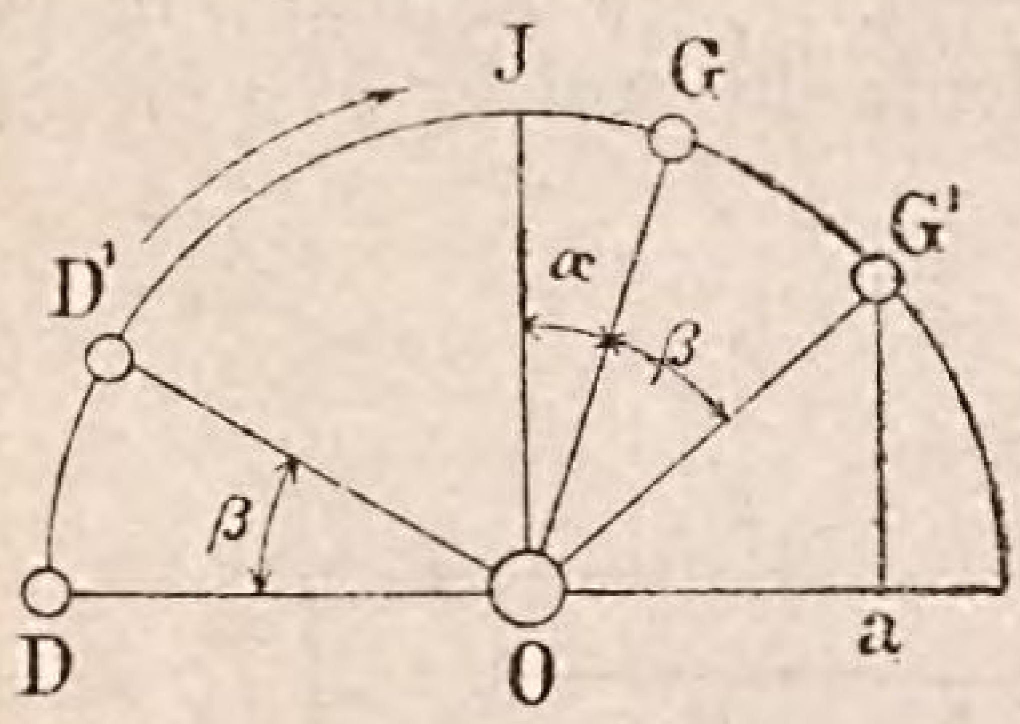


trachte u′ v′ als Kolbenhub, so ist x v′ der Weg, längs welchem der Gegendampf, der aus dem Cylinder nicht entweichen konnte, zusammengedrückt wird.

b) Das Zeuner'sche Diagramm. Man zeichne über die Excentricität O D (Fig. 6) einen Halbkreis. Es sei O D die Richtung der Maschinenkurbel für den toten Punkt und O G die entsprechende Excenterkurbel. Man gebe der Achse eine Drehung, so daß O D nach O D′

und O G nach O G′ komme, und ziehe G′a senkrecht auf O D, so ist O a die Entfernung des Schiebers von der mittleren Lage. Nun sei

Fig. 6.



r die Excentricität O D,
α der Voreilungswinkel J O G,
β der Drehwinkel D O D′ und
z der Schieberweg O a, so ist
α + β der Winkel O G′a; daher

$$z = r \sin(\alpha + \beta).$$

Um den Wert von z graphisch darzustellen, zeichne man (Fig. 7) die rechtwinkligen Achsen O J und O D, letztere nach dem toten Punkt gerichtet; mache Winkel G O J = α, Winkel E O D = β; trage auf dem Schenkel O G ein Stück O g = r ab und beschreibe darüber einen Kreis O d g, ziehe die Sehne e g; so ist Dreieck O g e in e rechtwinklig. Da nun Winkel e O g = 90 − (α + β), so wird Winkel O g e = α + β; daher O e = z. Allein O e ist Sehne des Schieberkreises O g. Diese Sehne ist daher der Weg, welchen der Schieber von der mittleren Lage aus durchlaufen hat, wenn die Kurbel in O E ankommt. Ein Gleiches gilt von jeder Sehne, welche von O ausgeht für die betreffende Lage der Maschinenkurbel.

Befindet sich diese Kurbel in A, so ist die Sehne = 0, weil O A tangential zum Kreise O g liegt. In B ist der Schieberweg = O b, in C = O c, in D = O d u. s. w.

Man mache O a = der äußern, O q = der innern Ueberdeckung; ferner a i = q m = der Breite des äußern Kanals und ziehe von O aus Kreise durch q, a, m und i; so ergibt sich folgendes:

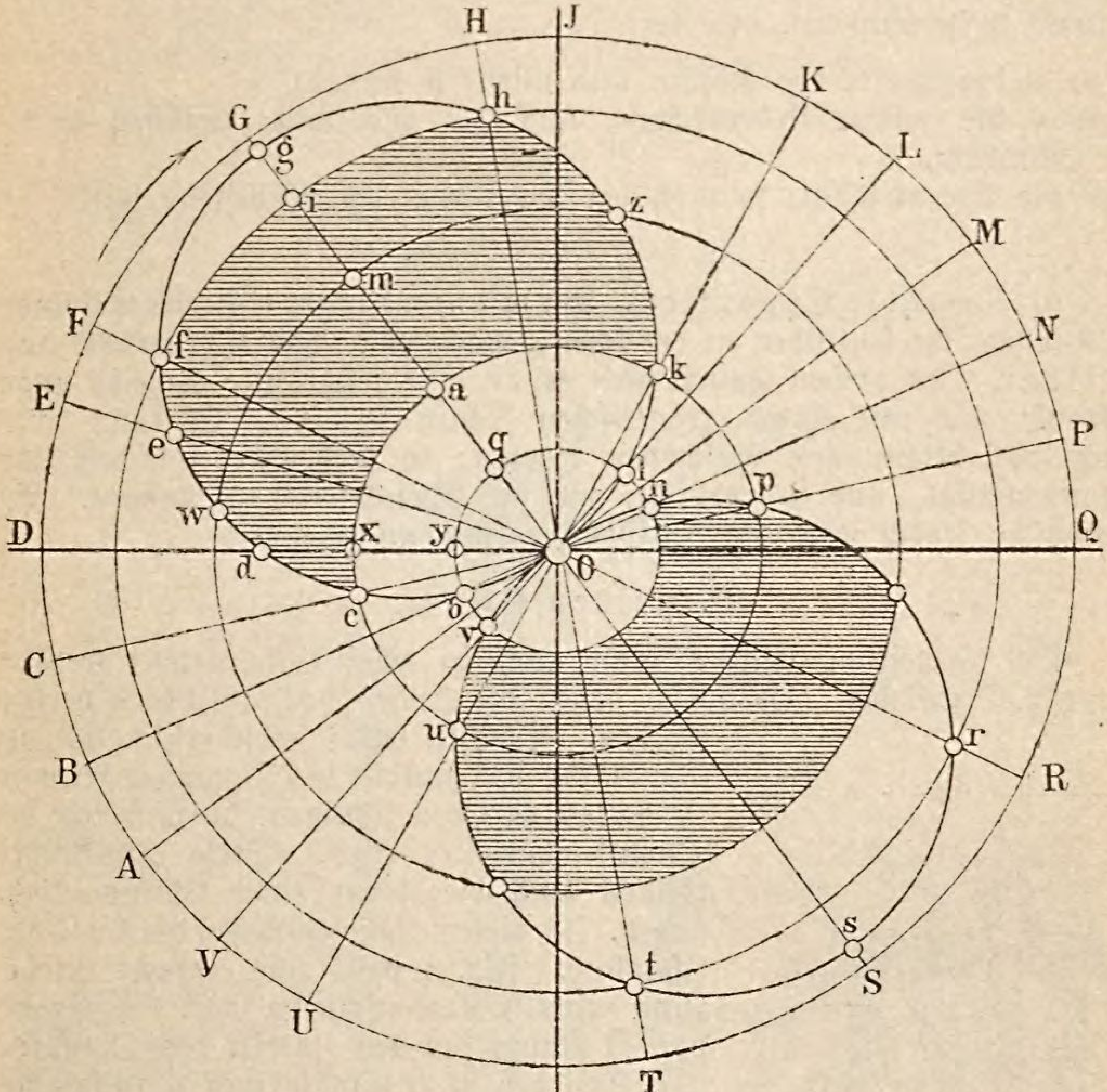
Dampfeintritt. Kommt die Kurbel von A nach C, so ist der Schieberweg = O c; ebenso groß ist die äußere Ueberdeckung. Daher beginnt in der Kurbelstellung O C der Kanal sich zu öffnen. Kommt die Kurbel nach D, so ist der Schieberweg = O d, und da O x = O c, so ist der Kanal um d x geöffnet. Der Abstand d x ist daher die lineare Voreilung. In f ist der Kanal ganz geöffnet, in g vom Schieber um i g überschritten. Geht die Kurbel von G aus weiter, so geht der Schieber rückwärts. In H ist der Kanal noch ganz geöffnet, in K wird er geschlossen, weil O k = der äußern Ueberdeckung. In M ist der Schieber wieder in seiner mittleren Lage, die Kurbel hat daher eine halbe Umdrehung vollendet.

Für die andere halbe Umdrehung bietet das Diagramm A M S die gleichen Beziehungen dar wie das Diagramm A G M. Von K bis P und von U bis C findet kein Dampfeintritt statt, von C bis K und von P bis U ist dagegen geöffnet. Die obere schraffierte Fläche gibt das Gebiet des Dampfeintrittes an für die erste halbe Umdrehung.

Dampfaustritt. Kommt die Kurbel von A nach B, so entfernt sich der Schieber aus der Mitte um O b; allein O b ist die innere Ueberdeckung; also beginnt in b der Dampfaustritt. In D strömt der Dampf ab durch eine Spalte von der Breite y d; in w ist der äußere

Kanal voll geöffnet, in G ist er um mg überschritten und bleibt überschritten bis z, schließt sich aber bei l, wenn die Kurbel nach L kommt; er bleibt geschlossen von L bis N, öffnet von da bis V, beziehungsweise von n bis v, wird dann geschlossen von V bis B u. s. w. Die

Fig. 7.



untere schraffierte Fläche gibt das Gebiet an für den Dampfaustritt während der zweiten Hälfte der Drehung.

Folgerungen. In K beginnt die Expansion, in L die Kompression für die erste, in U und V dasselbe für die zweite halbe Umdrehung. Macht man α kleiner, d. h. rückt G näher gegen J, so rücken auch K und L gegen Q hin und es wird der Weg für die Expansion und Kompression kleiner. Allein dann rückt auch d näher gegen O. Gesetzt es käme dabei d nach x, so wäre keine lineare Voreilung vorhanden, es müßte also die äußere Ueberdeckung verkleinert werden. Allein dann wäre auch Oy zu groß. Wäre Od gar kleiner als Ox, so würde der Dampf erst einige Zeit nach der Umkehr des Kolbens eintreten. Wäre Og kleiner als Oi, so würde der äußere Kanal nie ganz geöffnet,

während er nach der Figur von f bis h ganz offen ist. Man ersieht, wie leicht sich aus dem Diagramm der Zusammenhang aller maßgebenden Verhältnisse erkennen läßt.

c) Weite des mittleren Kanals. Gelangt der Schieber in die äußerste Lage, so wird der mittlere Kanal verengt. Die kleinste Breite, welche er noch offen halten soll, darf nicht unter die Breite des äußern Kanals hinuntergehen. Es sei

a, a_0 die Breite des äußern und mittlern Kanals,
i, s die innere Ueberdeckung und die Wanddicke zwischen beiden Kanälen,
r die Excentricität; so muß der Wert vom a_0 mindestens sein

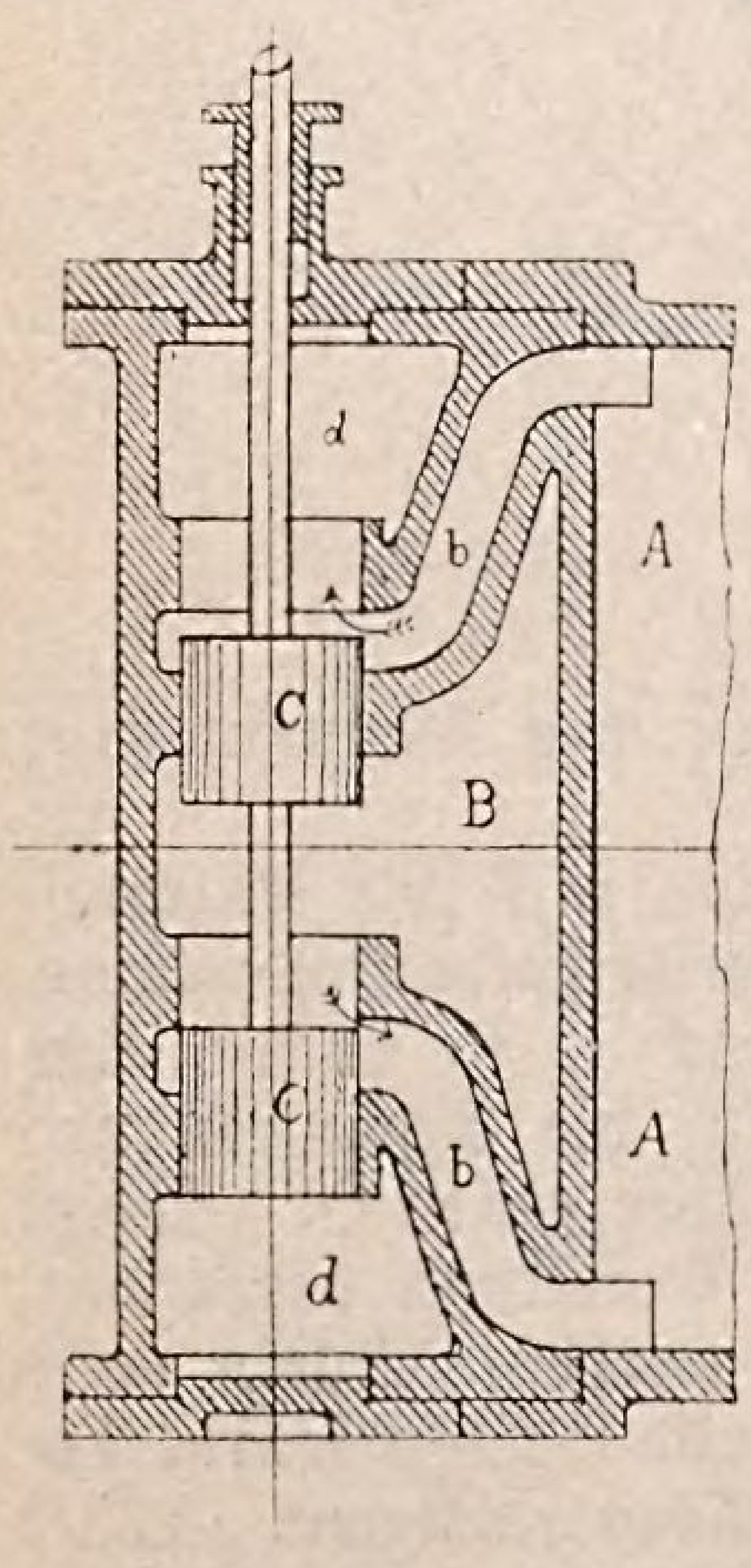
$$a_0 = i + a + r - s.$$

d) Variable Expansion. Um mit dem einfachen Schieber kleinere Füllungen im Cylinder zu erreichen, macht man das Excenter verstellbar. Zu diesem Zweck wird es an eine festgekeilte Scheibe angeschraubt und mit einem excentrischen Schlitz versehen. Es kann daher nach zwei Richtungen verschoben werden: in drehender, um den Voreilungswinkel, und in radialer, um die Excentricität zu ändern. Am häufigsten jedoch wird die Kulissensteuerung angewendet.

B. Kolbenschieber.

Der Verteilungsschieber kann auch in zwei Teile geteilt werden, die als Deckflächen gewöhnlich gegen die Enden des Cylinders verlegt werden. Doch ist dabei selbstverständlich der Raum für den Zutritt des Dampfes getrennt zu halten von den Räumen, durch welche der Dampf abgeleitet wird. Diese Deckflächen können auch die Form einer Cylinderfläche haben. In diesem Falle entstehen die Kolbenschieber. Fig. 8 stellt eine einfache Steuerung mittelst Kolbenschieber dar. A Cylinder, B Raum für den Zutritt des Dampfes, c, c Schieber, b, b Kanäle und d, d Räume, welche den Dampf ableiten. Die Ueberdeckungen der Schieber sind gegenüber denen der Fig. 2 vertauscht: die größeren für den Eintritt sind dem Raume B, die kleineren für den Austritt den Räumen d, d zugekehrt. Diagramm, Expansion 2c. wie beim flachen Schieber. Entlastung eine vollständige. Vorzüglich für schnell gehende Maschinen, daher besonders verwendet bei Maschinen zum Betrieb von Dynamomaschinen. Um Undichtheiten an der Cylinderfläche der Kolben zu verhüten, versehen einzelne Konstruktoren die Oberfläche mit elastischen Dichtungsringen.

Fig. 8.



C. Doppelschieber.

Eine günstige Ausnützung des Dampfes wird erzielt, wenn man den Cylinder nur schwach mit frischem Dampf füllt und sodann diesen Dampf, den Kolben fortschiebend, so lange arbeiten läßt, bis seine Temperatur möglichst tief gesunken ist. Zu diesem Zweck wendet man zwei Schieber an, den Verteilungs- und den Expansionsschieber. Beide können in derselben oder in getrennten Kammern angebracht werden. In der Regel wird das Einkammersystem angewendet.

a) Expansionsschieber eine einfache Platte. Der Schieber a, Fig. 9, bewirkt die Verteilung des Dampfes nach und aus dem Cylinder. Der zweite Schieber b gleitet auf dem erstern fort und öffnet oder schließt eine der Oeffnungen c. Dieser zweite Schieber ist der Expansionsschieber. Werden die Schieber durch excentrische Scheiben bewegt, welche auf derselben Welle eine feste Stellung zu einander haben, so bleibt die Expansion konstant.

Fig. 9.

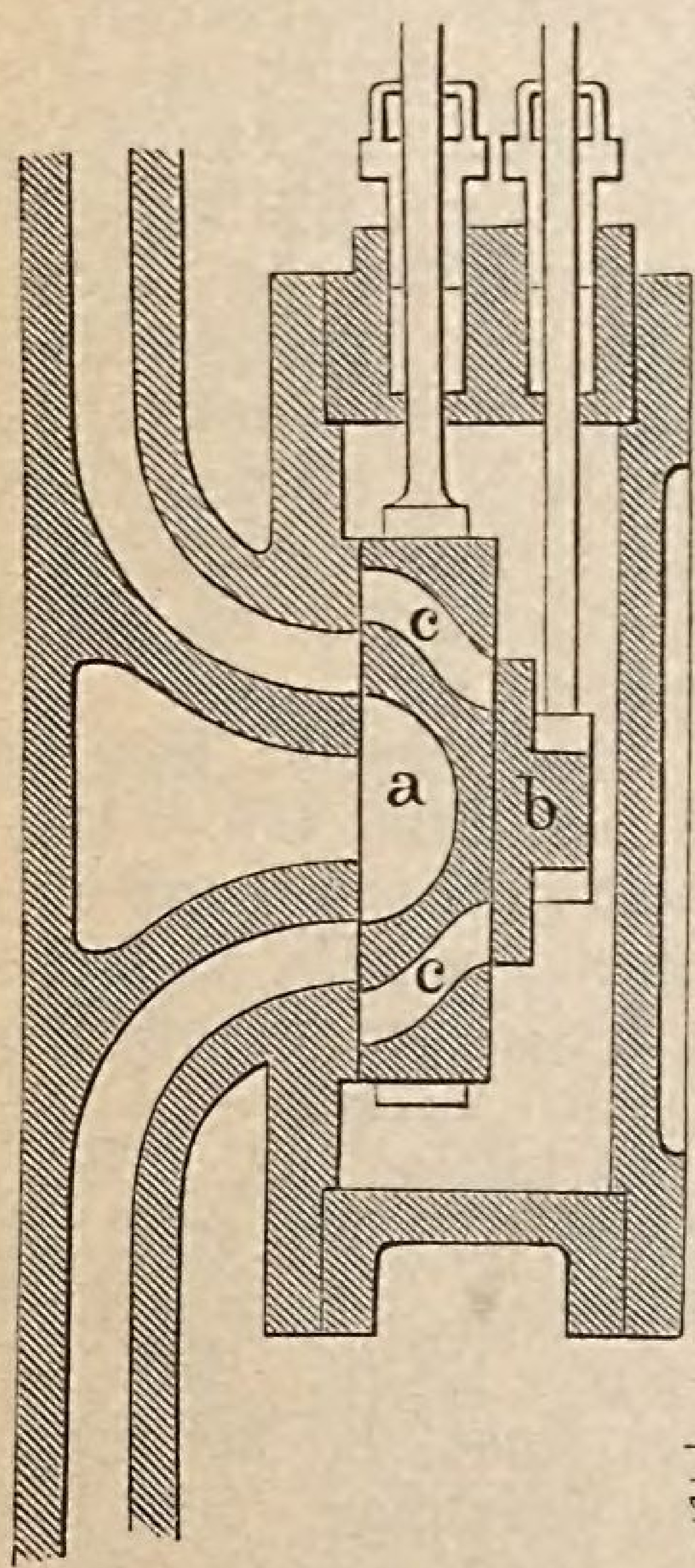
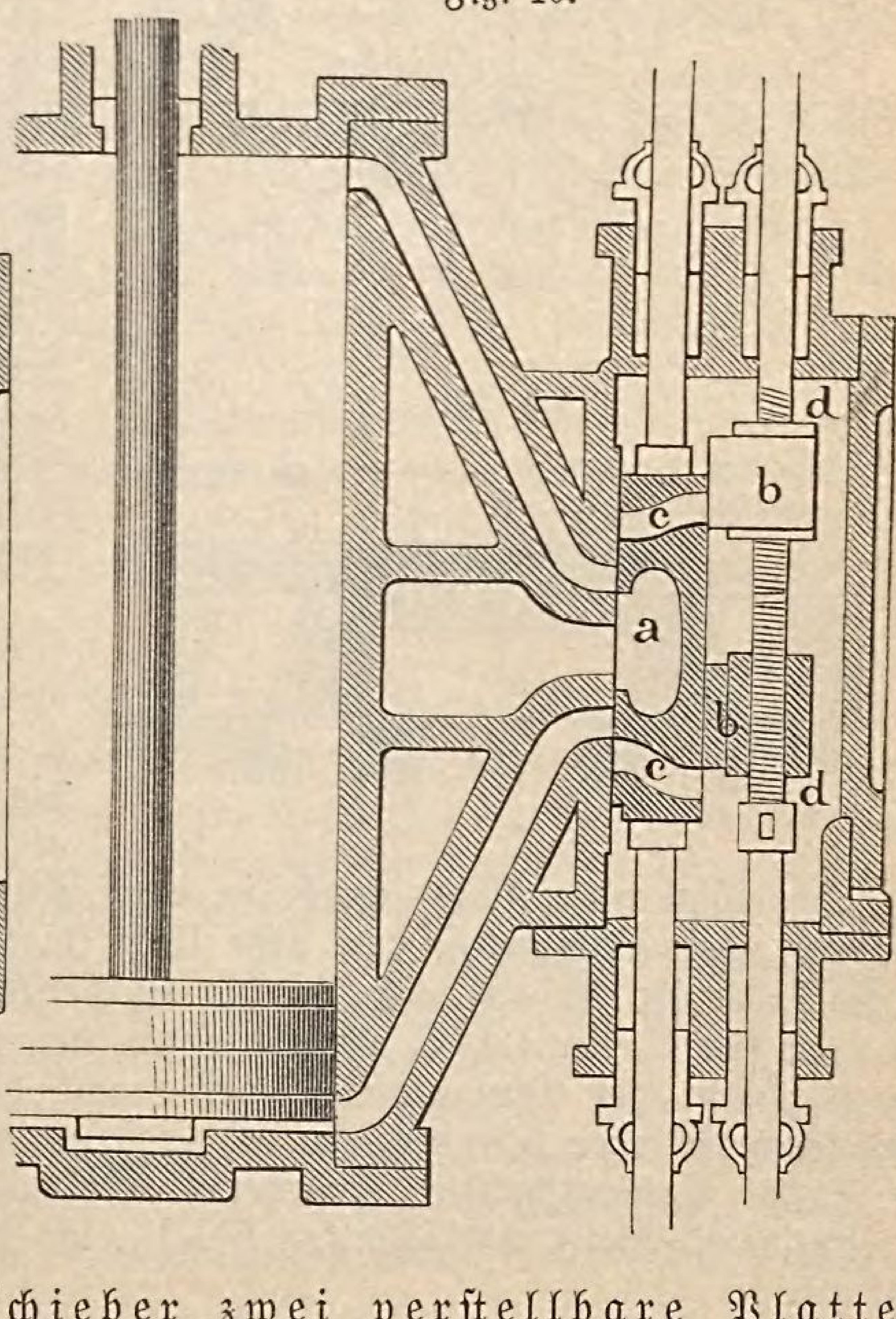


Fig. 10.



b) Expansionsschieber zwei verstellbare Platten. Der Schieber von J. J. Meyer, Fig. 10, gestattet eine variable Expansion. Er enthält einen Verteilungsschieber cac und einen Expansionsschieber, der aus zwei verstellbaren Platten b, b besteht. Die

Verstellung erfolgt durch Schrauben d, d, welche entgegengesetzte Steigungen haben. Rücken die Platten zusammen, so dauert die Periode des Dampfeinströmens länger und die Füllung des Cylinders nimmt zu; rücken sie aber aus einander, so tritt das Umgekehrte ein, wie das folgende zeigen wird. Das Excenter des Expansionsschiebers muß demjenigen des Verteilungsschiebers voraus eilen um 60 bis 90°.

c) Diagramm für obige Plattenschieber. Es sei (Fig. 12) 2l die Entfernung der äußern Plattenkanten; 2L die Entfernung der äußern Kanalkanten des Verteilungsschiebers; x der Weg, um welchen eine dieser Kanten von der benachbarten äußern Kante der Platte absteht, und r die Excentricität des Verteilungsschiebers.

Fig. 11.

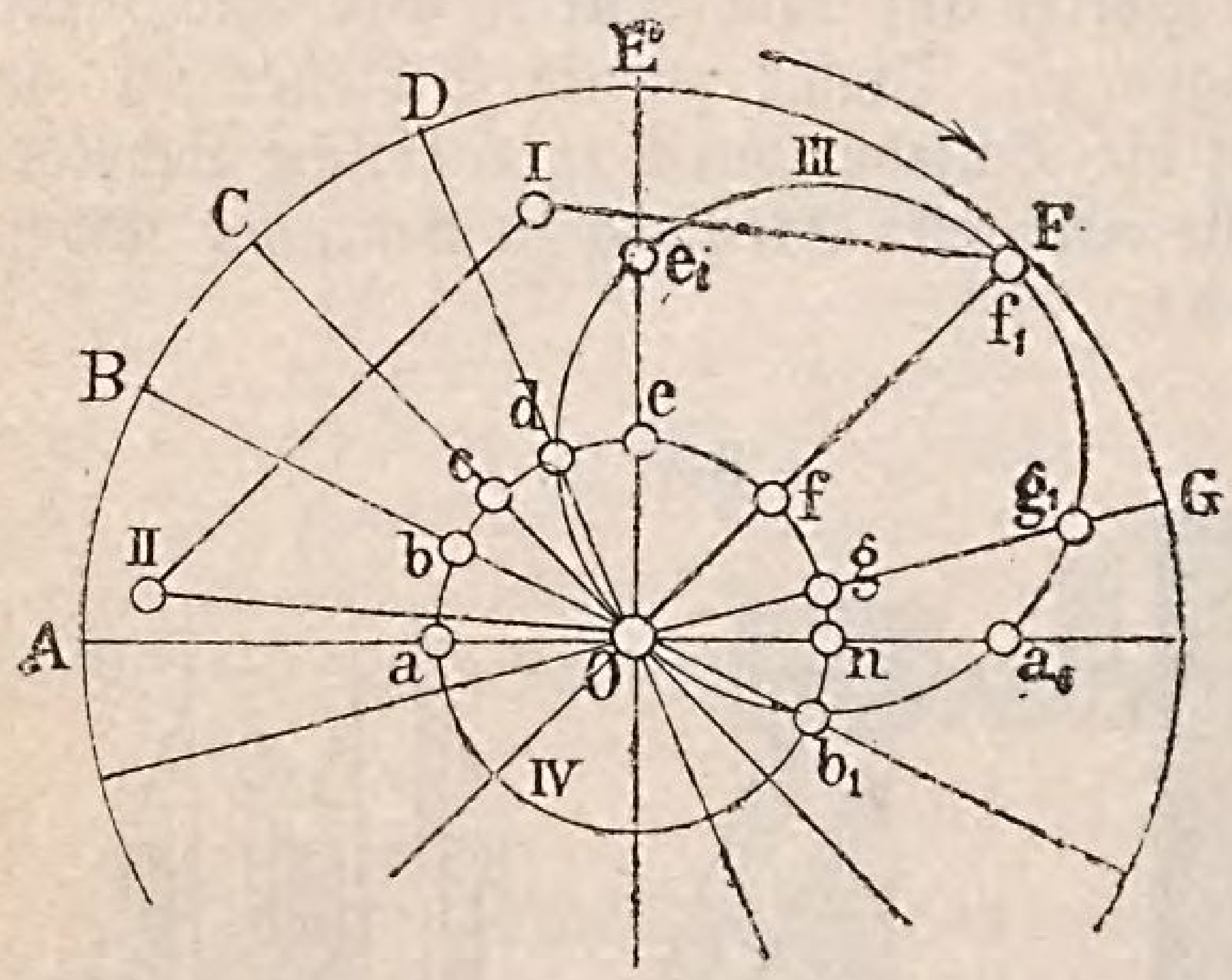
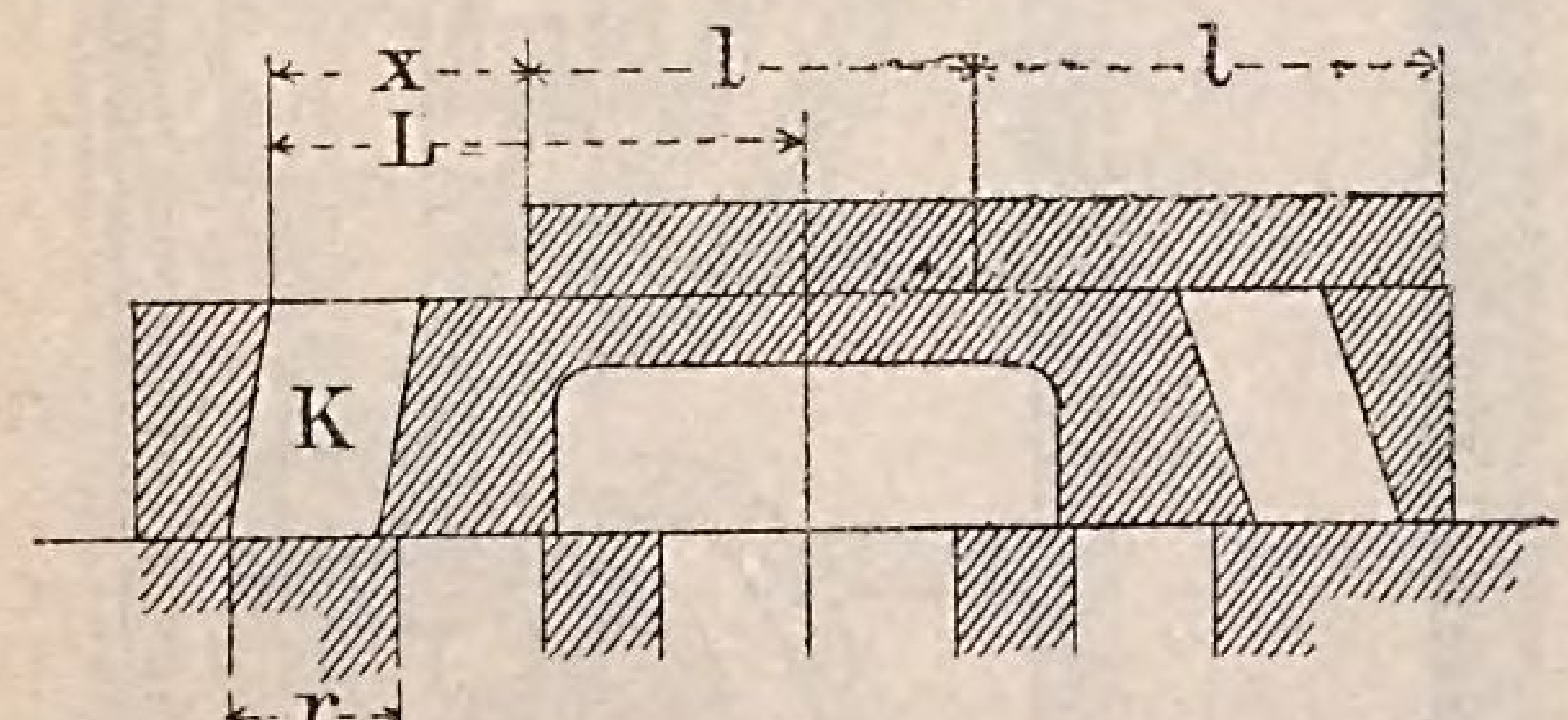


Fig. 12.



Um das Diagramm (Fig. 11) deutlich zu machen, vergrößern wir die eben erwähnten Maße 3mal. Man zeichne die rechtwinkligen Achsen O A und O E, ferner die Voreilungswinkel EOI und EOII, mache O I und O II gleich den Excentricitäten des Verteilungs- und Expansionsschiebers, verbinde Punkt II mit I, mache O f_1 gleich und parallel I II und errichte über O f_1 einen Kreis, der mit III numeriert sei.

Nun schneide man auf O A das Stück $O a = L - l$ ab und ziehe von O aus durch a einen Kreis IV, so können die Werte von x wie folgt abgelesen werden.

Der Abstand x liegt immer in einer Kurbelrichtung O A, O B, ... Er hat zwei Endpunkte; der eine liegt im Kreise IV, der andere im Kreise III. So ist $a a_1 = x$ für die Kurbelstellung A, $b b_1 = x$ für B; $O c = x$ für C, weil O C Tangente an den Kreis III ist. Für D ist $x = 0$, d. h. der Expansionsschieber macht den Kanal K, der sich im Verteilungsschieber befindet, zu; es beginnt die Expansion. Für E ist der Kanal K überschritten (zugedeckt) um $e e_1$, für F um $f f_1$, für G um $g g_1$ und bleibt überschritten bis b_1, wo die Abdeckung des Kanals beginnt.

Macht man l größer, so wird $L - l$ kleiner; der Kreis IV zieht sich zusammen, der Punkt d rückt näher gegen O und die Expansion beginnt früher. Wenn $L - l = 0$, so zieht sich der Kreis IV in den Punkt O zusammen, d rückt nach O und die Expansion beginnt in C.

In A ist alsdann geöffnet um $O a_1$, in B um $O b_1$, in D der Kanal überdeckt um $O d$, in F um $O f_1$ ꝛc.

Wird $L - l$ negativ, so trägt man $O a$ auf der entgegengesetzten Seite von O aus ab und die Expansion beginnt noch früher. Wenn z. B. in dieser Weise a nach n kommt, so ist in der Kurbelrichtung OA geöffnet um $x = n a_1$; allein bei B wird $x = 0$, nämlich in b_1; also beginnt in B die Expansion.

Kommt z. B. a nach a_1, d. h. wird $L - l = - O a_1$, so ist $x = 0$ für die Kurbelstellung A; es kann daher gar kein Dampf während des Hubes durch den Kanal K.

Wird umgekehrt $L - l$ positiv und größer als $O a$, so dauert die Füllungsperiode länger; wird z. B. $L - l = O f_1$, so macht der Expansionsschieber nur während eines Augenblicks zu, nämlich jenes, wo die Kurbel durch F geht. Wird $L - l$ um sehr wenig kleiner, so dauert jener Augenblick etwas länger und es kann auf ganz kurze Strecken vor und nach f_1 Dampf eintreten. Von letzterm Dampf kann möglicherweise ein Teil durch den Verteilungsschieber in den Cylinder gelangen und die Wirkung des vor f_1 eingetretenen Dampfes stören. Wird $L - l > O f_1$, so bleibt der Kanal K immer offen.

d) Expansionsschieber ein Halbcylinder. Bei der Rider-Steuerung hat der Rücken des Verteilungsschiebers eine cylindrische Höhlung, deren Achse in der Richtung der hin und her gehenden Bewegung liegt. In diese Höhlung paßt der Expansionsschieber. Die beiden Kanäle des Verteilungsschiebers sind nicht parallel, wie beim Meyer'schen Schieber, sondern konvergieren. In gleichem Maße konvergieren auch die Arbeitskanten des Expansionsschiebers. Je nachdem nun die Stange dieses Schiebers, vom Regulator aus, gedreht wird, werden die Kanäle früher oder später überdeckt. Diese Drehung bewirkt also gerade das, was das Entfernen oder Nähern der beiden Platten des Meyer'schen Schiebers.

D. Drehschieber von Corliß.

Ein Schnitt durch den Cylinder längs dessen Achse bildet ein Rechteck. An den Enden der Längsseiten dieses Rechteckes ist je ein Drehschieber, Fig. 13, angebracht, dessen Achse senkrecht zur Cylinderachse steht. Dadurch erhalten Zufluß und Abfluß besondere Oeffnungen, und zwar der Abfluß eine weitere als der Zufluß. Liegt der Cylinder waagrecht, was gewöhnlich der Fall ist, so sind die Abflußöffnungen an der tiefsten Stelle; somit kann das Wasser aus dem Cylinder mit Leichtigkeit abfließen. Der schädliche Raum, soweit er herrührt vom Dampfkanal zwischen Schieberkasten und Cylinder, ist kleiner als bei gewöhnlichen flachen Schiebern. Der Antrieb erfolgt mittelst Kreisexcenter; daher ist das Zeuner'sche Diagramm für einfache Schieber (S. 399) auf die Drehschieber anwendbar.

Es sei, Fig. 12, der innere Kreis der Excenterkreis, der äußere der Kurbelkreis. Beide sind in vier Positionen gezeichnet. Ihnen entsprechen ebenso vier Lagen des Schiebers, Fig. 14. Ist die Kurbel in A,

so ist das Excenter in a und die Arbeitskante des Schiebers in 1, also gerade auf dem Punkt, den Kanal abwärts aufzumachen. Geht A nach B, so gelangt a nach b und 1 nach 2. Dabei hat der Schieber seine Grenzlage rechts erreicht. Geht B nach C, so kommt b nach c und 2 nach 3. Der Schieber geht also zurück und macht bei 3 zu. Kommt C nach D, so gelangt c nach d und 3 in die Grenzlage 4. Der Schieber muß nun so lang sein, daß er in dieser Lage den Kanal rechts genügend überdeckt. Aus den Grenzlagen ergibt sich der Schwingungswinkel δ. Damit er klein werde, muß der Kanal schmal sein.

Fig. 13.

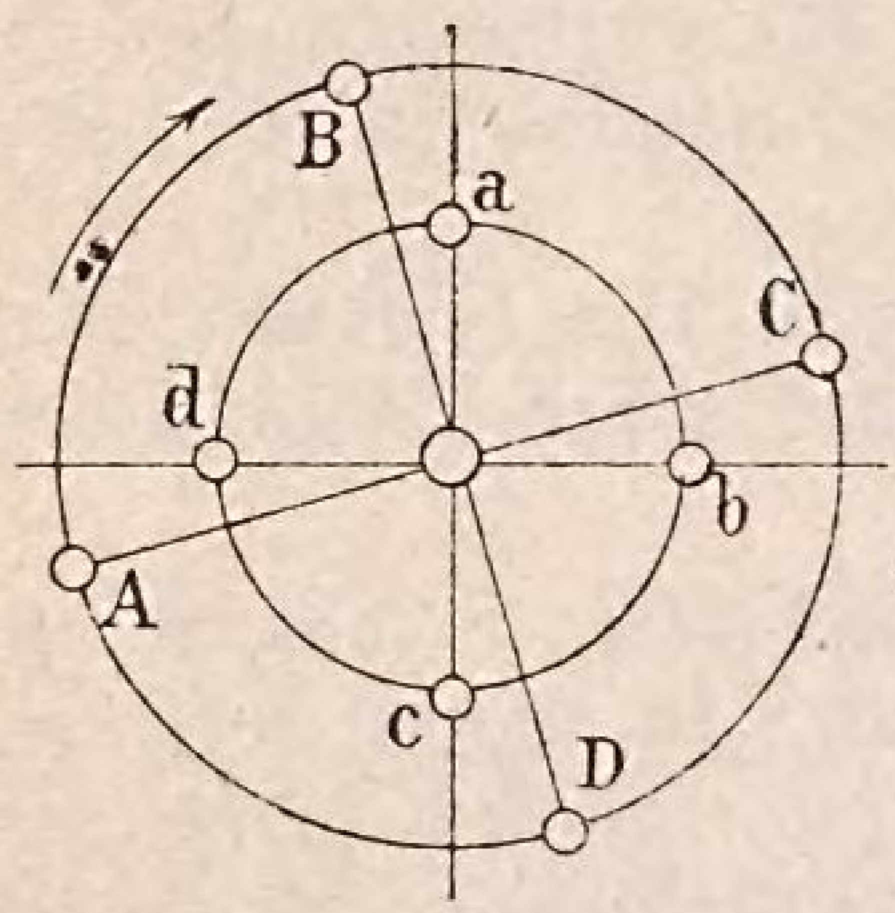
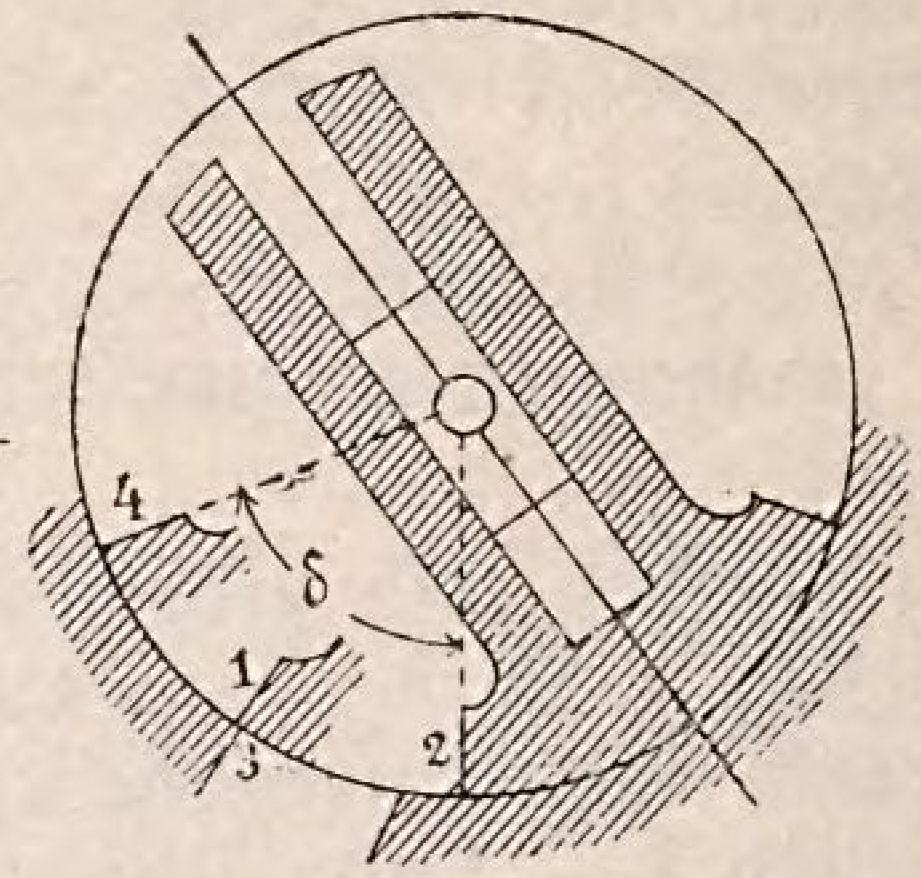


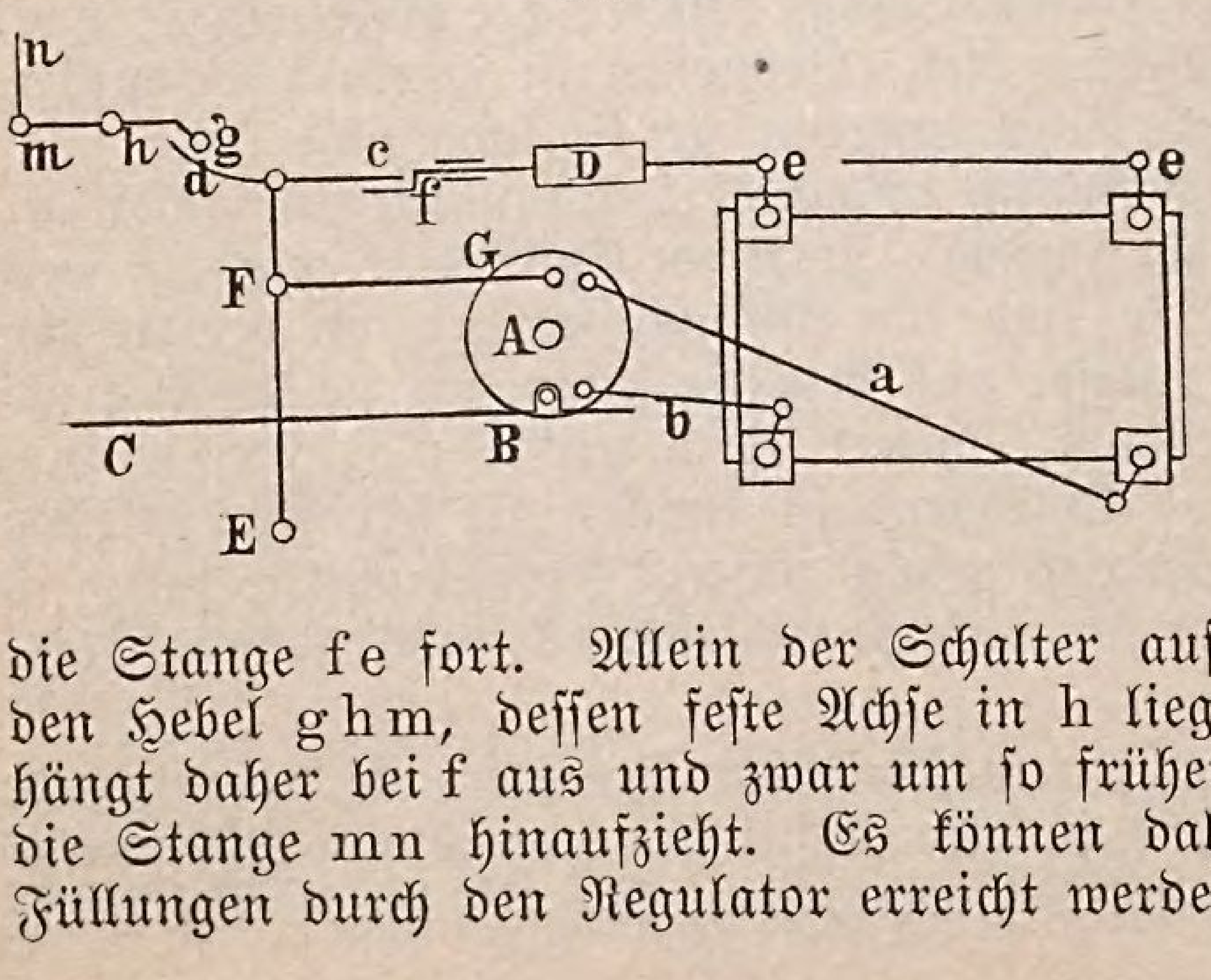
Fig. 14.



Zu den Mechanismen, welche die Schieber in dieser Weise bewegen, kommt nun noch für die Eintrittsschieber eine Expansionsvorrichtung hinzu. Hat nämlich der Eintrittsschieber aufgemacht und ist der Cylinder bis auf ein bestimmtes Maß mit Dampf gefüllt, so wirkt der Regulator so ein, daß der Schieber vom Excenter abgelöst (ausgehängt) und der Wirkung einer gespannten Feder überlassen wird, welche ihn plötzlich zurücktreibt, so daß der Kanal geschlossen wird. Auf diese Weise können alle möglichen Füllungsgrade erreicht werden.

Die Steuerung von Corliß von 1867 zeigt Fig. 15. Die Scheibe A wird durch die Excenterstange BC hin und her bewegt, ebenso die unteren Schieber durch die Stangen a, b. Die oberen Schieber erhalten ihre Rückwärtsbewegung behufs des Schließens durch Federn im Puffer D oder durch eine freiliegende Feder; dagegen ihre Vorwärtsbewegung (Oeffnen) durch den Hebel EF, dessen feste Achse in E liegt und durch die Stange FG hin und her bewegt wird. Geht nun FG nach rechts, so hängt der Schalter cd bei f ein und schiebt die Stange fe fort. Allein der Schalter auf der Seite d wird durch den Hebel ghm, dessen feste Achse in h liegt, abwärts gedrückt und hängt daher bei f aus und zwar um so früher, je höher der Regulator die Stange mn hinaufzieht. Es können daher kleinere und größere Füllungen durch den Regulator erreicht werden.

Fig. 15.



E. Ventilsteuerung.

Der liegende Cylinder hat zwei Einlaßventile auf der obern und zwei Auslaßventile auf der untern Seite, je zunächst den Cylinderdeckeln. Die Ventile haben Doppelsitze und sind entlastet; sie heben und senken sich in vertikaler Richtung. Bei der Originalmaschine der Gebrüder Sulzer von 1867 werden die untern Ventile bewegt durch Kreisscheiben, deren Halbmesser an zwei gegenüberliegenden Stellen von r in R übergeht, so daß der Ventilhub der Differenz R — r proportional ist.

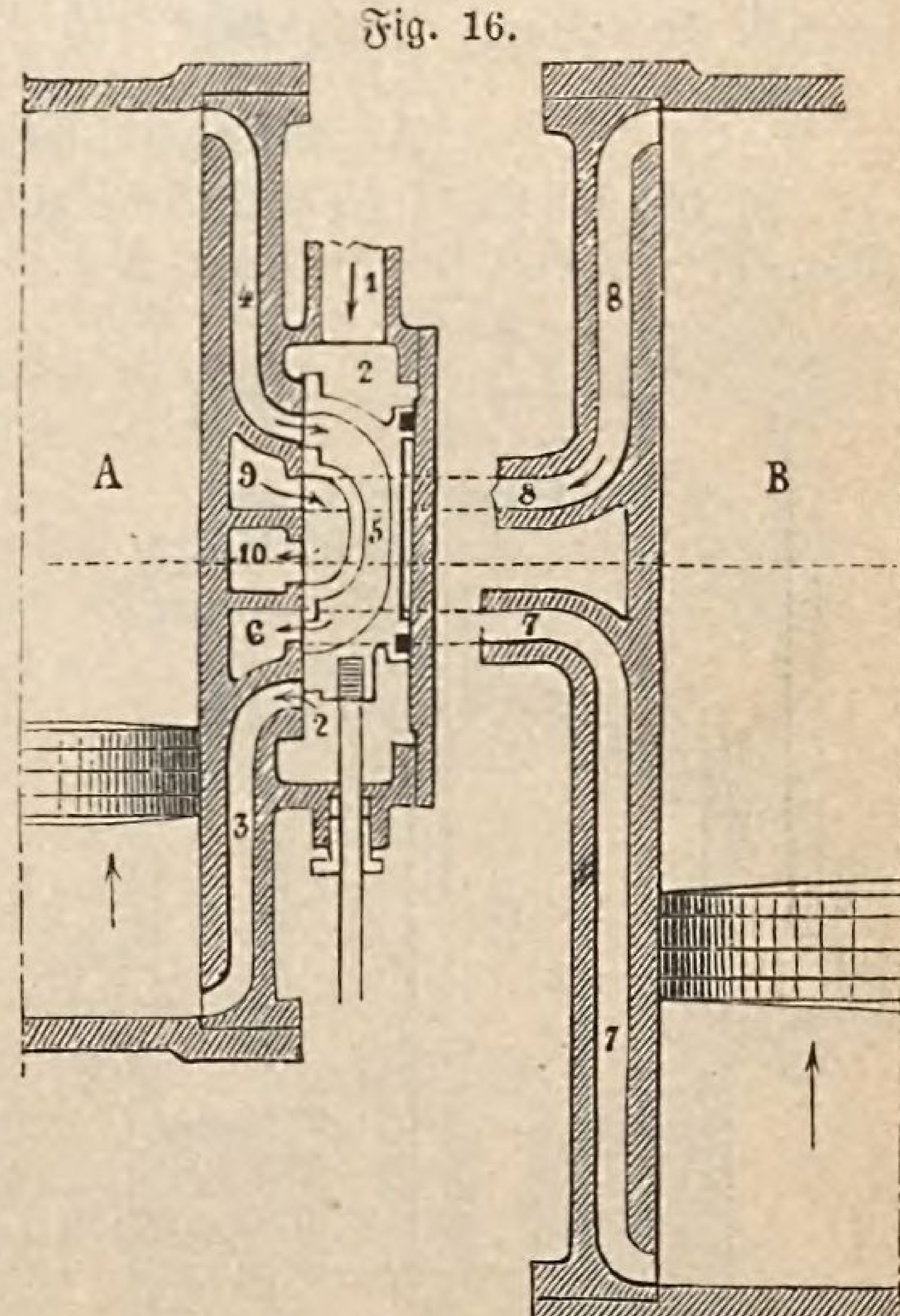
Die Eintrittsventile werden bewegt durch Kreisexcenter, gleich denjenigen der gewöhnlichen Flachschieber. Ihre Entfernung vom Sitz kann daher für jede Lage der Kurbel bestimmt werden durch das Zeuner'sche Diagramm. Dabei ist das Voreilen des Ventils gerade so anzunehmen, wie beim Flachschieber oder dem Corliß-Schieber. Allein auch hier ist ein Mechanismus vorhanden, der den Zusammenhang zwischen Ventil und Excenter auslöst im Moment, in welchem der Cylinder genügend mit Dampf gefüllt ist und zwar durch Einwirkung des Regulators.

Wegen der raschen und sichern Einwirkung des Regulators nennt man die Steuerungen mit Auslösung auch Präcisionssteuerungen.

F. Expansion durch mehrere Cylinder.

a) System Woolf. Diese Maschinen, Fig. 16, haben zwei neben einander stehende Dampfcylinder A und B von verschiedenem Volumen. Der Dampf strömt aus dem Kessel in den kleinern Cylinder A, wirkt daselbst mit konstantem Druck längs eines Teils des Hubes, strömt, nachdem der kleinere Kolben seinen Weg durchlaufen hat, in den größern Cylinder B hinüber und wirkt auf dessen Kolben, indem er sich während der Bewegung dieses Kolbens ausdehnt. Hierauf entweicht der Dampf in einen Kondensator, wo er sich abkühlt. — In nebenstehender Stellung der Schieber ist die Dampfcirkulation folgende. Der Dampf kommt durch das Rohr 1 aus dem Kessel in den Kasten 2 und von da durch den Kanal 3 unter den Kolben von A. Der Dampf über dem Kolben von A geht durch 4, 5,- 6 und 7 unter den Kolben von B. Der Dampf über dem Kolben von B entweicht durch 8, 9 und 10 in den Kondensator.

Fig. 16.



b) Compoundmaschinen. Die schwere, aufrechte Balancier-

maschine von Woolf wird in neuester Zeit ersetzt durch einfachere Konstruktionen. Das Princip ist jedoch dasselbe: Uebertritt des Dampfes aus einem kleinern Cylinder in einen oder mehrere größere Cylinder, um eine große Expansion zu erzielen und das Auspuffen der Wärme nach dem Kondensator zu vermindern. Die Compoundmaschinen unterscheiden sich also von den Woolf'schen durch eine andere Anordnung und dadurch bedingte Mechanismen.

Liegen die Cylinder neben einander und wirken die Maschinen auf Kurbeln, die einen Winkel von 90 ° bilden, so wird zwischen dem kleinern und größern Cylinder ein Reservoir angebracht, in welchem der Dampf beim Uebergang sich sammelt. Dieses Reservoir verlangt, daß jeder Cylinder mit einer selbständigen Steuerung versehen werde. Häufig wird der Dampf im Reservoir durch frischen Dampf erwärmt.

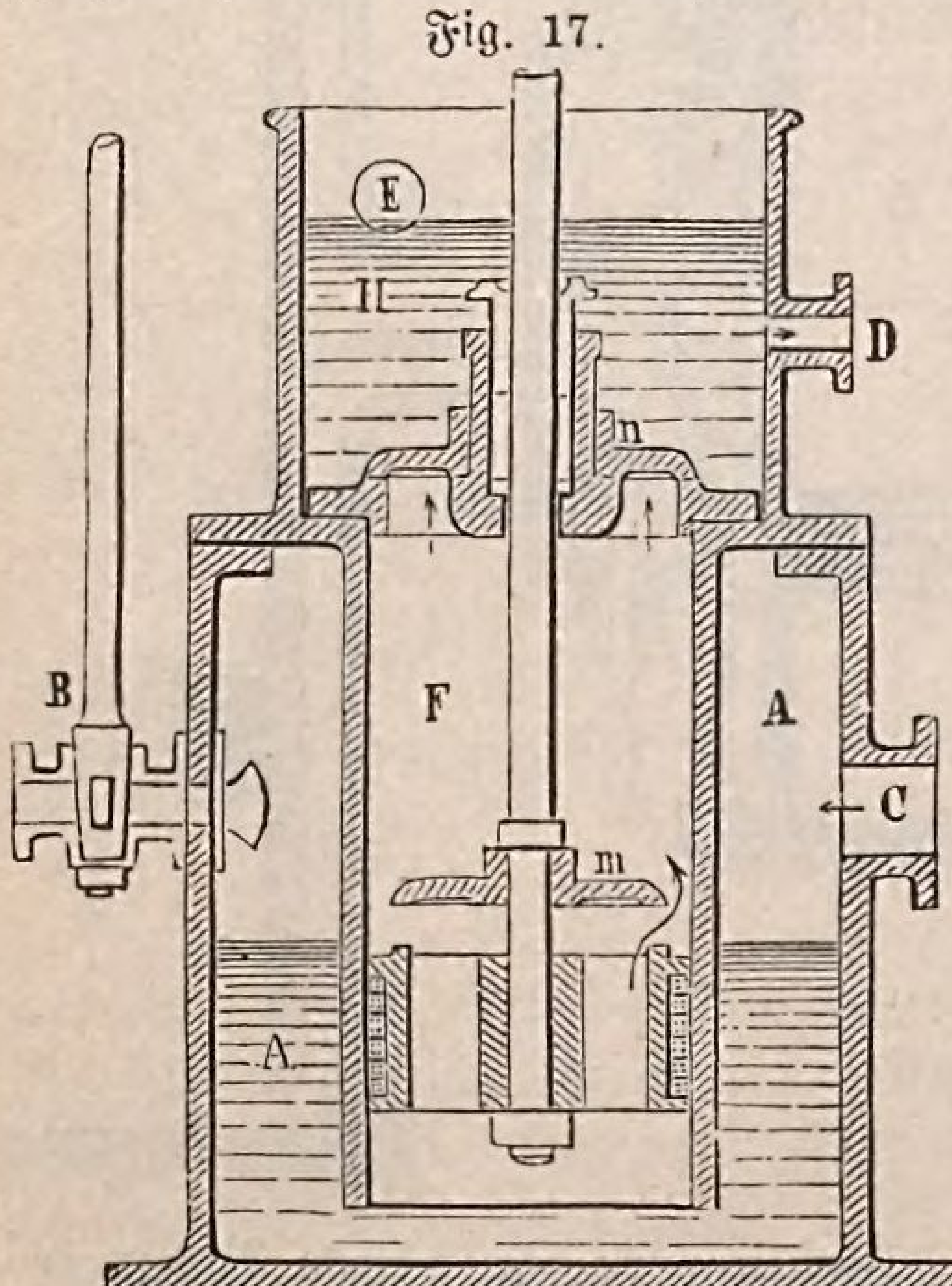
5. **Kondensation.** Strömt der Dampf aus dem Cylinder in die freie Luft ab, so hat er den Luftdruck, also 1 Atm. und noch andere Widerstände zu überwinden. Letztere betragen für weite, kurze Ableitungskanäle 0,1 bis 0,15 Atm.; für enge, lange mit plötzlichen Richtungsänderungen dagegen 0,3 bis 0,5 und mehr Atm. Für mittlere Verhältnisse nimmt man den gesamten Gegendruck zu 1,15 Atm. an.

Um diesen Gegendruck zu vermindern, läßt man den Abdampf in einen luftdicht verschlossenen Raum, den Kondensator, abströmen, wo er mittelst kaltem Wasser abgekühlt wird: entweder durch Einspritzen oder durch Umspülen.

A. Einspritzkondensator.

a) Gewöhnliches Princip. Der Dampf tritt durch ein Rohr C (Fig. 17) in den Kondensator A A. In diesen wird durch die Kaltwasserpumpe oder durch den äußern Luftdruck ununterbrochen so viel kaltes Wasser bei B, gegenüber liegend von C, eingespritzt, daß der Dampf sich auf cirka 30 ° bis 40 ° abkühlt, sich also größtenteils in Wasser verwandelt. Dadurch sinkt der Druck im Innern auf cirka 0,15 Atm. Das Gemisch von Wasser, Dampf und atmosphärischer Luft, welche mit dem Wasser in den Kondensator gelangt, wird durch die Luftpumpe F in einen Raum H geschafft. Aus diesem kann vermittelst der Warmwasserpumpe ein Teil des Wassers durch das Rohr D in den Kessel behufs der Speisung desselben getrieben werden. Der übrige Teil des Wassers fließt bei E ab.

Fig. 17.



Der *Bedarf an Einspritzwasser* ergibt sich wie folgt.

Der Dampf habe bei seinem Austritt aus dem Cylinder z. B. 1,2 Atm. Spannung, so wird er 105,7 Kalorien fühlbare und 492,2 Kal. innere latente Wärme enthalten, wenn er trocken ist. Er besitze aber nur 0,9 kg reinen Dampf, so ist seine latente Wärme 0,9 . 492,2 Kal. Außerdem führe er noch z. B. 10 Kal. Wärme, welche die Cylinderwände abgeben, mit. Die Temperatur im Kondensator sei 35 °, so wird der Dampf an die Mischung im Kondensator 105,7 + 0,9 . 492,2 + 10 — 35 Kal. Wärme abgeben. Hat das Einspritzwasser eine Temperatur von 12°, so nimmt jedes Kilogramm davon 35 — 12 Kal. auf; daher ist folgende Menge kalten Wassers nötig:

$$\frac{105{,}7 + 0{,}9 \,.\, 492{,}2 + 10 - 35}{35 - 12} = 22{,}8 \text{ kg}.$$

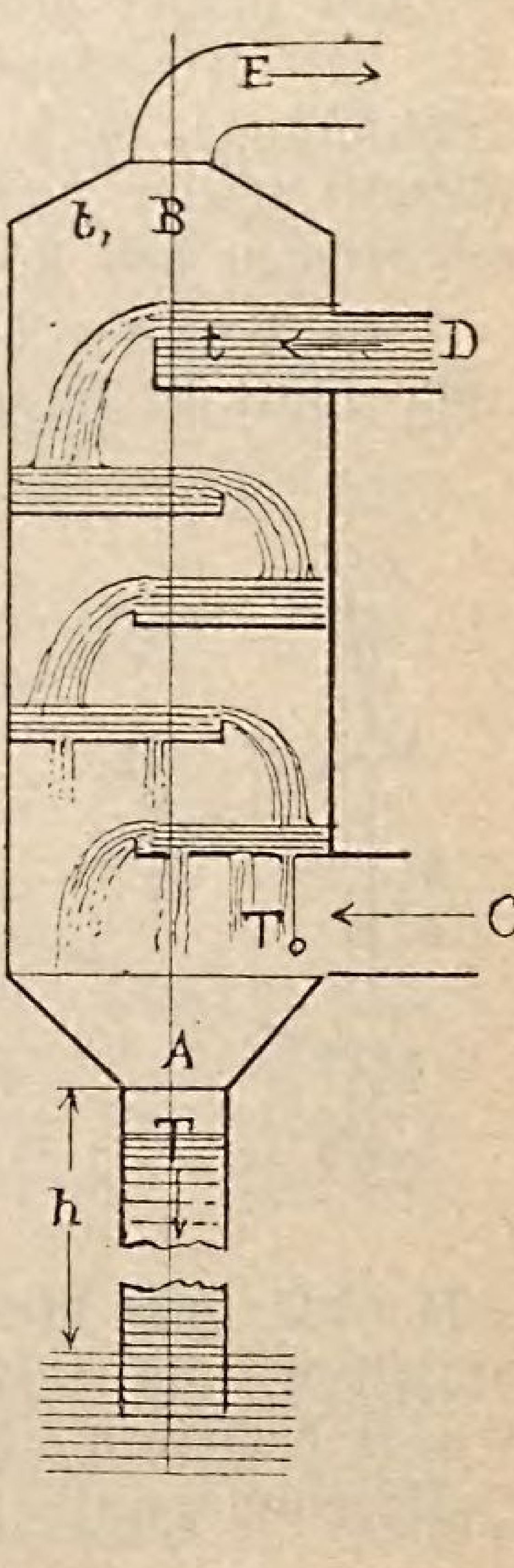
Man rechnet in der That durchschnittlich auf 1 kg Speisewasser 20 bis 25 kg Kondensationswasser.

Aus der benötigten Wassermenge wird die Größe der *Kaltwasserpumpe*, wenn eine solche nötig ist, berechnet.

Wo wenig Wasser vorhanden ist, kann dasselbe Wasser wiederholt Dienste leisten, wenn es nach dem Austritt aus dem Kondensator in einem Reservoir gesammelt und abgekühlt wird.

Die *Luftpumpe* ist entweder einfach- oder doppeltwirkend. Erfahrungsgemäß soll das Volumen der doppeltwirkenden annähernd 1/9, der einfachwirkenden 2/9 vom Volumen des Dampfcylinders sein und zwar sowohl für Niederdruck- wie für Hochdruckmaschinen mit Expansion. Nur für Hochdruckmaschinen ohne Expansion ist das Volumen der Luftpumpe größer und zwar bis zweimal größer zu nehmen.

Fig. 18.



Bei Woolf'schen Maschinen macht man das Volumen der Luftpumpe 2/3 von demjenigen Teil des kleinen Cylinders, welcher vor der Absperrung vom Kolben durchlaufen wird.

Der *Kondensatorraum* soll wenigstens 3/2 vom Volumen der einfachwirkenden Luftpumpe sein.

b) *Gegenstrom-Princip von F. J. Weiß.* Das luftdicht geschlossene Gefäß A B, Fig. 18, liegt aufrecht. Der Dampf tritt unten bei C, das Wasser oben bei D ein. Während der Dampf aufwärts strömt, sinkt die Temperatur von T_0 auf $t_,$; während das Wasser von D nach A geht, steigt die Temperatur von t auf T. Nun ist $t_,$ nur wenig größer als t und T nur wenig kleiner als T_0. Für gleiche Temperatur des eintretenden Dampfes und Wassers wird cirka T = 90 ° und $t_,$ = 20 °; also geht die obige Gleichung für die benötigte Menge kalten Wassers über in

$$\frac{105{,}7 + 0{,}9 \,.\, 492{,}2 + 10 - 20}{90 - 12} = 6{,}9 \text{ kg}.$$

Also braucht dieser Kondensator nur $^3/_{10}$ jener Wassermenge wie der nach bisherigem Princip.

Statt der bisherigen Luftpumpe sind zwei kleine Pumpen nötig: die eine entfernt das Wasser unterhalb A, die andere die Luft bei E. Hat die Höhe h über 10 m Wert, so fließt das Wasser unten ohne Pumpe ab.

B. Oberflächenkondensator.

Der Dampf tritt in ein System von Röhren, welche von kaltem Wasser, das sich stetig erneuert, abgekühlt werden. Das aus dem Dampf sich bildende Wasser fließt aus diesen Röhren in einen Behälter ab und wird mit einem Zusatz von anderem Wasser wieder zur Speisung des Kessels verwendet. Diese Art der Kondensation kommt meistens nur bei Schiffsmaschinen vor.

Da sich die Oberfläche, welche vom Dampf bestrichen wird, mit einer Fettschicht und die andere (auf Meerschiffen) mit einer Salzkruste belegt, so ist die Wärmeleitung der Wände eine geringe, weshalb die Abkühlungsfläche mindestens $^1/_3$ von der Heizfläche des Kessels sein soll. Sie kann auch nach der dritten Formel auf S. 360 berechnet werden.

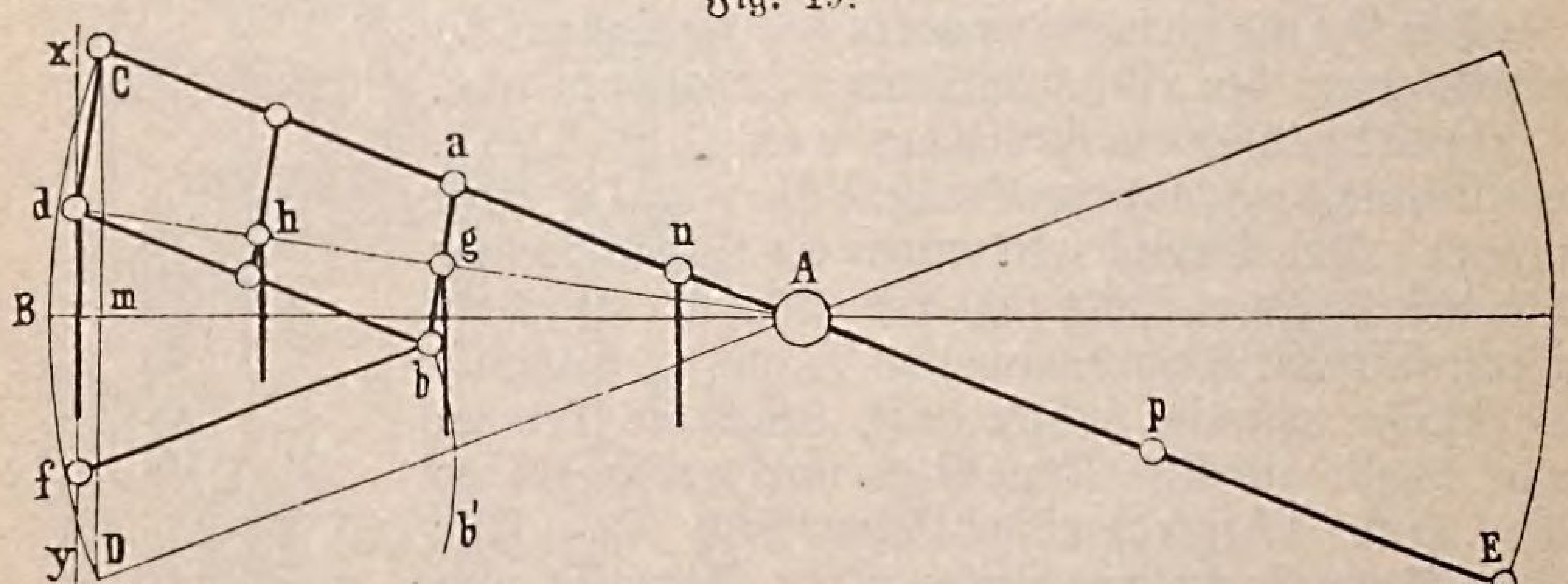
6. **Verwandlung der Kolbenbewegung in eine drehende Bewegung.** Um die Bewegung des Kolbens auf die einer Welle zu übertragen, werden wesentlich folgende Mittel angewendet:

a) Schubstange mit Kurbel. Die Schubstange soll mindestens 4mal länger sein als die Kurbel. Gewöhnlich nimmt man sie $4^1/_2$- bis $5^1/_2$mal länger als die Kurbel.

Der Kreuzkopf, an der Zusammenhängung von Kolbenstange und Schubstange, muß geradlinig geführt werden. Es geschieht dies meistens mittelst zweier Leitschienen. Der Kreuzkopf drückt sowohl beim Schieben als Ziehen des Kolbens nur auf eine dieser Schienen.

b) Balancier, Schubstange und Kurbel. Die Einrichtung nach Watt ist folgende. Es seien A (Fig. 19) die Achse des Balancier;

Fig. 19.



AB, AC, AD die mittlere (horizontale), höchste und tiefste Stellung desselben und CBD der Schwingungsbogen. Man ziehe die Sehne CmD desselben, halbiere den Abschnitt Bm und zeichne durch den Halbierungspunkt eine vertikale Linie xy, nehme einen Punkt d auf

xy an und konstruiere das Parallelogramm Cabd. Dieses Parallelogramm verzeichne man auch für die mittlere und tiefste Stellung des Balancier so, daß der Eckpunkt d in der Geraden xy verbleibt. Dadurch kommt der Eckpunkt b in drei verschiedene Lagen. Man suche den Mittelpunkt f des Kreisbogens bb′, welcher durch diese drei Lagen geht. Dadurch wird bf zur Länge des Gegenlenkers und f zur Achse desselben. Nun bewegt sich der Eckpunkt d des Parallelogramms sehr nahe in einer Vertikalen; das nämliche ist mit allen Punkten g, h, . . der Fall, welche in der Geraden dA liegen.

Bei einer Woolf'schen Maschine kommen folgende Stangen am Balancier vor: bei d Kolbenstange des größern Dampfcylinders, bei h die des kleinern Dampfcylinders, bei g die der Luftpumpe, bei n die der Warmwasserpumpe, bei p die der Kaltwasserpumpe und bei E die Schubstange. Bei einer Watt'schen Niederdruckmaschine fällt die Stange bei h weg. — Gewöhnlich nimmt man an:

$$AC = AE,\quad CD = \tfrac{1}{3}CE,\quad Ca = Aa,\quad Cd = \tfrac{2}{3}Ca,$$
$$An = \tfrac{1}{5}AC,\quad Ap = Ep.$$

c) Oscillierende Dampfcylinder. Die Welle ist gekröpft oder mit einer Kurbel versehen und die Kolbenstange direkt mit dem Kurbelzapfen zusammengehängt. Die Anordnung ist nur gerechtfertigt, wo kein Raum für eine Schubstange vorhanden.

7. **Schwungrad.** Nachzusehen auf S. 221.

8. **Regulator.** Das Schwungrad soll die Ungleichförmigkeit der Bewegung innerhalb einer Drehung der Welle möglichst beseitigen, der Regulator dagegen die gleiche Anzahl Umgänge per Minute aufrecht erhalten. Es wird nach zwei Principien reguliert: entweder mittelst der Drosselklappe, wodurch die Spannung des Eintrittsdampfes verändert wird, oder durch früheres oder späteres Absperren des Dampfes, wodurch die Spannung des Eintrittsdampfes gleich bleibt, dagegen die Füllung des Cylinders sich ändert. Das letztere Princip ist das richtigere. Beim ersten Princip wirkt der Regulator auf die Drosselklappe, beim zweiten direkt auf die Steuerungsorgane.

Ueber Tourenzahlen, Empfindlichkeit ꝛc. der Regulatoren sehe man nach auf S. 122.

II. Arbeit der Dampfmaschinen.

Es sind die beiden Aufgaben zu lösen: Bestimmung der Arbeit einer im Betrieb stehenden Dampfmaschine und Bestimmung der Arbeit einer zu erbauenden Maschine. Diese Aufgaben sollen zuerst behandelt werden für die eincylindrige Dampfmaschine mit dem zur Arbeit benötigten Dampfverbrauch und nachher für die mehrcylindrigen Maschinen.

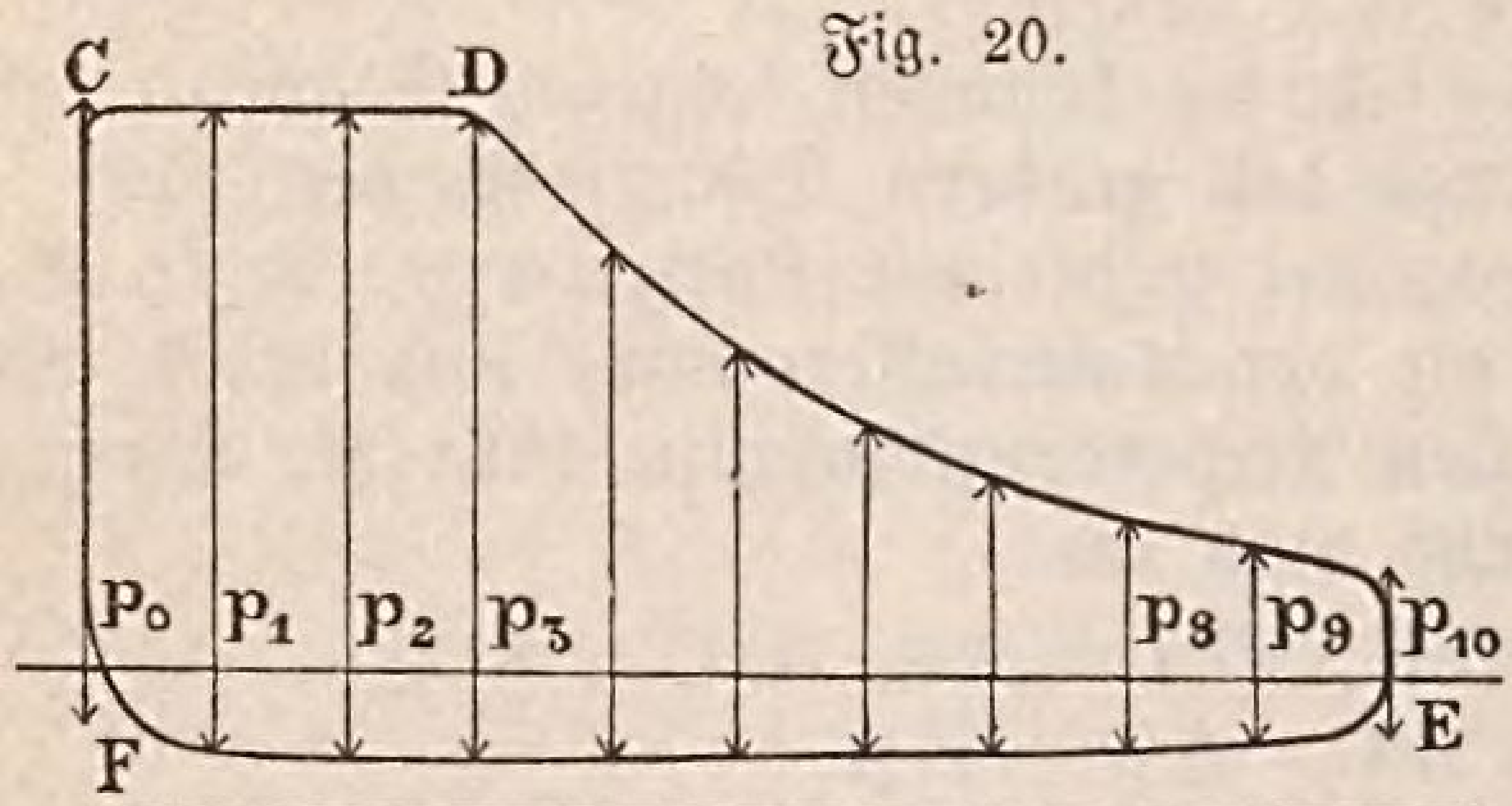
A. Arbeit einer bestehenden eincylindrigen Maschine.

1. **Indikator.** Er wird am Ende des Dampfcylinders aufgeschraubt. Dadurch drückt der Dampf der Maschine auf das Kölbchen des Instrumentes und dieses gegen eine Feder. Aus der Ausweichung der Feder

wird auf den Dampfdruck geschlossen mittelst einer Skala. Die Einheit der Skala entspricht dem Dampfdruck von 1 kg per 1 qcm Fläche. Während der Dampfkolben hin und her geht, dreht sich eine Walze, auf welcher ein Papierstreifen aufgewickelt ist. Auf diesem Streifen beschreibt ein Bleistift, der mit der Feder auf und ab geht, eine geschlossene Kurve, welche das Diagramm der Arbeit bildet.

2. **Mittlerer Dampfdruck.** Die Länge dieses Diagramms ist der Hub, die obere Begrenzung CDE (Fig. 20) die Druckkurve für die Arbeitsseite, die untere Kurve EF die Gegendruckkurve; ferner sind die Ordinaten p_0, p_1, p_2 .. des Diagramms der Dampfüberdruck an der betreffenden Stelle des Hubes. Teilt man den Hub in 10 gleiche Teile, so erhält man als Wert für den mittleren Dampfdruck p per 1 qcm Fläche

Fig. 20.



$$(1)\qquad p = \frac{p_0 + 4(p_1 + p_3 + ..) + 2(p_2 + p_4 + ..) + p_{10}}{3 \,.\, 10}.$$

Es sollen auf beiden Seiten des Cylinders Diagramme abgenommen werden, um das Mittel aus ihnen bestimmen zu können.

3. **Indizierte Arbeit.** Es ist der mittlere Druck auf die ganze Kolbenfläche = Fp; folglich die Arbeit derselben per Sekunde = Fpv Kilogramm-Meter und in Pferden

$$(2)\qquad \text{Indizierte Arbeit} = \frac{Fpv}{75}.$$

Beisp. Es sei in einem der Diagramme

			$p_1 = 4{,}70$
	$p_0 = 4{,}70$	$p_2 = 4{,}70$	$p_3 = 4{,}70$
	$p_{10} = 1{,}05$	$p_4 = 3{,}25$	$p_5 = 2{,}70$
		$p_6 = 2{,}15$	$p_7 = 1{,}70$
		$p_8 = 1{,}25$	$p_9 = 1{,}15$
Summen	5,75	11,35	14,95

$$\text{Daher der mittlere Druck} = \frac{5{,}75 + 4 \,.\, 14{,}95 + 2 \,.\, 11{,}35}{3 \,.\, 10} = 2{,}942 \text{ kg}.$$

Ganz ebenso gebe das andere Diagramm . . . . . = 2,892 „
Daher das Mittel aus beiden Werten . . . . p = 2,917 „

Ferner sei der Durchmesser des Cylinders = 40 cm, derjenige der Kolbenstange = 7 cm, so sind die Querschnitte derselben 1256 und 38 qcm. Die Kolbenstange sei nur auf der einen Seite des Kolbens vorhanden, daher reduziert sie den Querschnitt des Kolbens auch nur auf dieser Seite. Es ist daher der mittlere Kolbenquerschnitt

$$F = 1256 - 19 = 1237 \text{ qcm}.$$

Endlich sei der Kolbenhub = 0,8 m und die Anzahl Umdrehungen per Minute = 48, so wird

$$\text{Geschwindigkeit } v = \frac{2 \cdot 0{,}8 \cdot 48}{60} = 1{,}28 \text{ m},$$

$$\text{Indizierte Arbeit} = \frac{1237 \cdot 2{,}917 \cdot 1{,}28}{75} = 61{,}57 \text{ Pfd.}$$

4. **Wirkliche Arbeit.** Die indizierte Arbeit hat auch die einzelnen Widerstände der Maschine zu überwinden. Diese betragen in Teilen des Dampfüberdruckes p für eine größere Maschine ohne Kondensation unter günstigen Umständen:

Kolbenreibung	0,035
Reibung der Kolbenstange	0,012
Widerstand der Steuerung	0,008
Reibung des Kreuzkopfes	0,010
Reibung des Kurbelzapfens	0,011
Reibung der Schwungradwelle	0,028
Widerstand des Regulators	0,005
Widerstand der Speisepumpe	0,005
	0,114

Für kleine Maschinen und solche mit schwachem Ueberdruck wächst dieser Wert bis auf 0,180.

Für Maschinen mit Kondensation sind diese Werte je um 0,030 bis 0,040 zu vermehren. Derjenige für mittlere Verhältnisse wird daher 0,114 + 0,036 = 0,15. In der That zeigen Versuche, daß die wirkliche Arbeit 0,83 bis 0,87 von der indizierten beträgt. Dieses Verhältnis heißt man Widerstandskoefficient. Es sei für die Folge mit k bezeichnet. Daher ist die wirkliche Arbeit

$$(3) \qquad A = k \cdot \frac{Fpv}{75}.$$

Beisp. Wenn die Maschine des vorstehenden Beispiels Kondensation hat und k = 0,85 angenommen werden kann, so wird

$$A = 0{,}85 \cdot 61{,}57 = 52{,}34 \text{ Pfd.}$$

B. Arbeit einer zu erbauenden eincylindrigen Maschine.

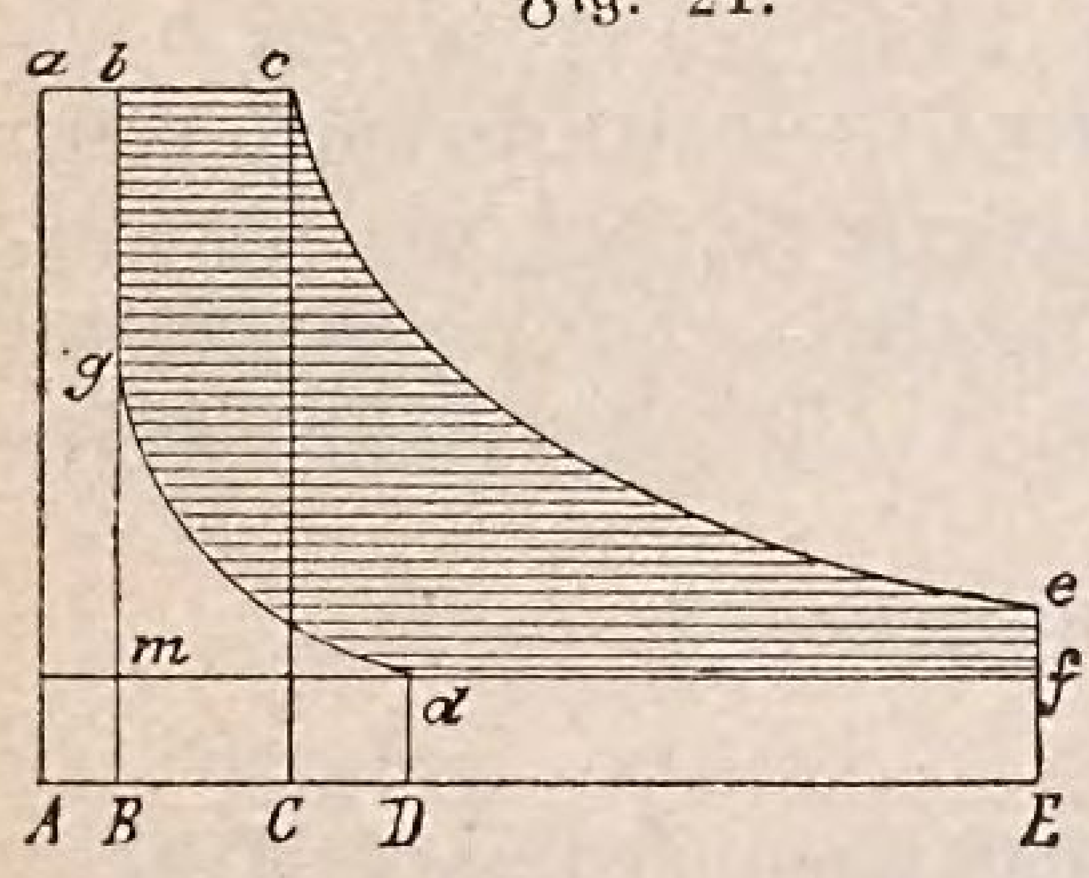
1. **Nachahmung des Indikatordiagramms.** Man entwerfe ein Diagramm, wie es die Fig. 20 darstellt, allerdings mit Berücksichtigung der Eigentümlichkeiten, wie sie die Maschine bieten soll, so läßt sich auf dieses Diagramm die Formel (2) anwenden, mittelst welcher eine Größe berechnet werden kann, z. B. die Arbeit, die Kolbenfläche 2c.

2. **Diagramm aus theoretischen Regeln.** Es sei (Fig. 21) BE = H, BC = h, AB = h_0, also AC = h_0 + h die Länge des Raumes, der mit frischem Dampf angefüllt wird und AE = h_0 + H die Länge des Raumes, in welchen sich der Dampf nach einem vollen Hub ausdehnt. Nun heißt das Verhältnis AE : AC Expansionsverhältnis. Dasselbe

ist also hier $h_0 + H : h_0 + h$. Wird h gleich H oder doch sehr nahe gleich H, so heißt die Maschine Volldruckmaschine; wenn aber h wesentlich kleiner ist als H, so entsteht die Expansionsmaschine.

Am Ende der Wege AB, AC, .. trage man den Druck des Dampfes als Ordinaten auf. Es sei $Aa = P$ der Anfangsdruck per Flächeneinheit. Man setze voraus, dieser Druck bleibe längs des Weges BC konstant, so ist die Drucklinie ac parallel zu AC. Von hier dehnt sich nun der Dampf aus bis E. Die diesem Weg entsprechende Drucklinie ce wäre eine adiabatische Kurve (S. 346), wenn der Cylinder und Kolben bloße mathematische Körper wären. Diese nehmen aber an den Wärmevorgängen im Innern des Cylinders Anteil. Während nämlich der Dampf sich längs CE ausdehnt, kühlt er sich ab; daher kühlt sich auch Cylinder und Kolben ab. Noch mehr ist dies der Fall, wenn der Dampf in die Atmosphäre oder den Kondensator abströmt. Gelangt daher längs des Weges AC frischer Dampf in den Cylinder, so trifft er kalte Wände; also muß sich ein Teil dieses Dampfes kondensieren; wenig, wenn der Cylinder mit einer Dampfhülle umgeben ist, mehr ohne Dampfmantel. Auch wenn der Dampf kein Wasser mit in den Cylinder führt, so bilden sich bei der eincylindrigen Maschine Wassermengen von 10 bis 15 Prozent mit Mantel, von 35 bis 45 ohne Mantel. Dieses Wasser hat die höchste im Cylinder vorhandene Temperatur. Dehnt sich nun der Dampf längs CE aus, so sinkt seine Temperatur, also müßte sich ohne das Vorhandensein des heißen Wassers ein Teil Dampf kondensieren, da er während des Arbeitens Wärme abgibt. Allein das heiße Wasser hat überschüssige Wärme, welche jene ersetzt, die sich in Arbeit verwandelt. Daher kommt es, daß, erfahrungsgemäß, der Druck des Dampfes nicht so rasch sinkt, wie nach der adiabatischen Kurve, sondern sehr nahe nach der gleichseitigen Hyperbel (S. 381). Der Dampf befolgt also nahe das Mariotte'sche Gesetz, sowohl für Maschinen ohne oder mit Dampfmantel. Die Druckkurve ce ist daher eine solche Hyperbel.

Fig. 21.



Bei der Umkehr des Kolbens sinke der Dampfdruck plötzlich von Ee auf $Ef = P_0$ und behalte diesen Wert längs des Weges $ED = h_2$, so daß die entsprechende Gegendrucklinie fd eine Gerade wird, parallel zu ED. In D beginne die Kompression. Der zusammengedrückte Dampf liefere die Drucklinie dg, wo g in der Geraden Bb liegen muß. Man nimmt dg ebenfalls als Hyperbel an. Es soll nun D so gelegen sein, daß g höchstens bis b reicht. Trifft g mit b zusammen, so heißt die Kompression eine vollständige. Alsdann ist der Druck im schädlichen Raum gleich dem Druck des sofort eintretenden frischen Dampfes. Es ist alsdann nur ein Raum von der Länge BC mit solchem Dampf zu füllen. Für schwache Kompression rücken die Punkte d und g zusammen und kommen nach m, wenn jede Kompression fehlt.

3. **Arbeit aus diesem Diagramm.** Die schraffierte Fläche der Fig. 21 gibt die theoretische Arbeit pro Einheit der Kolbenfläche. Die Fläche selbst aber stellt sich dar durch folgende algebraische Summe

$$(4) \qquad BCcb + CceE - EfdD - DdgB.$$

Der erste Teil ist $= Ph$. Bei Ableitung des zweiten ist zu beachten, daß der Dampf aus dem Raum $AC = h_0 + h$ sich ausdehnt in den Raum $AE = h_0 + H$. Dieser Teil wird daher

$$P(h_0 + h) \log n \frac{h_0 + H}{h_0 + h},$$

worin log n angibt, es sei von dem Expansionsverhältnis $h_0 + H : h_0 + h$ der natürliche Logarithmus zu nehmen, der für die Folge mit z bezeichnet werde.

Der dritte Teil gibt die Gegendruckarbeit $P_0 h_2$ längs des Weges h_2; der vierte ist die Kompressionsarbeit. Sie entsteht, indem der Dampf vom Anfangsdruck P_0 aus dem Raum $DA = h_0 + h_1$ zusammengedrückt wird in den Raum h_0 und beträgt daher

$$P_0 (h_0 + h_1) \log n \frac{h_0 + h_1}{h_0}.$$

Der natürliche Logarithmus des Kompressionsverhältnisses $h_0 + h_1 : h_0$ soll mit z_0 bezeichnet werden.

Bildet man aus diesen Gliedern die Summe (4) und multipliziert mit F, so erhält man als theoretische Arbeit

$$F[Ph + P(h_0 + h)z - P_0 h_2 - P_0 (h_0 + h_1) z_0].$$

Wegen der Unvollkommenheit der Steuerung ist nun die indizierte Arbeit etwas kleiner als diese. Ihr Verhältnis k' heißt Steuerungskoefficient. Daher wird die indizierte Arbeit erhalten, wenn man die theoretische mit k' multipliziert, und die effektive, wenn man die indizierte mit k multipliziert. Daher die wirkliche Arbeit in Pferden pro Hub

$$\frac{kk'}{75} F\left[P \frac{h + (h_0 + h)z}{H} - P_0 \frac{h_2 + (h_0 + h_1) z_0}{H}\right] H.$$

Ersetzt man hierin den letzten Faktor H durch v, so erhält man die Arbeit pro Sekunde

$$(5) \qquad A = \frac{kk'}{75} F\left[P \frac{h + (h_0 + h)z}{H} - P_0 \frac{h_2 + (h_0 + h_1) z_0}{H}\right] v.$$

a) Werte von k'. Sie reichen, je nach der Vollkommenheit der Steuerung, von 0,85 bis 0,98. Für eine gute Maschine wird $k' = 0{,}96$.

b) Werte von z. In der folgenden Tabelle bezeichnen die Zahlen der ersten Vertikalreihe das Expansionsverhältnis und die nebenan stehenden dessen natürlichen Logarithmus.

Exp.-Verh.	z	Exp.-Verh.	z	Exp.-Verh.	z	Exp.-Verh.	z	Exp.-Verh.	z	Exp.-Verh.	z
1,1	0,095	2,2	0,788	4,2	1,435	6,2	1,824	8,2	2,104	11	2,398
1,2	0,182	2,4	0,875	4,4	1,482	6,4	1,856	8,4	2,128	12	2,485
1,3	0,262	2,6	0,956	4,6	1,526	6,6	1,887	8,6	2,152	13	2,565
1,4	0,336	2,8	1,030	4,8	1,569	6,8	1,917	8,8	2,175	14	2,639
1,5	0,405	3	1,099	5	1,609	7	1,946	9	2,197	15	2,708
1,6	0,470	3,2	1,163	5,2	1,649	7,2	1,974	9,2	2,219	16	2,773
1,7	0,531	3,4	1,224	5,4	1,686	7,4	2,001	9,4	2,241	17	2,833
1,8	0,878	3,6	1,281	5,6	1,727	7,6	2,028	9,6	2,262	18	2,890
1,9	0,642	3,8	1,335	5,8	1,758	7,8	2,054	9,8	2,282	19	2,944
2	0,693	4	1,386	6	1,792	8	2,079	10	2,303	20	2,996

c) Anfangsdruck P. Derselbe beträgt in gewöhnlichen Fällen 5—7, bei hohem Druck 8—12 kg per 1 qcm Kolbenfläche.

d) Gegendruck P_0. Für Maschinen mit Kondensation gewöhnlich 0,15, für solche ohne Kondensation 1,1 bis 1,3 kg per 1 qcm Fläche.

e) Mittlerer Dampfüberdruck. Durch Vergleichung der Formeln (3) und (5) ergibt sich für den mittleren Dampfüberdruck folgender Wert

$$(6) \qquad p = k' \left[P \frac{h + (h_0 + h) z}{H} - P_0 \frac{h_2 + (h_0 + h_1) z_0}{H} \right].$$

f) Expansion. Bezeichnet man den Dampfdruck E e (Fig. 21) am Ende des Hubes mit P_1, so soll P_1 immer größer sein als P_0 und zwar mindestens: bei Maschinen mit Kondensation um 0,4 kg, bei solchen ohne Kondensation um 0,1 kg. Nach dem Mariotte'schen Gesetze wird $h_0 + H : h_0 + h = P : P_1$. Nimmt man $P = 12$ und $P_1 = 0{,}6$ kg an, so würde das Expansionsverhältnis $12 : 0{,}6 = 20$. Allein man geht nicht über eine 15fache Expansion hinaus; es wird daher in obigem Fall der Enddruck $P_1 = 12 : 15 = 0{,}8$ kg, also um cirka 0,65 kg größer als der Gegendruck P_0.

g) Kompression. Sie gewährt folgende Vorteile: Der zusammengedrückte Dampf wirkt im Cylinder wie ein Puffer, beseitigt also die stoßenden Wirkungen; er vermindert den Druck der Ventile und Schieber auf ihre Unterlagen und damit auch ihre Widerstände und endlich vermindert ein frühzeitiges Schließen der Abzugsöffnungen die Auspuffwärme. Zwar verbraucht die Kompression Arbeit; allein sie wird wieder ersetzt dadurch, daß diese Arbeit Wärme erzeugt, welche in den Dampf übergeht, wodurch die Cylinderwände vorgewärmt werden; allein auch dadurch, daß nunmehr nicht der ganze schädliche Raum mit frischem Dampf gefüllt werden muß. Wäre die Kompression eine vollständige und z. B. $h_0 = 0{,}04\,H$; $h = 0{,}12\,H$, so wäre mit frischem Dampf nur das Volumen 0,12 HF pro Hub auszufüllen, während ohne Kompression dieses Volumen um sehr annähernd 0,04 HF größer aus-

fiele. Diese Dampfmengen verhalten sich wie 12 : 16 oder 3 : 4. Die Dampfersparnis gleicht daher den Verlust an Arbeit aus.

Beisp. Der Durchmesser des Cylinders sei 40 cm, derjenige der Kolbenstange 6 cm. Ferner seien $h = 0{,}12\,H$; $h_0 = 0{,}04\,H$; $h_1 = 0{,}3\,H$ (also $h_2 = 0{,}7\,H$); $v = 1{,}5$ m; $P = 6$ kg; $P_0 = 0{,}15$ kg; $k = 0{,}85$; $k_1 = 0{,}96$. Wie groß die Arbeit der Maschine?

Es ist die Kolbenfläche für 40 cm Durchmesser . . = 1256 qcm,
davon geht ab der halbe Querschnitt der Kolbenstange = 14 „
Mithin wird der in Rechnung zu bringende Wert $F = 1242$ „
Da nun . . . . . $h_0 + h = 0{,}16\,H$ und $h_0 + H = 1{,}04\,H$,
so wird das Expansionsverhältnis . . . $1{,}04 : 0{,}16 = 6{,}50$
und dessen natürlicher Logarithmus . . . . . $z = 1{,}87$.
Das Kompressionsverhältnis ist $h_0 + h_1 : h_0 = 0{,}34 : 0{,}04 = 8{,}50$
und dessen natürlicher Logarithmus . . . . . $z_0 = 2{,}14$,
daraus ergibt sich als mittlerer Ueberdruck

$$p = 0{,}96\left[6 \cdot \frac{0{,}12 + (0{,}04 + 0{,}12)1{,}87}{1} - 0{,}15 \cdot \frac{0{,}7 + (0{,}04 + 0{,}3)2{,}14}{1}\right]$$

$$p = 0{,}96\,[2{,}515 - 0{,}214] \;.\;.\;.\;.\;.\; = 2{,}209 \text{ kg}.$$

Arbeit per Sekunde . . $A = \frac{0{,}85}{75} \cdot 1242 \cdot 2{,}209 \cdot 1{,}5 = 46{,}6$ Pfd.

C. Dampfverbrauch einer eincylindrigen Maschine.

1. **Netto-Dampfverbrauch.** Der Dampf tritt per Hub längs des Weges $h_0 + h$ in den Cylinder; es findet sich aber im schädlichen Raum von der Länge h_0 noch Dampf vor, so daß dessen Gewicht nur noch zu ergänzen ist, bis daraus Dampf von der Dichtigkeit des eintretenden geworden ist. Es bezeichne e den Anteil frischen Dampf, der zum Ausfüllen des schädlichen Raumes erfordert wird, so ist $e = 0$ für volle Kompression und für fehlende oder sehr schwache Kompression sehr nahe $e = 1$. Allgemein ist noch ein Raum auszufüllen von der Länge $e\,h_0 + h$ und dem Querschnitt $0{,}0001\,F$ (wenn F in qcm ausgedrückt wird), also von dem Volumen $0{,}0001\,(e\,h_0 + h)\,F$. Es sei der Dampf feucht und enthalte auf 1 kg der Mischung x kg trockenen Dampf; ferner sei das Gewicht von 1 kbm trockenen Dampfes $= \gamma$, so ist das Gewicht von 1 kbm feuchten Dampfes $= \gamma : x$; somit das Gewicht des erwähnten Volumens

$$0{,}0001\,(e\,h_0 + h)\,F \cdot \frac{\gamma}{x}\,.$$

Dieses Volumen wiederholt sich in der Stunde $2n \,.\, 60$mal. Berücksichtigt man, daß $60\,v = 2\,n\,H$, so wird der Dampfverbrauch in der Stunde

$$0{,}36\,F\,v \cdot \frac{e\,h_0 + h}{H} \cdot \frac{\gamma}{x}.$$

Dividiert man diesen Ausdruck mit dem Werte von A in (5) und berücksichtigt Formel (6), so erhält man als Dampfverbrauch per Pferd

in der Stunde, jedoch ohne Rücksicht auf Dampfverluste, Abkühlung durch die Cylinderwände und auf den Dampfmantel

$$(7) \qquad \frac{27}{kx} \cdot \frac{e h_0 + h}{H} \cdot \frac{\gamma}{p}.$$

Beisp. Wie viel Dampf verbraucht die Maschine des unmittelbar vorhergehenden Beispiels per Pferd in der Stunde, wenn der Dampf mit 5 Prozent Wasser in den Cylinder gelangt?

Es ist $k = 0{,}85$; $x = 0{,}95$; $p = 2{,}209$ kg und nach der Dampftabelle $\gamma = 3{,}163$ kg; ferner $h_0 = 0{,}04 H$; $h = 0{,}12 H$. Es bleibt noch e zu bestimmen. Die Kompression beginnt mit dem Dampfdruck 0,15 kg; da der Dampf auf einen 8,5mal kleinern Raum zusammengedrückt wird, so steigt seine Spannung (ohne Rücksicht auf die Vorwärmung der Cylinderwände) auf $0{,}15 \,.\, 8{,}5 = 1{,}275$ kg. Diese Spannung muß auf 6 kg ergänzt werden. Daher annähernd $e = 1{,}275 : 6 = 0{,}212$. Daher wird der gesuchte Dampfverbrauch

$$\frac{27}{0{,}85 \,.\, 0{,}95} \cdot \frac{0{,}212 \,.\, 0{,}04 H + 0{,}12 H}{H} \cdot \frac{3{,}163}{2{,}209} = 6{,}15 \text{ kg}.$$

2. **Brutto-Dampfverbrauch.** Der Dampfaufwand wird wesentlich modifiziert durch die Undichtheiten der Steuerungsteile und der Kolbenliderung, durch die Abkühlung der Wände des Cylinders und das Vorhandensein eines Dampfmantels.

a) Undichtheit der Kolbenliderung. Das Verhältnis zwischen dem Dampfverlust per Stunde und der geleisteten Anzahl Pferde kann bestimmt werden durch die Formel

$$\frac{c}{k k' D v} \sqrt{\frac{\gamma}{p}},$$

worin c eine Konstante bezeichnet, welche durch Versuche zu bestimmen ist. In gewöhnlichen Fällen kann $c = 0{,}07$ angenommen werden.

Beisp. Für die eben behandelte Maschine wird der durch den Kolben herbeigeführte Dampfverlust per Stunde und Pferd:

$$\frac{0{,}07}{0{,}85 \,.\, 0{,}96 \,.\, 0{,}4 \,.\, 1{,}5} \sqrt{\frac{3{,}163}{2{,}209}} = 0{,}17 \text{ kg}.$$

b) Abkühlung durch den Cylinder ohne Dampfhülle. Bei jedem Hub kondensiert annähernd 0,02 kg Dampf per 1 qm Oberfläche und bei einer Differenz von 70^0 der mittleren Temperaturen im Cylinder und in der Atmosphäre oder im Kondensator, wohin der Dampf aus dem Cylinder abströmt. Bezeichnet t diese Temperaturdifferenz, so wird die per Pferd in der Stunde kondensierte Dampfmenge in Metermaßen für Maschinen ohne Dampfmantel sein

$$(8) \quad 0{,}02 \cdot \frac{t}{70} \left(\frac{D^2 \pi}{2} + D \pi H + d \pi H + y \right) \cdot \frac{3600 v}{A H},$$

wo die Größe in der Klammer die Abkühlungsfläche bezeichnet und zwar das erste Glied die Boden- und Kolbenfläche, das zweite den Cylindermantel, das dritte die Oberfläche der Kolbenstange und das vierte diejenige der Kanäle nach den Ventilen oder dem Schieber hin.

Beisp. Es sei bei der oben erwähnten Dampfmaschine $t = 158 - 97 = 61^0$; $d = 0{,}07$ m; $H = 0{,}8$ m; $y = 1{,}1 \cdot \frac{D^2\pi}{4}$, so wird der Dampfverlust durch innere Abkühlung

$$0{,}02 \cdot \frac{61}{70} (0{,}2512 + 1{,}0048 + 0{,}176 + 0{,}1382) \cdot \frac{3600 \,.\, 1{,}5}{48{,}2 \,.\, 0{,}8} = 3{,}96 \text{ kg},$$

daher der gesamte Dampfverbrauch dieser Maschine per Pferd in der Stunde . . . . $6{,}15 + 0{,}17 + 3{,}96 = 10{,}28$ „

c) Einfluß des Dampfmantels. Der Mantel hat keinen Einfluß auf die Kolbenfläche, die Oberfläche der Kolbenstange und auf y. Dagegen hält er die Wandteile, über welche sich der Mantel ausdehnt, warm. Daher können von deren Oberflächen cirka $^3/_4$ aus (8) wegfallen. Also wird auch der Dampfverbrauch nach (8) kleiner. Dafür kondensiert sich im Mantel eine Dampfmenge, welche ihre latente Wärme abgibt, also im Verhältnis von q : Q (S. 371) kleiner ist, als jene Menge, welche sich an der ausfallenden Fläche im Innern kondensiert hätte.

Beisp. Bei der vorstehend betrachteten Dampfmaschine gehe der Mantel um den cylindrischen Teil herum; also hat man in (8) nur $^1/_4$ von $D\pi H$ in Rechnung zu bringen. Dadurch sinkt die Abkühlungsfläche von 1,5702 auf 0,8166 qm; also wird auch in gleichem Verhältnis der Dampfverbrauch kleiner. Dieser beträgt daher nur 3,96 . 0,8166 : 1,5702 = 2,06 kg. Wegen des Mantels ist der Dampfbedarf daher kleiner um 3,96 — 2,06 = 1,90 kg. Nun ist (laut Dampftabelle) Q = 655 und q = 160 Kalorien. Daher die Wassermenge, welche sich im Mantel bildet

$$2{,}06 \times \frac{160}{655} = 0{,}50 \text{ kg},$$

und der gesamte Dampfverbrauch

$$6{,}15 + 0{,}17 + 2{,}06 + 0{,}50 = 8{,}88 \text{ kg}.$$

Es verhält sich somit der Dampfverbrauch mit Mantel zum Dampfverbrauch ohne Mantel wie 8,88 : 10,28 oder wie 86,3 : 100. Der Mantel bewirkt daher eine Ersparnis von 13,7 Prozenten.

D. Arbeit einer Woolf'schen Maschine.

Die Arbeit ist, theoretisch genommen, dieselbe, ob der Dampf in beiden Cylindern oder nur im größern allein arbeiten würde, wenn nur die Füllung dieselbe bleibt. Zwischen der eincylindrigen und dieser zweicylindrigen Maschine bestehen indessen folgende Unterschiede: Beim Uebergang des Dampfes aus dem kleinen Cylinder nach dem großen der Woolf'schen Maschine tritt ein Druckverlust, also auch ein Arbeitsverlust ein, der bei der eincylindrigen fehlt; bei der Woolf'schen Maschine ist der schädliche Raum im kleinen Cylinder kleiner als der schädliche Raum der eincylindrigen Maschine, daher geht weniger Volldruckarbeit bei der Woolf'schen Maschine verloren; endlich ist die Auspuffwärme (Wärme, welche die Cylinderwände an den Kondensator abgeben) der Woolf'schen Maschine kleiner als der eincylindrigen, weil die Wände

des großen Woolf'schen Cylinders keine so hohe Temperatur haben wie der des andern Systems. Mit der Woolf'schen Maschine wird daher eine Dampfersparnis von 8 bis 10 Prozent erzielt.

E. Arbeit der Compound-Maschinen.

Bei den Maschinen mit zwei Cylindern liegen diese entweder hinter einander (Tandem-Aufstellung) oder parallel neben einander. In beiden Fällen geht der Dampf nicht direkt aus dem kleinen nach dem großen Cylinder, sondern durch ein Reservoir (Receiver), wo er Wärme aufnimmt, welche ihm vom Kessel aus durch einen Dampfmantel zugeführt wird. Wegen dieses Sammlers muß der große Cylinder mit einer selbständigen Steuerung versehen sein. Diese soll den Dampf in dem Moment aus dem Sammler nach dem großen Cylinder strömen lassen, wenn die Spannung im Sammler gleich geworden ist derjenigen im kleinen Cylinder am Ende des Hubes. Auf diese Weise findet kein Druckabfall statt.

Der kleine Cylinder soll mit Kesseldampf, der große aber mit dem Dampf des Sammlers geheizt werden. Dampfersparnis wie bei der Woolf'schen Maschine, die sich bei Anwendung von mehr als zwei Cylindern noch steigert wegen Abnahme der Auspuffwärme.

F. Dampfmenge per effektives Pferd in der Stunde:

Wassergehalt beim Eintritt in den Cylinder 0,05.
E Expansion, K Kondensation, M Dampfmantel.

Eincylindrige Maschine:	Maschine groß,	mittel,	klein.
ohne E, ohne K, ohne M . . .	—	—	27 kg
mit E, ohne K, ohne M . . .	14,5	16,0	18 „
mit E, mit K, ohne M . . .	11,8	12,8	— „
mit E, mit K, mit M . . .	10,0	11,0	— „
Woolf'sche Maschine mit E, K, M . .	9,0	10,5	— „
Compoundmaschine mit E, K, M . .	8,5	9,5	— „

87. Von den Lokomotiven.

I. Von den Lokomotiven im allgemeinen.

1. **Hauptbestandteile einer Lokomotive.** Es sind zu unterscheiden: Lokomotiven für Haupt- und Nebenbahnen mit normaler Spurweite und solche für Schmalspurbahnen; Lokomotiven für mäßige und große Steigung (Bergbahnen), für große und kleine Geschwindigkeit (Eilzug-, Personenzug- und Güterzuglokomotiven), starke und schwache Krümmungen 2c. Bei jeder kommen als Hauptbestandteile vor: der Wagen, der Dampfapparat und die Dampfmaschine.

Wagen: Die Lokomotive hat zwei, drei oder vier Achsen. Die Räder sind auf die Achsen festgekeilt. Diejenigen Räder, welche von der Maschine aus gedreht werden, heißen Triebräder, die anderen Lauf-

oder Tragräder. Der Rahmen besteht aus zwei Längen- und zwei Querbalken (den Pufferbalken). Er hängt an Federn, welche mittelst der Achsengabeln auf die Achsenlager sich stützen.

Dampfapparat. Derselbe besteht aus der Feuerbüchse mit dem Roste und Aschenfall, dem cylindrischen Kessel mit den Rauch- oder Sideröhren, dem Rauchkasten mit dem Kamin. Der ganze Dampfapparat ist mit dem Rahmen fest verbunden.

Maschine. Jede Lokomotive hat zwei gleiche Hochdruckmaschinen oder eine Compoundmaschine mit zwei Cylindern. Sie arbeiten ohne Kondensation. Die Dampfcylinder liegen auf der vordern Seite des Wagens. Die Dampfkolben übertragen ihre Bewegung vermittelst Schubstangen und Kurbeln auf die Triebachsen. Die Kurbeln sind rechtwinklig zu einander gestellt. Dadurch und wegen der großen Masse der Lokomotive ist ein Schwungrad zur Ausgleichung der Ungleichförmigkeit der Bewegung überflüssig. Der Mechanismus zur Dampfschieberbewegung gestattet die Anwendung einer größern oder kleinern Expansion und die Verwandlung der Bewegung der Lokomotive aus einer vorwärts- in eine rückwärtsgehende. Der aus den Cylindern tretende Dampf gelangt durch das Blaserohr in das Kamin und bewirkt dadurch die Anfachung auf dem Roste.

2. **Leistungsvermögen einer Lokomotive.** Dasselbe wird bedingt: durch die Adhäsion der Triebräder auf den Bahnschienen, durch die Querschnitte der Dampfcylinder bei gegebener Dampfspannung und durch das Verdampfungsvermögen des Kessels.

3. **Bauart der Lokomotive.** Sie richtet sich nach der Fahrgeschwindigkeit, der Größe des Trains und nach den Steigungs- und Krümmungsverhältnissen der Bahn.

4. **Fahrgeschwindigkeit.** Sie beträgt bei Hauptbahnen durchschnittlich:

für Güterzüge . . .	8 m per Sek.	28,8 km per Std.
für gemischte Züge .	12 „ „ „	43,2 „ „ „
für Schnellzüge . . .	18 „ „ „	64,8 „ „ „

Die Geschwindigkeit soll unter günstigen Verhältnissen 28 m per Sekunde oder 100 km in der Stunde nicht überschreiten.

5. **Bezeichnung.** Es bezeichnet im folgenden:

P Druck der Triebräder auf die Schienen in Tonnen,
f Koefficient der Reibung der Triebräder auf den Schienen,
R Widerstand des Wagenzuges und der Lokomotive in kg,
D Durchmesser der Triebräder in Metern,
p mittlerer Dampfüberdruck im Cylinder in kg per 1 qcm Fläche,
F Kolbenfläche in Quadratcentimetern,
h Kolbenhub in Metern,
v mittlere Kolbengeschwindigkeit in Metern und
V Fahrgeschwindigkeit in Metern per Sekunde.

II. Wagen der Lokomotive.

1. **Normale Spurweite.** Der innere Abstand zwischen den Schienen eines geradlinigen Geleises ist allgemein 4′ 8½″ engl. Maß oder 1,436 m. In Bahnkrümmungen wird das Geleise um 0,5 bis 1,5 cm erweitert, je nachdem der Krümmungshalbmesser groß oder klein ist.

2. **Räder.** Durch die Spurweite ist der Abstand der Räder einer Achse bedingt. Die Radreifen (Bandagen) haben an der innern Seite vorstehende Kränze, um das Ausgleisen zu verhindern. Zwischen diesen Spurkränzen und den Schienen soll ein Spielraum von 1,5 bis 2 cm sein. Die Bandagen sind konisch abgedreht, Verjüngung $^1/_{20}$ bis $^1/_{15}$. Räder derselben Achse oder gekuppelte Räder müssen genau denselben Halbmesser haben. Deshalb werden die Bandagen von Zeit zu Zeit abgedreht.

Wenn die Räder über die Schienen rollen, so werden Radkranz und Schiene an der Berührungsstelle etwas eingedrückt. Diese Eindrücke bewirken ein Abblättern der Schienen und sind um so zerstörender, je kleiner die Berührungsfläche, also je kleiner der Durchmesser D der Räder ist. Diese Berührungsfläche wächst mit $\sqrt{D}$, also darf auch die Belastung der Räder mit $\sqrt{D}$ zunehmen. Es sei für ein Rad mit 1 m Durchmesser der größte zulässige Druck = 5 Tonnen, so erhält man

für die Raddurchmesser	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0 m.
Maximum des Druckes	5,0	5,5	5,9	6,3	6,7	7,1 Tonnen.

Bei einer zweiachsigen Lokomotive von 20 Tonnen Gewicht sei der Schwerpunkt des Ganzen von der Triebachse um 1,2 m und von der Tragachse um 1,8 m entfernt, so werden die Triebräder 12 und die Tragräder 8 Tonnen zu tragen haben. Also sollten die Triebräder mindestens 1,4 m Durchmesser haben. Gewöhnlich sind:

	Durchm. d. Triebräder.
für große Geschwindigkeiten	2,0 bis 2,5 m,
für mittlere Geschwindigkeiten	1,6 „ 1,7 „
für kleine Geschwindigkeiten	1,2 „ 1,4 „

und die Durchmesser der Laufräder 0,9 bis 1,4 m.

3. **Achsen.** Die Räder sind auf den Achsen festgekeilt. Der Abstand der äußersten Achsen beträgt mindestens 3 m und höchstens 4 m, wenn die Achsen sich nicht drehen können. Die kleinere Distanz kommt bei gekuppelten Achsen und für rasche Bahnkrümmungen zur Geltung. Um die Bewegung in Bahnkrümmungen zu erleichtern, werden öfters zwei Tragachsen auf der vorderen Seite der Lokomotive zu einem Radgestelle verbunden, das sich um einen vertikalen Zapfen drehen kann.

Die Dicke der Achsen, bei gleicher Länge und gleichartiger Inanspruchnahme, wächst mit der Quadratwurzel aus der Belastung derselben.

Wenn der Druck auf einer Seite der Achse	3	4	5	6 Tonnen,
so soll deren Dicke sein	12	13,9	15,5	17 cm.

4. **Rahmen.** Die Längebalken liegen entweder zwischen den Rädern und dem Kessel oder außerhalb der Räder oder zu beiden Seiten der Räder. Sie bestehen gewöhnlich aus Eisenplatten von 2 bis 2,7 cm Dicke und 20 bis 28 cm Höhe. Die Querbalken sind gewöhnlich von Holz, 13 bis 16 cm dick und 25 bis 35 cm hoch.

5. **Federn.** Der Rahmen liegt vermittelst ebenso vieler Federn auf den Achsen, als die Lokomotive Räder hat. Die Federn bestehen aus 10 bis 18 übereinander liegenden Blättern von 9 bis 10 cm Breite. Die oberste ist 80 bis 100 cm lang und wenigstens 1 cm dick. Die übrigen sind 9, 8, 7 mm dick; ihre Länge nimmt so ab, daß ungefähr eine parabolische Verjüngung entsteht. Die Federn stützen sich in der Mitte auf die Achsenlager, an ihren Enden hängt der Rahmen. Diese Enden sollen unter der Last höchstens 4 bis 5 cm einsinken. Bei einer Lokomotive mit mehr als zwei Achsen kann durch das größere oder geringere Anspannen eines Federnpaares der Druck auf die betreffende Achse vermehrt oder vermindert und damit der Druck auf die Achsen reguliert werden.

6. **Achsengabeln.** Sie sind Verlängerungen des Rahmens abwärts, welche die Lager der Achsenzapfen von zwei Seiten umschließen. In diesen Gabeln können sich die Lager vermöge des Spiels der Federn auf und ab bewegen, sie erhalten jedoch die Achsen in ihrer parallelen Lage.

7. **Reibung der Triebräder auf den Schienen.** Der Druck sämtlicher Triebräder auf den Schienen ist = 1000 P kg, also die Adhäsion der Triebräder auf den Schienen = 1000 P f kg.

Für ganz trockene Schienen ist . . . $f = 1/4$ bis $1/3$,
„ halbfeuchte Schienen . . . . . $f = 1/7$ „ $1/6$,
„ nasse oder beschneite Schienen . . $f = 1/11$ „ $1/10$.

Bei einer neu zu erbauenden Maschine wird $1/7$ in Rechnung gebracht.

8. **Kupplung der Achsen.** Der Widerstand, welchen eine Lokomotive überwinden kann, ist gleich 900 Pf (s. S. 424, Formel 4). Die Zugkraft der Lokomotive kann hiernach vermehrt werden, indem man einerseits das Gewicht der Lokomotive vergrößert, anderseits zwei oder mehr Achsen zusammenkuppelt. Bei den Berglokomotiven Engerth sind die drei Achsen gekuppelt, und diese übertragen ihre Bewegung außerdem noch durch Zahnräder auf die zwei Achsen des Tenders, so daß 10 Triebräder mit einem Gesamtdruck bis auf 55 Tonnen entstehen. Es sei $f = 1/7$, so wird

für die Anzahl Triebräder	=	2	4	6	8	
und den Druck derselben P	=	10	20	30	40	Tonnen,
die Zugkraft der Lokomotive	=	1286	2571	3857	5144	kg.

III. Vom Dampfapparat.

1. **Feuerkasten.** Er ist ein viereckiger Raum, in welchem die Verbrennung stattfindet. Den Boden desselben bildet der Rost. Damit die Wände dieses Kastens nicht verbrennen, sind dieselben zu beiden Seiten

und auf der Rückseite doppelt, so daß zwischen je zwei Wänden eine Wasserschichte von 7 bis 9 cm. Dicke Platz hat. Diese Wände sind durch Bolzen zusammengehalten. Die innern, dem Feuer zugekehrten Wände werden durch Kupferplatten erstellt. Die Rückwand enthält die Ofenthür. Unter dem Rost ist der Aschenraum. Durch die vordere Seite dieses Raumes tritt die Luft unter den Rost. Die Heizfläche des Feuerkastens beträgt 4,5 bis 8 qm.

2. **Rostfläche.** Sie soll 1/90 bis 1/70 von der gesamten Heizfläche und die Rostspaltenfläche 1/3 bis 1/2 von der Rostfläche betragen.

3. **Cylindrischer Teil des Kessels.** Derselbe liegt zwischen dem Feuer- und Rauchkasten, hat eine Länge von 2,5 bis 4,8 m und einen Durchmesser von 0,95 bis 1,5 m. Nur seine flachen Kopfwände kommen mit den heißen Gasen in Berührung. Der Cylindermantel wird mit einer schlechtleitenden Hülle umgeben.

4. **Sieberöhren.** Sie liegen horizontal im cylindrischen Teil des Kessels, sind durch Wasserschichten von 1,5 bis 2 cm getrennt, haben 4 bis 5 cm innern Durchmesser und bestehen aus Messing. Ihre Zahl wechselt von 120 bis 220, ihre Oberfläche zwischen 40 bis 170 qm.

5. **Rauchkasten.** Er ist ein vierkantiger Raum, der unter dem Kamin liegt. In ihm befinden sich die Röhren, welche den Dampf zu den Cylindern und aus denselben leiten. Die vordere Wand enthält eine Thüre, um den Zutritt zu den Endflächen der Sieberöhren möglich zu machen.

6. **Kamin.** Der Durchmesser beträgt 0,33 bis 0,46 m und die Höhe cirka 4 bis 4,2 m höchstens über den Bahnschienen.

7. **Kesselgarnitur.** Zwei Sicherheitsventile mit 10 cm Durchmesser und Belastung durch Spiralfedern; zwei gewöhnliche Wasserstandszeiger; drei Probierhähne; eine Sicherheitsschraube von Blei in der Decke des Feuerkastens, welche schmilzt, wenn das Wasser unter diese Decke herabsinkt; ein Manometer; Dampfpfeife; Mannloch im cylindrischen Kessel oder im Dampfdom; zwei Abschwemmhähne an der tiefsten Stelle des Feuerkastens.

8. **Blaserohr.** Der aus den Cylindern tretende Dampf geht durch das Blaserohr in das Kamin, vermischt sich daselbst mit der Luftsäule, welche die Kaminröhre anfüllt, reißt diese mit sich fort und verrichtet dabei die Arbeit, welche die Luftströmung erfordert. Wäre das Blaserohr und dessen Mündung sehr weit, so würde der Dampf mit geringer Spannkraft und Geschwindigkeit in das Kamin treten und eine zu schwache Anfachung bewirken. Daraus geht hervor, daß die Mündung des Blaserohrs in einem gewissen Verhältnis zum Dampf- und Luftverbrauch steht. Gewöhnlich kann diese Mündung erweitert oder verengt und damit der Luftzug reguliert werden. Der Querschnitt der Mündung beträgt im Mittel 1 qcm auf 1 qm Heizfläche. Der Dampf geht durch diese Mündung bei schwacher Leistung der Lokomotive mit 1,2, bei mittlerer Leistung mit 1,6, bei hoher Leistung mit 2 Atmo-

sphären Spannung. Wenigstens ebenso groß ist der Gegendruck des Dampfes auf die Kolben der Maschinen.

9. **Luftströmung in den Siederröhren und im Kamin.** Eine Lokomotive erfordere 1 kg Dampf per Sekunde. Hierzu seien 0,2 kg Kohlen und 15 . 0,2 = 3 kbm kalte Luft erforderlich. Nehmen wir an, diese Luft trete mit 850° Temperatur aus der Feuerbüchse in die Siederröhren und mit 250° ins Kamin über, so sind die diesen Temperaturen entsprechenden Volumen 12,4 und 5,75 kbm. Sind 170 Siederröhren von 5 cm innerem Durchmesser vorhanden, so ist ihr Querschnitt 0,333 qm. Hat das Kamin 46 cm Durchmesser, so ist sein Querschnitt 0,166 qm. Hiernach wird die Geschwindigkeit der heißen Luft per Sekunde

beim Eintritt in die Siederröhren . . . 12,4 : 0,333 = 37,2 m,
beim Eintritt in das Kamin . . . . . 5,75 : 0,166 = 34,6 m.

Das Gewicht von diesen 3 kbm kalter Luft beträgt 3 . 1,3 = 3,9 kg. Mit diesen verbinden sich 0,2 kg Brennstoff, so daß das Gewicht der bewegten Masse = 4,1 kg beträgt. Die lebendige Arbeit, mit welcher diese Masse durch das Kamin geht, ist nach S. 79

$$\frac{4{,}1 \cdot 34{,}6^2}{2 \cdot 9{,}81} = 250 \text{ mkg} = 3{,}3 \text{ Pferde.}$$

Diese Luft muß durch einen sehr engen Rost eintreten, eine dicke Brennstoffschicht durchdringen und die große Oberfläche der Siederröhren bestreichen. Beträgt der entsprechende Arbeitsaufwand 4,7 Pferde, so veranlaßt die Luftströmung dieser Lokomotive einen Arbeitsverlust von 3,3 + 4,7 = 8 Pferden.

10. **Heizfläche.** Sie beträgt durchschnittlich das 750- bis 900fache vom Querschnitt eines Dampfcylinders.

11. **Güteverhältnis des Kessels.** Nach Redtenbacher besteht folgendes Verhältnis zwischen der gesamten Heizfläche Z, der Dampfmenge G per Sekunde in Kilogrammen und dem Wirkungsgrad w des Kessels:

$$\frac{Z}{G} = 22 + 145\,w. \tag{1}$$

Für	w = 0,30	0,40	0,50	0,60	0,70
wird	$\frac{Z}{G}$ = 65	80	94	109	123.

Soll hiernach ein Lokomotivkessel von 65 qm Heizfläche 1 kg Dampf per Sekunde liefern, so ist das Verhältnis Z : G = 65, also w = 0,30, d. h. dieser Kessel gibt 30 Prozent Nutzleistung. Soll der nämliche Kessel nur 0,5 kg Dampf per Sekunde liefern, so ist Z : G = 130 und der Wirkungsgrad w wird nach obiger Formel = 0,74.

Die größten Lokomotiven haben 180 qm Heizfläche und verbrauchen bei der größten Arbeit cirka 1,7 kg Dampf. Das Güteverhältnis wird in diesem Fall nur = 0,58.

IV. Von der Maschine der Lokomotive.

1. **Lage der Dampfcylinder.** Die Dampfcylinder liegen auf der vordern Seite der Lokomotive, innerhalb oder außerhalb des Rahmens,

horizontal oder wenig geneigt. Liegen sie zwischen den Rahmen, so sind die Achsen der Triebräder an den Angriffsstellen der Schubstangen kurbelförmig gebogen. Liegen die Cylinder außerhalb des Rahmens, so wirken die Schubstangen auf Kurbelzapfen, befestigt in den Naben der Räder.

2. **Druck des Dampfes in den Cylindern.** Der mittlere Ueberdruck des Dampfes auf einen Kolben ist $F p$, die Hublänge h, daher die Arbeit beider Maschinen bei einem Hin- und Hergang der Kolben $= 2 F p . 2 h$. Der Widerstand R konsumiert in derselben Zeit, in welcher er den Weg $D \pi$ zurücklegt, die Arbeit $R . D \pi$. Beide Arbeiten sind gleich. Daraus folgt

$$(2) \qquad F p = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{D}{h} \cdot R.$$

Somit ist bei einer gegebenen Lokomotive der Ueberdruck des Dampfes dem Widerstand des Wagenzuges proportional.

Da eine hohe Dampfspannung für die Nutzleistung des Dampfes günstig ist, so soll der Halbmesser der Triebräder groß und die Hublänge klein genommen werden.

Beispiel. Ist der Triebraddurchmesser $D = 2$ m, die Hublänge $= 0,50$ m, der zu überwindende Widerstand $R = 1200$ kg und der Durchmesser eines Cylinders 0,40 m, so wird

Ueberdruck . . . . $F p = \frac{3,14}{4} \cdot \frac{2}{0,5} \cdot 1200 = 3768$ kg.
Querschnitt eines Cylinders . . $1256 - 38 = 1218$ qm.
Folglich Ueberdruck auf 1 qcm $p = 3768 : 1218 = 3,1$ kg.
Gegendruck, angenommen . . . . $= 1,7$ „
Folglich mittlerer absoluter Dampfdruck . . $= 4,8$ „

3. **Statisches Moment des Dampfdruckes.** Der Dampfdruck $F p$ wirkt auf zwei Kurbeln von der Länge $0,5\, h$, welche unter rechtem Winkel zu einander stehen. Die statischen Momente dieser Kräfte sind zusammen ein Maximum, wenn jede Kurbel einen Winkel von 45^0 mit der Richtung des Druckes $F p$ bildet, also wenn der Hebelsarm jeder Kraft $= 0,707 . 0,5\, h$ ist. Die Summe der Momente wird daher $= 2 . 0,707 . 0,5\, h F p$. Allein die Reibung $1000\, P f$ der Triebräder auf den Schienen ist als eine Kraft zu betrachten, welche am Hebelsarm $0,5\, D$ jenem Moment entgegenwirkt. Folglich wird sein

$$(3) \qquad 1000\, P f . D = 1,414\, h . F p.$$

Setzt man den Wert von $F p$ aus (2) in (3), so folgt

$$(4) \qquad R = 900\, P f.$$

Damit also die Triebräder in der bezeichneten Stellung der Kurbeln nicht ausgleiten, soll der Widerstand R nur $^9/_{10}$ von der Reibung der Triebräder betragen.

4. **Querschnitt der Dampfcylinder.** Die Arbeit des Dampfes per Sekunde in beiden Cylindern ist $= 2 F p v$; diejenige des Wider-

standes = R V, also auch = 900 Pf V. Durch Gleichsetzen beider Werte erhält man als Cylinderquerschnitt

(5) $$F = 450 \cdot \frac{P}{p} \cdot \frac{V}{v}.$$

Nimmt man für die höchste Leistung der Lokomotive an:

$$p = 5{,}7 \text{ kg}, \quad v = 2{,}4 \text{ m}, \quad f = \frac{1}{7},$$

so wird nach Formel (5)

$$F = 4{,}7 \, P V.$$

Wenn der Druck der Triebräder	P =	12	20	30	45	Tonnen
und die Fahrgeschwindigkeit	V =	18	14	10	8	m,
so ist der Cylinderquerschnitt	F =	1015	1316	1410	1692	qcm
und der Cylinderdurchmesser	=	36,0	40,9	42,4	46,4	cm.

Ist das Verhältnis zwischen der Kolbenfläche und Heizfläche 1 : 800, so erhält man für die vorstehenden Lokomotiven:

Heizfläche des Kessels . . . . Z = 81,2 105,3 112,8 135,4 qm.

5. **Durchmesser der Triebräder.** Der Weg 2 h des Dampfkolbens bei einem Hin- und Hergang verhält sich zum Umfang Dπ eines Triebrades, wie die Kolbengeschwindigkeit zur Fahrgeschwindigkeit; aus 2 h : Dπ = v : V folgt aber

$$D = \frac{2}{\pi} \cdot h \cdot \frac{V}{v}.$$

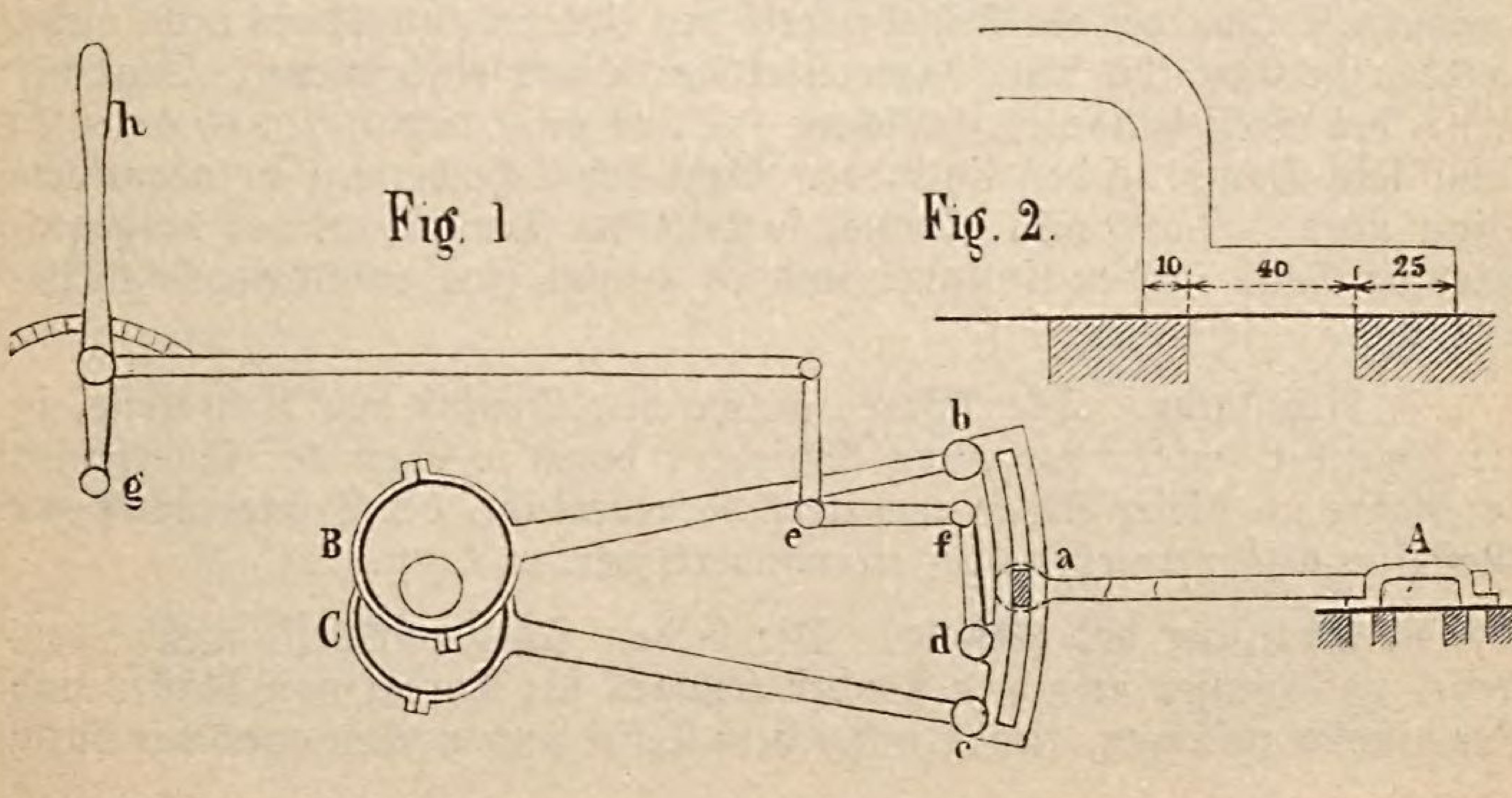
Nimmt man für die vier vorstehenden Lokomotiven an:

Hublänge des Kolbens . .	h =	0,42	0,48	0,54	0,60 m,
so wird Raddurchmesser . .	D =	2,01	1,78	1,43	1,27 „

Personenlokomotiven erhalten somit große Triebräder mit kurzem Cylinderhub, Warenlokomotiven kleine Räder mit langem Hub.

6. **Steuerung.** Es sind in Anwendung die Steuerungen von Stephenson, Gooch, Allen-Trick, Gonzenbach, Heussinger von Waldegg,

Fig. 1 Fig. 2.



Pius Fink, Ch. Brown u. a. Die einfachste ist die Koulisse von Stephenson. Der Dampfschieber A, Fig. 1, wird durch zwei excentrische Scheiben B, C, welche auf einer Wagenachse sitzen, hin und her bewegt. Die Stangen dieser Scheiben hangen vermittelst der Köpfe b, c mit der Kouliffe b c zusammen. Das Geleitstück a in der Kouliffe liegt in gerader Richtung mit der Schieberstange a A. Die Kouliffe kann vermittelst des Hebels g h, der sich um g dreht, gehoben oder gesenkt werden. Dreht man nämlich h nach rechts, so dreht sich auch der Winkelhebel e f um e und es wird die Kouliffe durch die Stange d f abwärts gedrückt. Ist die Kouliffe unten, so folgt der Schieber A dem Excenter B; ist sie oben, so wird er vom Excenter C nach entgegen gesetzter Richtung bewegt. Dadurch kann die vorwärtsgehende Bewegung der Lokomotive in eine rückwärtsgehende verwandelt werden. In der mittleren Stellung der Kouliffe wird das obere Ende b ebensoviel vorwärts, als das untere rückwärts geschoben. Der Schieber A steht mithin still und läßt keinen Dampf in den Cylinder. Die Länge Bb = Cc der Stangen, von Achse zu Achse gerechnet, ist der Krümmungshalbmesser für die Kouliffe.

In Fig. 2 ist ein Dampfschieber in der mittleren Lage in $^1/_4$ der natürlichen Größe dargestellt. Es ist

Breite der Zulaßöffnung	= 40 mm,
äußere Ueberdeckung	= 25 „
innere Ueberdeckung	= 10 „
folglich kleinster Wert der Excentricität . .	= 65 „

Mit diesen Daten verzeichne man das Zeuner'sche Schieberdiagramm (S. 399, Fig. 7), so wird man für einen Voreilungswinkel von 30° das lineare Voreilen finden: für den Eintritt des Dampfes 0,059, für den Austritt 0,175 des Schieberhubes.

Die Kouliffe werde mehr und mehr gegen die Mitte gerückt, so nimmt der Schieberweg ab und der Austritt und Eintritt erfolgt später. Ist z. B. der Schieberweg noch 2 . 30 mm, so kann der Dampf erst eintreten, wenn der Kolben den toten Punkt bereits um 0,057 des Kolbenweges überschritten hat. Zieht sich der Schieberweg auf 2 . 25 mm zusammen, so schneidet der Schieberkreis den Ueberdeckungskreis nicht mehr, sondern berührt ihn nur, daher hört der Dampfeintritt auf. Liegt der Wert des Schieberweges zwischen + 2 . 25 mm und — 2 . 15 mm, so kann kein Dampf in den Cylinder. Geht der Schieberweg in negativem Sinn über — 2 . 25 mm hinaus, so tritt der Dampf auf der entgegengesetzten Seite in den Cylinder und es erfolgt eine entgegengesetzte Bewegung.

7. **Regulator.** Die Röhre, welche den Dampf aus dem Kessel in die Cylinder leitet, hat einen Schieber, durch welchen der Querschnitt der Röhre an dieser Stelle erweitert oder verengt, der Dampfzufluß zur Maschine also vermehrt oder vermindert werden kann.

8. **Speisung des Kessels.** Die beiden Speisepumpen, welche dem Kessel das Wasser aus dem Tender (Wagen für Vorrat von Wasser und Brennstoff) zuführen, liegen unter dem Kessel und werden entweder durch

excentrische Scheiben, welche auf einer Wagenachse ruhen, oder durch Anhängen an die Kolbenstange der Dampfmaschine bewegt. In neuester Zeit werden die Kessel meistens mit Injekteurs gespeist.

V. Widerstände der Lokomotive während der Bewegung.

1. **Reibung.** Die rollende Reibung der Räder auf der Bahn, sowie die Reibung der Achsen und der Maschinenteile der Lokomotiven sind von der Geschwindigkeit unabhängig und betragen annähernd per Tonne Gewicht:

für die Lokomotive . . . . 7,5 kg,
für die Wagen und den Tender . . . . . 2,5 „

2. **Erschütterungen.** Durch das Rollen der Räder über die Schienen, namentlich über die Schienenstöße, entstehen Erschütterungen in den Wagen. Der dadurch veranlaßte Widerstand, sowie derjenige, welcher durch das Hin- und Herschlängeln der Wagen zwischen den Bahnschienen entsteht, ist der Geschwindigkeit proportional und beträgt annähernd per Tonne Gewicht:

für die Lokomotive . . . . 0,55 v kg,
für die Wagen und den Tender . . . . 0,07 v „

3. **Luftwiderstand.** Derselbe ist dem größten Querschnitt eines Wagens, der Anzahl Wagen und dem Quadrat der Fahrgeschwindigkeit proportional und beträgt für jeden Quadratmeter Querschnitt annähernd:

der Lokomotive. . . . . $0{,}072\,v^2$ kg,
der Wagen samt Tender . . . . $0{,}25 \cdot 0{,}072\,v^2$ „

4. **Widerstand bei Steigungen.** Die Kraft, welche erfordert wird, um eine Last über eine schiefe Ebene hinaufzuziehen, verhält sich zur Last, wie die Höhe der schiefen Ebene zur Länge derselben. Steigt die Bahn 1 auf 1000, so erfordert jede Tonne Last 1 kg Zugkraft.

Beispiel. Ein Wagenzug bestehe aus 15 Wagen zu 8 Tonnen Gewicht und zu 6 qm Querschnitt. Die Lokomotive habe ebenfalls 6 qm Querschnitt und samt dem Wasserinhalt 20 Tonnen Gewicht. Wie groß ist der totale Widerstand auf einer geradlinigen Bahn, welche 3 auf 1000 steigt, bei 10 m Geschwindigkeit?

Die Widerstände ohne Rücksicht auf die Steigung betragen:
für die Lokomotive (20 Tonnen):

Reibung . . . . $7{,}5 \cdot 20 = 150$ kg,
Erschütterungen ꝛc. . . . . . $0{,}55 \cdot 10 \cdot 20 = 110$ „
Luftwiderstand . . . . $0{,}072 \cdot 6 \cdot 10^2 = 43$ „

für die Wagen (15 zu 8 Tonnen):

Reibung . . . . $2{,}5 \cdot 120 = 300$ „
Erschütterungen ꝛc. . . . . $0{,}07 \cdot 10 \cdot 120 = 84$ „
Luftwiderstand . . $0{,}25 \cdot 0{,}072 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 10^2 = 162$ „

849 kg.

Daher Widerstand per Tonne	. . . . 849 : 140 =	6,06 kg.
Widerstand durch die Steigung für Lokomotive und Wagen, also für 140 Tonnen zu 3 kg	. 3 . 140 =	420 „

Hiernach ist der Widerstand, ohne Steigung, per 1 Tonne Gewicht: für die Lokomotive 15,15, für die Wagen 4,55 und für beide 6,06 kg.

5. **Summarische Angaben über den Widerstand.** Nach Morin kann man den Widerstand auf waagrechter, geradliniger Bahn per Tonne Gewicht annehmen:

bei Warenzügen . .	4,5 kg,	bei Personenzügen	5,8 kg,
„ gemischten Zügen	4,7 „	„ Schnellzügen .	10 „

Bezeichnet man einen dieser Werte mit c, das Gewicht der Lokomotive mit L, das der angehängten Wagen mit G (beides in Tonnen) und den Neigungswinkel der Bahn zum Horizont mit α, so ist nach (4)

$$900\,Pf = (G + L)\,c + 1000\,(G + L)\sin\alpha.$$

Beispiel. Welche Steigung kann man noch befahren, wenn $P = L$; $G = 3P$; $f = 0{,}14$ und $c = 8$ kg angenommen werden?

Man erhält mittelst vorstehender Gleichung

$$\sin a = \frac{900\,Pf - (G + L)\,c}{1000\,(G + L)} = \frac{900 \,.\, 0{,}14 - 4 \,.\, 8}{1000 \,.\, 4} = 0{,}0235.$$

Mithin kann die Bahn höchstens 2,35 Prozent Steigung haben.

6. **Widerstand in Krümmungen.** Derselbe beträgt nach Forquenot per Tonne Gewicht des Zuges:

a) bei einem Zug von 40 Wagen und 7 m Geschwindigkeit:

Krümmungshalbmesser . .	1000	500	300 m,
Widerstand	0,35	1,40	3,90 kg,

b) bei einem Zug von 12 Wagen und 14 m Geschwindigkeit:

Krümmungshalbmesser . .	1000	500	300 m,
Widerstand	0,40	1,50	4,10 kg.

VI. Verschiedene Angaben.

1. **Gewicht der verschiedenen Materialien einer Lokomotive.** Das Verhältnis der Gewichte der Materialien ist bedingt durch die Bauart. Für eine Lokomotive von 20 Tonnen kann man im Durchschnitt annehmen:

	Wagen.	Maschine.	Kessel.	Total.
Gußeisen . . .	1240	2460	45	3745 kg,
Schmiedeeisen .	4950	990	1700	7640 „
Blech	1350	—	3000	4350 „
Stahl	450	155	15	620 „
Kupfer	—	125	800	925 „
Messing . . .	6	4	1450	1460 „
Bronze	80	410	260	750 „
Verschiedenes . .	350	20	140	510 „
Zusammen . .	8426	4164	7410	20000 kg.

2. **Wasser- und Brennstoffvorrat.** Der Tender soll so viel Vorräte an Wasser und Brennstoff enthalten, daß dieselben für einen Weg von wenigstens 25 und höchstens 40 km ausreichen.

Verdampft eine Lokomotive 1,5 kg Wasser per Sekunde und soll sie eine Fahrt von 40 km machen mit 10 m Geschwindigkeit, so braucht sie hierzu 4000 Sekunden Zeit, also 4000 . 1,5 = 6000 kg Wasser. Dies ist auch in der That der Wassergehalt der Tender großer Lokomotiven.

Wenn 1 kg Steinkohlen 5,8 kg Dampf produziert, so sind zu dieser Fahrt 6000 : 5,8 = 1035 kg Steinkohlen nötig und nach (S. 349) ein Raum von 1035 : 830 = 1,25 kbm.

3. **Dauer einer Lokomotive.** Diese Dauer hängt wesentlich ab von der Fahrgeschwindigkeit, von der Konstruktion der Maschine und der Solidität des Oberbaues. Sie hält um so länger aus, je ruhiger ihr Gang ist. Daher sollen folgende Erscheinungen vermieden werden: das Zucken zu beiden Seiten der Lokomotive, veranlaßt durch die hin und her gehenden Massen; das Schlingern oder das Hin- und Hergehen des Wagens zwischen den Schienen; das Nicken oder das Sinken und Steigen der hintern und vordern Teile des Kessels; das Wanken oder das Sinken und Steigen der aufgehängten Teile auf der rechten und linken Seite des Wagens und das Wogen oder das periodische Heben und Senken des Schwerpunktes der ganzen Lokomotive. Nachdem diese bei normalen Verhältnissen 400000 km zurückgelegt hat, soll sie umgearbeitet werden. Dies gilt namentlich von denjenigen Teilen, deren Arbeitsvermögen (S. 169) sich durch heftige Spannungswechsel erschöpft.

4. **Krümmung der Bahn.** Je kleiner der Krümmungshalbmesser der Bahn ist, um so langsamer muß die Bahn wegen der sich entwickelnden Centrifugalkraft befahren werden. Wegen dieser Kraft werden die äußern Schienen um 2 bis 6 cm höher gelegt als die innern.

5. **Steigungen.** Es können Steigungen überwunden werden: mit gewöhnlichen Adhäsionsmaschinen bis auf 1 : 36; mit Engerth-Maschinen bis auf 1 : 30; mit Fairlie-Maschinen (bei welchen der Druck der Wagen teilweise auf die Lokomotive übertragen wird) bis auf 1 : 25; nach dem System Fell (durch zwei Triebräder mit vertikaler Achse, welche gegen eine Mittelschiene drücken) bis auf 1 : 15. Ebenfalls große Steigungen können überwunden werden mit dem System Agudio mittelst festem Seil, das um ein liegendes Treibrad der Lokomotive gelegt ist; beim Seilzug durch eine fixe Maschine und besonders beim System Chapman mittelst Zahnstange. Die Rigibahn, von Riggenbach erbaut, hat eine Zahnstange mit aufrechtem Zahnrad und eine größte Steigung von 1 : 4.

6. **Schienen.** Sie sind 4,5 bis 6 m lang und haben per laufenden Meter ein Gewicht von 15 bis 40 kg. Sie werden in Abständen von 0,8 bis 1,2 m unterstützt und um $^1/_{20}$ ihrer Höhe gegen die Mittellinie der Bahn hin geneigt. Wenn ein Rad über die Schiene geht, so erhält dieselbe zwei verschiedene Senkungen; eine lokale unmittelbar unter der Berührungsstelle des Rades, an welcher nur die obersten dieser Stelle zunächst gelegenen Fasern Anteil nehmen und eine Senkung zwischen den benachbarten Stützen. Je größer beide Senkungen werden, um so bälder wird die Schiene unbrauchbar.

Daten über Lokomotiven der Lokomotivfabrik Krauß & Co. in München.

Cylinderdurchmesser	m	0,10	0,14	0,16	0,18	0,20	0,225	0,26	0,28	0,30	0,32
Kolbenhub	"	0,16	0,30	0,30	0,30	0,30	0,40	0,40	0,50	0,50	0,54
Raddurchmesser	"	0,39	0,58	0,58	0,58	0,65	0,80	0,80	0,91	0,97	0,97
Achsenstand	"	0,90	1,10	1,10	1,10	1,70	1,70	1,70	2,00	2,10	2,45
Spurweite	"	0,90	1,10	1,10	1,10	norm.	norm.	norm.	norm.	norm.	norm.
Heizfläche	qm	5,92	10,22	15,22	18,01	23,48	28,93	35,00	48,25	54,00	85,30
Rostfläche	"	0,11	0,218	0,25	0,35	0,35	0,43	0,525	0,53	0,85	1,00
Dampfdruck, höchster	Atm.	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
Raum für Kohlen	kbm	0,165	0,245	0,300	0,330	0,550	0,550	0,800	1,190	1,300	1,500
Raum für Speisewasser	"	0,390	0,800	1,180	1,180	1,890	2,300	2,300	2,300	3,450	4,000
Gewicht der Lokomotive im Dienst	Ton.	3,30	5,70	7,20	8,00	11,80	13,70	15,00	20,00	22,00	26,00
Anzahl Pferde der Maschine		7	20	30	40	50	60	80	120	150	250
Effektive Zugkraft	kg	245	610	790	900	1200	1520	2030	2570	2780	3420
Befördernde Last, 2,5% Steigung	Ton.	4,5	14	18	23	29	35	51	63	68	85
" " horizontal	"	43	112	145	168	242	282	380	480	520	640
Dieser Leistung entspr. Geschw.,	Kilom. p. St.	12	12	12	12	12	12	12	15	15	20
Kleinster Kurvenradius	m	5	20	20	20	30	40	40	50	60	100
Größte Höhe	"	2,30	2,70	2,76	2,85	3,10	3,17	3,50	3,55	3,87	4,15
Größte Länge	"	3,30	4,10	4,10	2,29	5,30	5,80	6,10	7,10	7,02	7,51
Größte Breite bei größter Spurweite	"	1,30	1,00	1,90	1,95	2,20	2,30	2,40	2,50	2,80	2,90

Hauptdimensionen der Lokomotiven.

(Nach Armengaud und Barrault.)

A von der Gesellschaft Nordbahn, B von Derosne und Cail.		Gemischte Züge. A	Güterzüge. B	Personenzüge. B
Dampfapparat.				
Rostfläche	qm	1,048	0,845	1,418
Anzahl Sieveröhren	„	125	125	178
Innerer Durchmesser derselben	m	0,046	0,045	0,047
Wanddicke der Röhren	„	0,002	0,002	0,002
Oberfläche der Sieveröhren	qm	68,10	66,50	94,96
„ „ Feuerbüchse	„	6,25	5,01	7,37
Totale Heizfläche	„	74,35	71,51	102,3
Durchmesser des cylindrischen Kessels	m	0,95	0,95	1,20
Länge desselben	„	3,35	3,68	3,55
Volum Wasser im Kessel	kbm	2,427	2,228	2,779
„ Dampf „ „	„	1,469	1,167	0,615
Innere Länge des Rauchkastens	m	0,665	0,849	0,675
Breite und Höhe	„	1,188	1,128	1,200
Durchmesser des Schornsteins	„	0,328	0,328	0,400
Höhe des Schornsteins üb. d. Rauchkasten	„	1,710	1,815	1,950
Kolbendurchmesser der Speisepumpe	„	0,060	0,105	0,064
Hub der Speisepumpe	„	0,560	0,116	0,550
Größter Querschnitt des Regulators	qm	0,011	0,012	0,013
Mechanismus.				
Voreilen des Schiebers in Graden		30°	30°	15°
Lineares Voreilen beim Einströmen	m	0,004	0,004	0,004
Dasselbe beim Ausströmen	„	0,026	0,026	0,032
Innere Ueberdeckung des Schiebers	„	0,001	0,001	0,007
Aeußere Ueberdeckung	„	0,025	0,024	0,028
Füllung im Maximum	„	0,80	0,80	0,80
„ „ Minimum	„	0,25	0,25	0,25
Halbmesser der Schieber-Excenter	„	0,058	0,058	0,092
Zulaßöffnung unter dem Schieber: Länge	„	0,250	0,250	0,300
Zulaßöffnung unter dem Schieber: Breite	„	0,040	0,040	0,050
Auslaßöffnung: Länge	„	0,250	0,250	0,300
Auslaßöffnung: Breite	„	0,075	0,076	0,090
Schieber: Länge	„	0,245	0,244	0,286
Schieber: Breite	„	0,310	0,312	0,360
Abstand der Cylinder von Mitte zu Mitte	„	1,880	2,076	1,850
Neigung der Cylinder zum Horizont		0°	0°	0°
Durchmesser der Cylinder	m	0,380	0,380	0,490

A von der Gesellschaft Nordbahn, B von Derosne und Cail.			Gemischte Züge. A	Güterzüge. B	Personenzüge. B
Ganze innere Länge der Cylinder		m	0,720	0,742	0,682
Kolbenhub		"	0,560	0,610	0,550
Länge der Schubstange		"	1,825	1,470	2,310
Wagen.					
Abstand der Rahmenbalken		"	1,223	1,223	1,350
Höhe der Rahmen		"	0,200	0,200	0,220
" " Puffermitten über den Schienen		"	0,955	0,955	0,950
Entfernung derselben von einander		"	1,727	1,727	1,727
Federn der vordern Achse	Länge	"	0,950	0,950	0,966
	Breite	"	0,090	0,090	0,100
	Höhe in der Mitte	"	0,174	0,158	0,150
	Pfeil, belastet	"	0,083	0,076	0,172
Federn der mittlern Achse	Länge	"	0,950	0,950	0,966
	Breite	"	0,090	0,090	0,100
	Höhe in der Mitte	"	0,158	0,140	0,115
	Pfeil, belastet	"	0,054	0,080	0,115
Federn der hintern Achse	Länge	"	0,950	0,950	0,966
	Breite	"	0,090	0,090	0,100
	Höhe in der Mitte	"	0,132	0,158	0,150
	Pfeil, belastet	"	0,080	0,080	0,172
Durchmesser der Räder	der mittlern Achse	"	1,740	1,220	1,220
	der hintern "	"	1,740	1,220	2,100
	der vordern "	"	1,040	1,220	1,350
Mittlere Achse	Durchm. d. Zapfens	"	0,160	0,160	0,180
	Länge des Zapfens	"	0,150	0,150	0,250
	Durchm. d. Radkopfs	"	0,180	0,180	0,190
	Dicke in der Mitte	"	0,160	0,155	0,150
Innerer Abstand der Räder		"	1,355	1,355	1,355
Spurweite (innerer Abstand der Schienen)		"	1,440	1,440	1,440
Abstand der äußern Achsen		"	4,420	2,935	4,860
Abstand der Vorder- von der Mittelachse		"	2,200	1,585	2,300
Breite der Radkränze		"	0,140	0,140	0,140
Konicität derselben		"	$^1/_{20}$	$^1/_{20}$	$^1/_{20}$
Gewichte.			Tonnen.	Tonnen.	Tonnen.
Gewicht der Lokomotive ohne Wasserfüllung			21,71	20,07	24,20
" " " mit "			24,40	22,30	27,32
Wassergehalt des Tenders			5,783	5,783	6,390
Gewicht der Koks			1,750	1,750	1,225
Gewicht des leeren Tenders, ausgerüstet			7,366	7,366	9,951
Gewicht des beladenen Tenders			14,90	14,90	17,57

88. Von den Dampfschiffen.

1. **Form der Schiffe.** Legt man durch das Schiff horizontale Durchschnittsebenen, so schneiden sie die Oberfläche des Schiffes längs krummer Linien, welche Wasserlinien genannt werden. Legt man Querschnittsebenen senkrecht auf die Längenachse des Schiffes, so schneiden diese die Schiffsoberfläche längs krummer Linien, welche man Spanten nennt.

Bei der Feststellung der Schiffsform müssen etwa 6 Wasserlinien in gleichen Abständen und etwa 12 Spanten in gleichen Abständen bestimmt werden, aus deren Zusammenstellung sich die Schiffsform ergibt. Die Hauptverhältnisse eines Schiffes beziehen sich auf seine Länge, Breite, Höhe und den Tiefgang.

Die Länge beträgt gewöhnlich: bei Meerschiffen das 6- bis 8fache, bei Landseeschiffen das 8- bis 10fache und bei Flußschiffen das 12- bis 18fache der Breite; ebenso ist durchschnittlich die Höhe des Schiffes (vom Kiele bis zum Verdeck): bei Meerschiffen 0,6, bei Landseeschiffen 0,5 und bei Flußschiffen 0,4 von der Breite.

Die Tauchung (Höhe des Wasserspiegels über der tiefsten Stelle des Schiffes) hängt bei Flußschiffen von der Wassertiefe des Flusses, bei Landsee- und Meerschiffen von der Tiefe der Landungsstellen ab. Die größte Tauchung eines Meerschiffes beträgt 8 m. Von diesem Tiefgang hängt wesentlich die Höhe des Schiffes ab. Es soll nämlich das Schiff genügend über das Wasser hervortreten, um gegen die Ueberflutung durch Wellen gesichert zu sein; allein ein zu starkes Hervortreten aus dem Wasser vermindert die Stabilität des Schiffes.

2. **Tragfähigkeit eines Schiffes.** Jedes Schiff wird im Wasser so tief eintauchen, daß das verdrängte Wasserquantum an Gewicht demjenigen des ganzen Schiffes gleichkommt. Um im voraus berechnen zu können, wie tief ein Schiff geht, muß man das Gewicht des ganzen Schiffes mit allen seinen Teilen, sowie ganz genau die äußere Gestalt des untern Schiffsteiles kennen. Dies geschieht, indem man die Länge des Schiffes in eine gerade Anzahl gleicher Teile teilt, die verschiedenen durch die Teilungspunkte gezogenen Querdurchschnitte aufmißt, die Flächeninhalte derselben bis zu einem gewissen Tiefgange berechnet und darauf die Simpson'sche Regel (S. 32) anwendet.

Beisp. Es sei die Wassermenge zu berechnen, welche ein Schiff von 54 m Länge versetzt, wenn es 1 m tief geht. Die Länge des Schiffes sei in 12 gleiche Teile geteilt, und die Flächeninhalte der dadurch erhaltenen Querschnitte, bis auf diesen Tiefgang gerechnet, seien:

A = 0	F = 5,89 qm	K = 6,45 qm
B = 1,12 qm	G = 6,31 „	L = 6,38 „
C = 2,77 „	H = 6,93 „	M = 5,56 „
D = 4,29 „	I = 6,64 „	N = 0.
E = 5,34 „		

Da die Entfernung zwischen je zwei Querschnitten 54 : 12 = 4,5 m beträgt, so ist der Inhalt des versetzten Wassers bei 1 m Tiefgang

$$\frac{1}{3} \cdot 4{,}5 \,[0 + 2 \cdot (2{,}77 + 5{,}34 + 6{,}31 + 6{,}64 + 6{,}38)$$
$$+ 4\,(1{,}12 + 4{,}29 + 5{,}89 + 6{,}93 + 6{,}45 + 5{,}56)] = 263{,}76 \text{ kbm}.$$

Daher das Gewicht des verdrängten Wassers = 263,76 Tonnen.

Um die Wasserversetzung dieses Schiffes für einen größern Tiefgang zu bestimmen, kann man entweder alle Querschnitte von neuem auf dieselbe Weise, oder hingegen bloß die Flächeninhalte einiger der ganzen Länge des Schiffes nach gezogener Horizontalschnitte berechnen. Ist z. B. der Flächeninhalt des Horizontalschnittes bei 1 m Tiefgang = 345 qm, derjenige bei 1,2 m Tiefgang = 357 qm und der bei 1,4 m Tiefgang = 366 qm, so werden die zwischen den Horizontalschnitten von 1 m und 1,2 m und von 1 m und 1,4 m Tiefgang enthaltenen Inhalte annähernd sein

$$0{,}2 \cdot \frac{345 + 357}{2} = 70{,}2 \text{ kbm}; \quad 0{,}2 \cdot \frac{345 + 2 \,.\, 357 + 366}{2} = 142{,}5 \text{ kbm}.$$

Daher die totale Wasserversetzung

auf 1,2 m Tiefgang . . 263,76 + 70,2 = 333,96 kbm,
auf 1,4 m Tiefgang . . 263,76 + 142,5 = 406,26 „

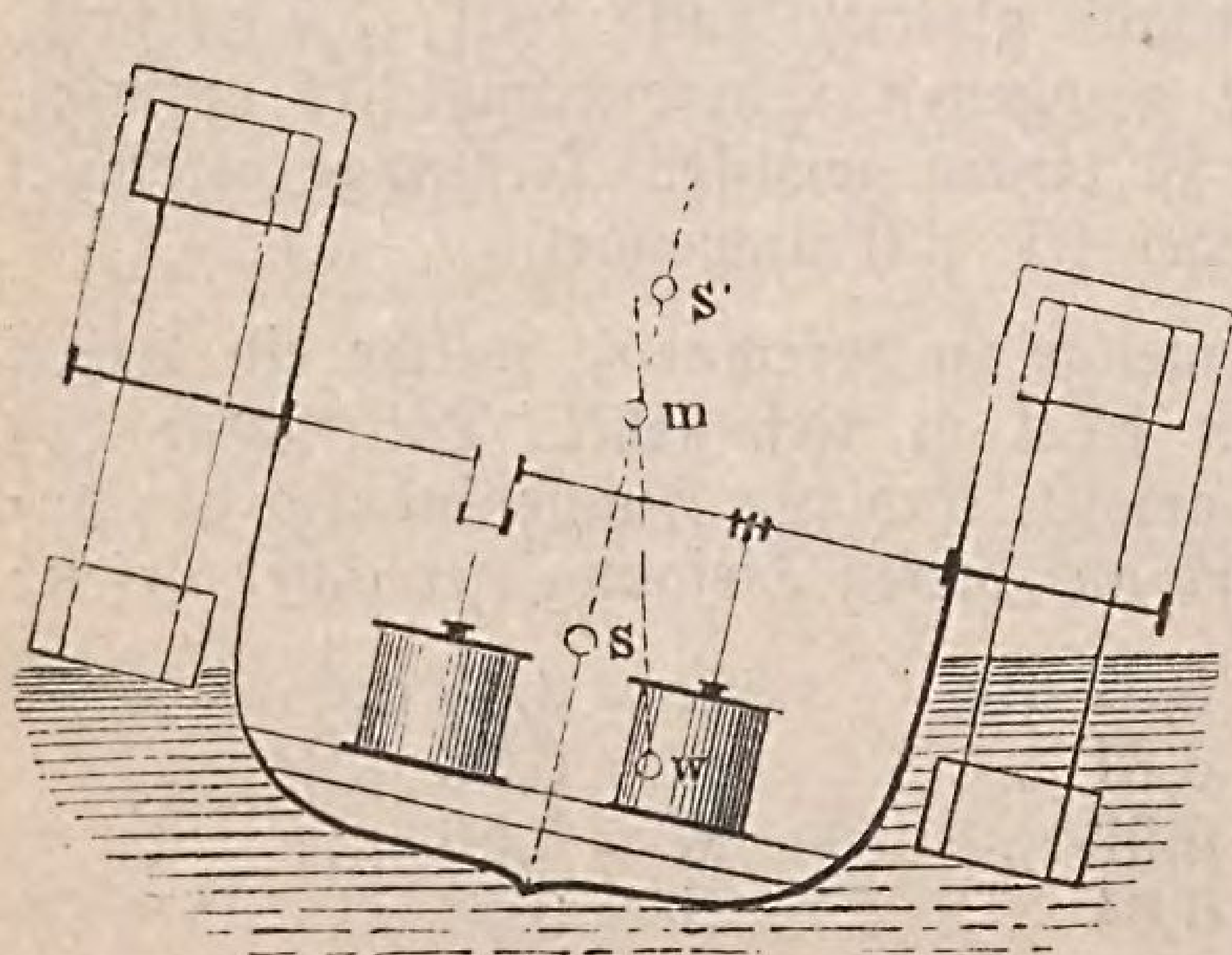
Ferner wird das Gewicht sein, welches den Tiefgang des Schiffes um 1 cm vergrößert:

bei 1,0 m Tiefgang = 345 . 1000 . 0,01 = 3450 kg,
„ 1,2 „ „ = 357 . 1000 . 0,01 = 3570 „
„ 1,4 „ „ = 366 . 1000 . 0,01 = 3660 „

Dieses Schiff gehe leer 1 m tief. Wie tief wird es gehen, wenn es mit 18 Tonnen Gütern beladen wird?

Es sind 18 Tonnen = 18000 kg. Bei diesem Tiefgang sinkt das Schiff mit cirka 3450 kg um 1 cm, folglich mit 18000 kg um 5,22 cm. Es wird daher das Schiff beladen einen Tiefgang von 1,0522 m haben.

3. **Stabilität des Schiffes.** Das Schiff schwimmt in Bezug auf seine Längenrichtung mit Sicherheit, wenn der Schwerpunkt des Schiffes und der Schwerpunkt des verdrängten Wassers im gleichen Querschnitt liegen. Die Stabilität der Querrichtung unterliegt folgender Bedingung. Es sei s s′ die Vertikalachse des Querschnittes, welcher den Schwerpunkt s des Schiffes enthält; w der Schwerpunkt des verdrängten Wassers. Die Vertikale w m schneide die Achse in einem Punkte m, welcher M e t a c e n t r u m genannt wird. Wenn das Meta-



centrum über dem Schwerpunkt des Schiffes liegt, so schwimmt das Schiff mit Stabilität, d. h. es kehrt aus der schiefen Lage in die vertikale zurück. Wenn aber bei einer gewissen Neigung des Schiffes dessen Schwerpunkt über das Metacentrum zu liegen kommt, etwa nach s', so muß das Schiff umwerfen. Je niedriger der Schwerpunkt s des Schiffes liegt, desto eher wird das Metacentrum über ihm liegen und desto mehr wird das Schiff getrieben, aus einer schiefen Stellung in die aufrechte zurückzukommen. Man sucht deshalb immer den Schwerpunkt des beladenen Schiffes möglichst tief zu bringen und bewerkstelligt solches bei geringer Ladung durch Einsetzen von Ballast.

4. **Geschwindigkeit des Schiffes.** Die meisten Schiffe bewegen sich im ruhigen Wasser mit 3 m bis 6 m Geschwindigkeit per Sekunde. Eine Geschwindigkeit von 7 m muß schon als eine große angesehen werden. Es sind diese Geschwindigkeiten:

per Sekunde	3	4	5	6	7	Meter,
per Stunde	10,3	14,4	18,0	21,6	25,2	Kilometer
oder auch	6,71	8,95	11,18	13,42	15,65	engl. Meilen.

5. **Widerstand des Schiffes im ruhigen Wasser.** Dieser Widerstand ist proportional dem eingetauchten Teil des größten Querschnittes (Meisterspanne) des Schiffes, sowie dem Quadrat der Geschwindigkeit des Schiffes. Bezeichnet deshalb

S den eingetauchten größten Schiffsquerschnitt in Quadratmetern,
V die Geschwindigkeit des Schiffes in Metern und
K den Widerstand, welchen ein Schiff von 1 qm eingetauchtem Querschnitt bei einer Geschwindigkeit von 1 m findet, so ist der Schiffswiderstand, S. 266

$$R = K S V^2. \tag{1}$$

Wenn zwei Schiffe gleichen Querschnitt haben, es ist aber das eine länger als das andere, so ist auch die benetzte Oberfläche, also die Reibung des Wassers beim längern größer als beim kürzern. Daher kommt es, daß der Widerstand K für Flußschiffe und Landseeschiffe größer ist als für Meerschiffe. Nach Redtenbacher wird daher

$$K = 0{,}309 \left(\frac{2}{3}\frac{L}{T} + 2\frac{L}{B}\right), \tag{2}$$

worin L die Länge, B die Breite und T die Tauchung bezeichnet. Allein nach andern sind die Werte, welche diese Formel gibt, etwas zu groß. Für 0,25 statt 0,309 erhält man bei mittleren Verhältnissen:

	für Meer-,	Landsee-,	Flußschiffe:
Wenn die Länge des Schiffes	= 100	60	50 m,
„ die Breite „ „	= 16	7	3,8 „
„ der Tiefgang „	= 7	2,5	1,0 „
so wird der Koefficient . K	= 5,6	8,3	14,9 kg.

6. **Widerstand des Schiffes im bewegten Wasser.** Es sei

v die Geschwindigkeit des Wassers im Flußbett,
e die Senkung des Flusses per Längeneinheit und
Q das Gewicht des Schiffes, so ist in Formel (1) die Größe V zu

ersetzen durch die relative Geschwindigkeit $V \mp v$, wo das untere Zeichen zu nehmen ist für die Fahrt aufwärts, das obere für die Fahrt abwärts. Sodann wird noch die Größe Qe zu einer Kraft, parallel zur schiefen Ebene (S. 106), welche bei der Fahrt abwärts treibend, bei der aufwärts hemmend wirkt. Daher der Schiffswiderstand

$$(3) \qquad R = KS\,(V \mp v)^2 \mp Qe.$$

7. **Arbeit zum Fortschaffen des Schiffes.** Diese Arbeit A per Sekunde wird erhalten, wenn man den Schiffswiderstand mit der Geschwindigkeit V des Schiffes multipliziert. Somit ist im ruhigen Wasser

$$(4) \qquad A = KSV^3 \text{ mkg}.$$

Die Arbeit zur Fortschaffung des Schiffes wächst hiernach mit der dritten Potenz der Geschwindigkeit. Hat ein Dampfschiff z. B. bei einer Geschwindigkeit von 1 m eine Arbeit von 10 Pferden nötig, so ist diese Arbeit für 5 m Geschwindigkeit 5 . 5 . 5 oder 125mal größer, also 1250 Pferde.

Ein Schiff bewege sich mit gleicher Geschwindigkeit auf einem Flusse auf und ab und es werde die Größe Qe als klein nicht in Betracht gezogen, so sind die bezüglichen Arbeiten $KS\,(V + v)^3$ und $KS\,(V - v)^3$ welche sich zu einander verhalten wie

$$(V + v)^3 : (V - v)^3.$$

Soll z. B. die Schiffsgeschwindigkeit 4 m per Sekunde haben, so verhält sich die erforderliche Arbeit im ruhigen Wasser, gegen den Strom und mit dem Strom, wenn dessen Geschwindigkeit = 2 m ist, wie

$$4^3 : (4 + 2)^3 : (4 - 2)^3 = 8 : 27 : 1.$$

8. **Arbeit zum Durchlaufen einer Strecke mit verschiedener Geschwindigkeit.** Die Strecke werde das eine Mal durchlaufen mit der Geschwindigkeit V in t Sekunden, das andere Mal mit der Geschwindigkeit V′ in t′ Sekunden, so sind die hierzu erforderlichen Arbeiten im ruhigen Wasser für die ganzen Fahrten $= tKSV^3$ und $= t'KSV'^3$. Diese verhalten sich wie $V^2 . Vt : V'^2 . V't'$. Da aber $Vt = V't'$ als durchlaufener Weg, so verhalten sich die Arbeiten wie

$$V^2 : V'^2.$$

Nach diesem Verhältnis richtet sich auch der Verbrauch an Kohlen.

9. **Zurückweichen des Wassers.** Das Schiff wird vorwärts getrieben, indem eine eingetauchte Fläche (Schaufeln der Räder, Flügel der Schraube) in entgegengesetzter Richtung Wasser zurückdrängt. Dabei ist bei gleichförmigem Gang des Schiffes der Druck rückwärts gleich dem Druck vorwärts. Bezeichnet

V_1 die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser zurückweicht,
S_1 die Summe der Flächen, welche Wasser zurückdrängen, senkrecht auf die Richtung der Bewegung gedacht,

K_1 den Widerstand, welchen eine Fläche von 1 qm bei einer Geschwindigkeit $V_1 = 1$ m findet, so ist der Druck rückwärts $= K_1 S_1 V_1^2$. Setzt man diesen Druck gleich dem Schiffswiderstand $K S V^2$, so folgt

$$(5) \qquad \frac{V_1}{V} = \sqrt{\frac{K S}{K_1 S_1}}.$$

10. **Die Schaufelräder als Treibapparat.** In (5) bezeichnet S_1 die Summe aus zwei einander gegenüberliegenden Schaufelflächen, welche vertikal eintauchen, und V_1 die Geschwindigkeit des Wassers, welches vom Schwerpunkt dieser Flächen getroffen wird. Das Rad selbst hat dann die mittlere Umfangsgeschwindigkeit $V + V_1$.

a) Schaufelfläche und Radgeschwindigkeit. Aus (3) ergeben sich folgende entsprechende Werte, wenn $K_1 = 125$ angenommen wird (S. 266)

	K	$\frac{S_1}{S}$	$\frac{V_1}{V}$
für Meerschiffe . .	5,6	0,24	0,43
„ Landseeschiffe .	8,3	0,32	0,46
„ Flußschiffe . .	14,9	0,48	0,50

Die Schaufeln sollen nie so weit eintauchen, daß die Geschwindigkeit des inneren Umkreises geringer wird als die Geschwindigkeit des Schiffes.

b) Anzahl Umdrehungen der Räder. Es sei D der mittlere Durchmesser der Räder und n die Anzahl Touren derselben per Minute, so ist der Weg einer Schaufel per Minute $D \pi n = 60 (V + V_1)$; mithin

$$(6) \qquad n = 60 \cdot \frac{V + V_1}{D \pi}.$$

c) Kraft der Dampfmaschine für Schaufelräder. Der Druck, womit die Radschaufeln gegen das Wasser wirken, ist gleich dem Schiffswiderstand $K S V^2$. Dieser Druck, von der Dampfmaschine ausgehend, legt am mittlern Umfang der Räder per Sekunde den Weg $V + V_1$ zurück; also ist die Arbeit, welche die Maschine an die Räder übertragen muß $= K V^2 (V + V_1)$. Folglich das Verhältnis zwischen der Nettoarbeit (4) zu dieser Bruttoarbeit wie

$$V : V + V_1.$$

Bei Meerschiffen ist dieses Verhältnis wie 100 : 143. Vom Effekte der Maschine werden somit $^{100}/_{143}$ oder $^{70}/_{100}$ nützlich verbraucht, die übrigen $^{30}/_{100}$ gehen durch den Stoß der Schaufeln gegen das Wasser verloren. Es ist deshalb vorteilhaft, die Schaufelfläche groß und die Radgeschwindigkeit klein zu nehmen.

Nach diesen Annahmen soll für jeden Quadratmeter des eingetauchten Querschnittes die Dampfmaschine folgende Stärke haben:

bei Meerschiffen	2,9	6,8	13,3	23,1	36,6	Pferde.
bei Landseeschiffen . . .	4,4	10,4	21,2	35,0	55,4	„
bei Flußschiffen	8,0	19,0	37,0	64,0	102,2	„
für die Fahrgeschwindigkeiten	3	4	5	6	7	m.

Beisp. Wie groß ist die erforderliche Dampfkraft, um ein Landseeschiff mit einer Geschwindigkeit von 5 m per Sekunde zu bewegen, wenn sein eingetauchter Querschnitt 7 qm und zwei Radschaufeln 2,8 qm Fläche haben?

Es ist das Verhältnis (5) . . . . $\frac{V_1}{V} = \sqrt{\frac{8,3 \cdot 7}{125 \cdot 2,8}} = 0,408.$

Umfangsgeschwindigkeit der Räder $V + V_1 = 5 + 5 \cdot 0,408 = 7,04$ m.

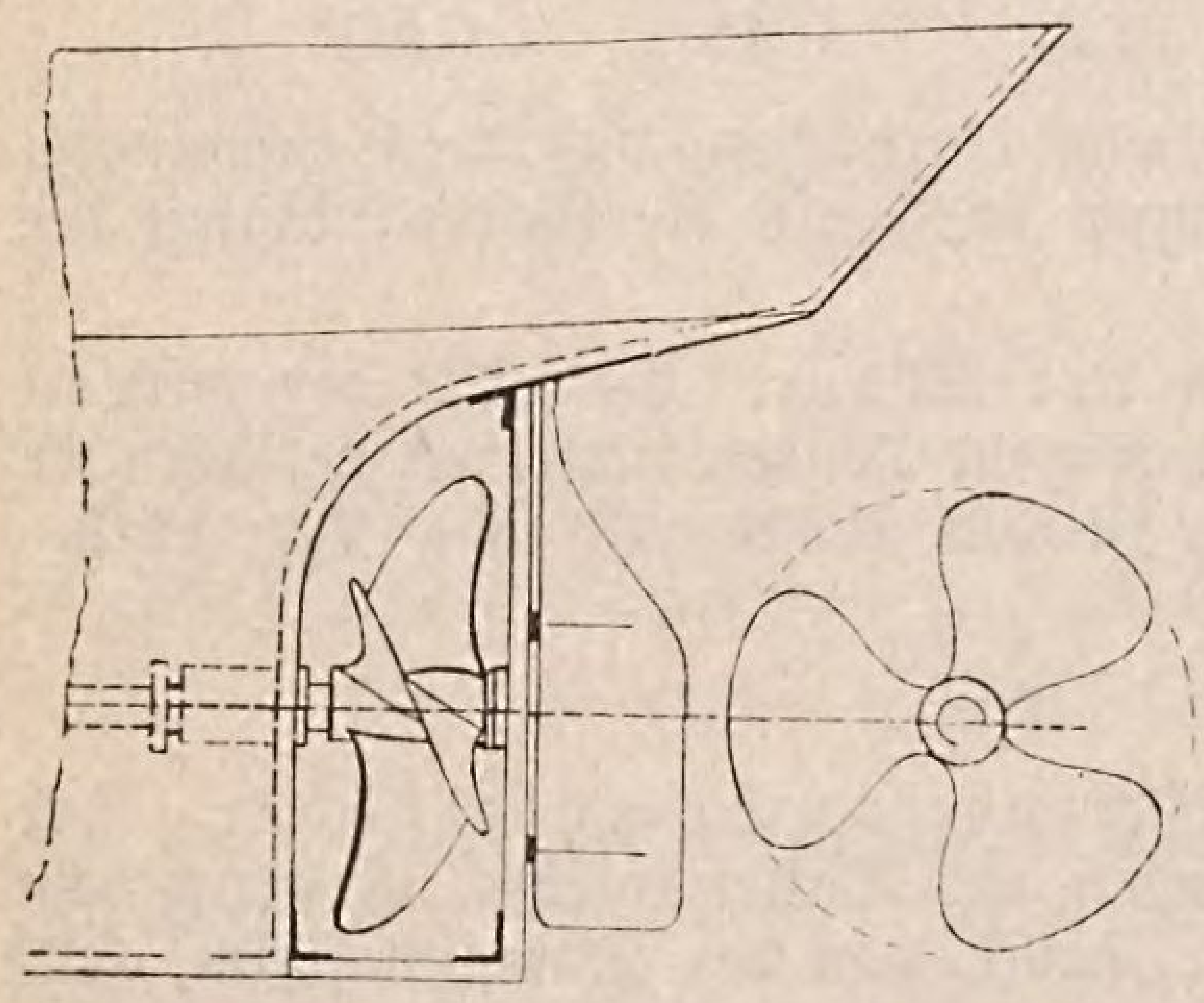
Bruttoarbeit der Dampfmaschine in Pferden $\frac{8,3 \cdot 7 \cdot 5^2 \cdot 7,04}{75} = 136,3.$

Verhältnis der Nettoarbeit zur Bruttoarbeit . . $5 : 7,04 = 0,71.$

Wenn der mittlere Durchm. des Rades angenommen wird = 4 m,

so ist die Anzahl Umdrehungen desselben . $n = \frac{60 \cdot 7,04}{4 \cdot 3,14} = 33,6.$

11. **Die Schraube als Treibapparat.** Die Schraube wird unter dem hintern Teile des Schiffes so angebracht, daß ihre Achse parallel zur Längenrichtung des Schiffes und ungefähr um den Halbmesser der Schraube über dem Kiele liegt. Diese Achse tritt durch die hintere Wand, vermittelst einer Stopfbüchse, in den Schiffsraum und wird durch eine Kurbelbewegung von der Dampfmaschine aus direkt gedreht, wenn die Anzahl Umdrehungen der Schraube per Minute klein ausfällt. Wird aber die Anzahl der Umdrehungen der Schraube groß, so ist zwischen der Kurbelwelle und der Schraubenachse eine Räderübersetzung anzubringen. Die Spindel ist mit zwei bis sechs Schraubenflächen in Gestalt von Flügeln versehen, welche zusammen in der Regel weniger als einen vollständigen Schraubengang bilden. Dieselben liegen nicht in ununterbrochener Folge, sondern sind neben einander gleichförmig um die Spindel herum verteilt. Dadurch wird die Schraube kürzer und liefert die gleiche Wirkung. Es bezeichne:



h die Höhe eines vollen Schraubenganges,

a den Winkel, welchen die Schraubenfläche an ihrem äußeren Rande mit einer zur Achse senkrechten Ebene bildet, in Graden,

V, V_1, S, S_1, K, K_1 das Bisherige; so erhält man folgende Regeln:

a) Steigung der Schraube. Das Verhältnis zwischen der Höhe eines Schraubenganges und dem Umfang der Schraube liegt zwischen 0,35 und 0,70, also der Winkel a zwischen 20 und 35 Graden. Hat eine Schraube 2 m Durchmesser, also 6,28 m Umfang und 4 m Ganghöhe, so ist

$$\tan a = 4 : 6,28 = 0,637; \quad a = 32,5^0.$$

b) Zurückweichen des Wassers. Die mittlere Geschwindig-

keit V_1, mit welcher das Wasser von der Schraube, in der Richtung der Schraubenachse, zurückgedrängt wird, kann nach Redtenbacher annähernd berechnet werden mittelst der Formel

$$(7) \qquad \frac{V_1}{V} = \sqrt{\frac{K}{K_1} \cdot \frac{S}{S_1(1 - 0{,}0154\,a)}},$$

worin S_1 die Projektion der Schraubenflächen auf einer Ebene bezeichnet, welche senkrecht zur Schraubenachse steht.

Der Wert von K_1 ist kleiner als für Schaufelräder. Man nimmt: für kleine Flügel $K_1 = 70$, für mittlere $K_1 = 90$ und für große $K_1 = 110$. Hieraus folgt, daß für gleiche Werte von S und S_1 für Räder und Schraubenschiffe, die Geschwindigkeit V_1 zu Ungunsten der Schraubenräder größer ausfällt.

c) Anzahl Umdrehungen der Schraube. Würde die Schraube im Wasser gedreht, ohne daß sie einen Widerstand zu überwinden hätte, so müßte sie im Wasser gerade so vorrücken wie eine gewöhnliche Schraube, welche in eine feste Masse eingedreht wird, nämlich bei jeder Umdrehung um den Weg h, also in der Minute um den Weg n h. Dieser Weg ist aber auch $60\,(V + V_1)$; folglich ergibt sich

$$(8) \qquad n = 60 \cdot \frac{V + V_1}{h}.$$

d) Leistung der Dampfmaschine. Die Kraft, womit der Schiffswiderstand überwunden werden kann, ist $K S V^2$ kg; dagegen der Arbeitsaufwand der Maschine in Pferden

$$(9) \qquad \frac{K S V^2 (V + V_1)}{75}.$$

Somit verhält sich die Bruttoarbeit zur nützlichen wie $V + V_1$ zu V. Damit aber der Verlust an Arbeit klein ausfällt, muß V_1, also auch die Steigung möglichst klein und der Querschnitt S_1 der Schraube im Verhältnis zum Querschnitt des Schiffes groß sein. Allein da die Schraube ganz eintauchen und ihr tiefster Punkt nicht unter den tiefsten Punkt des Schiffes kommen soll, so kann der Durchmesser der Schraube nicht größer als die Tauchung des beladenen Schiffes gemacht werden. Deshalb ist die Schraube nur bei tiefgehenden Schiffen, also insbesondere bei Meerschiffen zweckmäßig.

Beisp. Welche Dimensionen sind einer Schraube zu geben, die für ein Meerschiff bestimmt ist von 15 qm eingetauchtem Querschnitt und 3 m Tauchung, wenn die Geschwindigkeit des Schiffes höchstens 5 m sein soll?

Es sei der Durchmesser der Schraube . . . . $D = 2{,}90$ m.
Querschnitt S_1 für 0,8 von der Kreisfläche $0{,}25\,D^2\pi = 5{,}28$ qm.
Höhe des vollen Schraubenganges (angenommen) . $h = 4{,}0$.
Daher Steigung . . . . $\operatorname{tang} a = h : D\pi = 0{,}439$.
und mittelst der trigonometrischen Tabelle . . . $a = 23{,}7^\circ$.
Länge der Schraube längs der Achse für 0,8 einer
Windung und 3 Flügel . . . . . . $0{,}8 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 = 1{,}06$ m.

Wert der Widerstände, angenommen $K = 5{,}6$ und $K_1 = 90$.

Verhältnis . . . $\frac{V_1}{V} = \sqrt{\frac{5{,}6}{90} \cdot \frac{15}{5{,}28\,(1 - 0{,}0154 \,.\, 23{,}7)}} = 0{,}528$.

Geschwindigkeit des zurückweichenden Wassers $5 \,.\, 0{,}528 = 2{,}64$ m.

Anzahl Pferde der Maschine (9) . $\frac{5{,}6 \,.\, 15 \,.\, 5^2\,(5 + 2{,}64)}{75} = 214$.

Verhältnis der nützlichen und totalen Arbeit $\frac{5}{5 + 2{,}64} = 0{,}654$.

Anzahl Umdrehungen per Minute (8) $n = 60 \cdot \frac{5 + 2{,}64}{4} = 114{,}6$.

12. **Gewicht der Maschine.** Das Gewicht der Maschine samt Welle, Schaufelrädern oder Schraube, Kessel mit Wasser und allen zugehörenden Teilen beträgt annähernd per Pferd 800 kg für Hochdruck und 1200 kg für Niederdruck.

13. **Geometrisch ähnliche Schiffe.** Zwei Schiffe seien genau geometrisch ähnlich und es verhalten sich die linearen Dimensionen z. B. wie 1 : 2, so werden ähnliche Flächen sich verhalten wie 1 : 4 und die Inhalte ähnlicher Körperteile wie 1 : 8. Die von den Schiffen verdrängten Wassermengen sind ähnliche Körper: ihre Gewichte verhalten sich wie 1 : 8; die Tauchung des größeren Schiffes ist 2mal größer als die des kleinern.

Da die eingetauchten Querschnitte S sich verhalten wie 1 : 4 und die Werte von K nach (2) gleich sind, so verhalten sich bei gleicher Geschwindigkeit der Fahrt die Schiffswiderstände wie 1 : 4. Würde K_1 für beide Schiffe gleich sein, so müßten auch die Arbeiten beider Maschinen sich verhalten wie 1 : 4. Allein K_1 wird für große Schaufelflächen und Schraubenflügel etwas größer als für kleine; also wächst die Arbeit der Maschine etwas weniger rasch als in diesem Verhältnis. Sieht man hievon ab, so werden die Querschnitte der Dampfcylinder, da sie sich wie 1 : 4 verhalten, bei gleichem Dampfdruck per Flächeneinheit Arbeit liefern wie 1 : 4 und ebenso die Dampfkessel in diesem Verhältnis Dampf produzieren, also gerade wie zur Ueberwindung der Widerstände erforderlich. Die Maschinenteile sind ähnliche Körper; ihre Querschnitte verhalten sich wie 1 : 4, ebenso ihre Festigkeiten (S. 133, 148), d. h. die Spannung an ähnlich gelegenen Teilen hat in beiden Schiffen den gleichen Wert.

89. Gaskraftmaschinen.

Die Gaskraftmaschine hat einen Cylinder, welcher ein Gemisch von Leuchtgas und atmosphärischer Luft aufnimmt, das sich entzündet. Dabei steigt die Temperatur und der Druck des Gases, wodurch der Kolben fortgeschoben wird. Die von ihm aufgenommene Arbeit wird, wie bei einer Dampfmaschine, mittelst Kolbenstange, Schubstange und Kurbel auf eine Welle übertragen.

1. **Gasgemisch im Cylinder.** Die wesentlichen Bestandteile des Gases sind Kohlenwasserstoffe, Wasserstoff und Kohlenoxyd. Diese be-

dürfen zu ihrer Verbrennung Sauerstoff, den die atmosphärische Luft liefert. Der Bedarf an Sauerstoff ergibt sich aus folgender Zusammenstellung:

	Bestand des Leuchtgases.	Bedarf an Sauerstoff.
Schwere Kohlenwasserstoffe .	0,10 kbm	0,30 kbm.
Grubengas	0,50 „	1,00 „
Wasserstoffgas	0,32 „	0,16 „
Kohlenoxydgas	0,08 „	0,04 „
	1,00 „	1,50 „

Hiernach erfordert 1 kbm Leuchtgas 1,5 kbm Sauerstoff. Nun enthalten 100 Teile Luft 23 Teile Sauerstoff. Daher bedarf es zur Verbrennung von 1 kbm Leuchtgas einer

$$\text{Luftmenge} = 1{,}5 \cdot \frac{100}{23} = 6{,}522 \text{ kbm}.$$

Um möglichst alle Kohlen- und Wasserstoffteile zur Verbrennung zu bringen, nimmt man die Luftmenge etwas größer an, z. B. 7,5 statt 6,522 kbm. Es kommen daher 7,5 kbm Luft auf 1 kbm Leuchtgas.

Das specifische Gewicht des Leuchtgases ist durchschnittlich die Hälfte von dem der atmosphärischen Luft bei gleicher Temperatur und Spannung. Daher ist das Verhältnis der Gewichte wie 1 : 2 . 7,5 oder 1 : 15, d. h. es sind 15 kg Luft nötig auf 1 kg Leuchtgas.

2. **Temperatur der Entzündung.** Die spec. Wärme der Mischung ist = 0,26, die Heizkraft des Leuchtgases = 11580 Kal. Steigt die Temperatur des Gases bei der Verbrennung um t Grade, so muß sein

$$0{,}26\,(1 + 15)\,t = 11580; \text{ folglich } t = 2783^{\circ}.$$

3. **Druck des Gases bei der höchsten Temperatur.** Derselbe wird berechnet nach dem Gesetz von Gay-Lussac (S. 336). Es sei die Temperatur des Gemisches im warmen Cylinder unmittelbar vor der Entzündung = 30°, der entsprechende Druck per 1 qcm Fläche = 1 kg. Da die Temperaturänderung bei gleichem Volumen vorgeht, im citierten Gesetze $v = v_0$ ist, so erhält man den gesuchten Druck p per 1 qcm

$$p = \frac{1 + 0{,}00367 \, . \, 2783}{1 + 0{,}00367 \, . \, 30} = 10 \text{ kg}.$$

4. **Arbeit, welche 1 kbm Leuchtgas liefert.** Man nehme zunächst auf die Abkühlung, welche das um den Cylinder herum cirkulierende kalte Wasser herbeiführt, keine Rücksicht. Es sei

h die Länge des Cylinderraumes, welchen das Gemisch der Gase vor der Entzündung einnimmt;
H der Kolbenweg, also h + H die Länge des Raumes, bis zu welchem die Produkte der Verbrennung sich ausdehnen; beide Längen in Metern;
F der Kolbenquerschnitt und
p der Anfangsdruck des Gases, entsprechend der höchsten Temperatur, ausgeübt auf 1 qcm Fläche,

so ist die Arbeit des Gases bei der Expansion, berechnet nach der adiabatischen Kurve (S. 348, Formel 9)

$$\frac{PFh}{n-1}\left[1-\left(\frac{h}{h+H}\right)^{n-1}\right].$$

Hierin ist n = 1,44; das Anfangsvolumen Fh von 1 kbm Leuchtgas und von 7,5 kbm Luft, also Fh = 8,5; ferner für p = 10 und 1 qm Grundfläche P = 10000 p = 100000 kg. Nimmt man noch H = 2h, so gibt die vorstehende Formel als Arbeit

$$\frac{100000\ .\ 8,5}{0,44}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{0,44}\right]=740000 \text{ mkg}.$$

Diese Arbeit werde in einer Stunde geliefert. Man drücke sie in Pferden aus und bringe wegen der Nebenhindernisse der Maschine nur 70 Prozent in Rechnung, so wird die Arbeit in der Sekunde sein

$$0,7\cdot\frac{740000}{75\ .\ 3600}=1,92 \text{ Pfd.}$$

Allein die besten Gaskraftmaschinen dieser Art liefern per 1 kbm Leuchtgas nur die Hälfte dieser Arbeit. Daraus ist zu entnehmen, daß die Wärme, welche der andern Hälfte Arbeit entspricht, durch die Abkühlung des Cylinders, bewirkt durch Wasser, das um den Cylinder cirkuliert, verloren geht. Allein dieser Verlust kann, der ununterbrochenen Arbeit wegen, nicht vermieden werden.

5. **Gaskraftmaschine von Otto.** Der Kreislauf der Gase vollzieht sich in vier Perioden. Während der ersten macht der Kolben einen Hub in der Richtung gegen die Welle hin; dabei saugt er Leuchtgas und atmosphärische Luft an, welche den ganzen Cylinder auf die Länge h + H anfüllen. Während der zweiten Periode kehrt der Kolben um, drückt die Gase im Cylinder auf einen Raum von der Länge h zusammen, wodurch sie einen gewissen Druck p′ annehmen. Zu Anfang der dritten Periode werden die Gase entzündet; sie nehmen eine hohe Spannung an und treiben den Kolben vorwärts. Wie dieser, am Schluß der dritten Periode, die Grenzlage erreicht, öffnet sich ein Ventil, wodurch die Gase in die Atmosphäre entweichen können. Während der vierten Periode kehrt der Kolben vermöge der Wirkung des Schwungrades wieder um, um einen neuen Kreislauf zu beginnen.

Es sei H = 1,3 h und der Druck am Anfang der zweiten Periode = 1 kg per 1 qcm, so wird nach dem Gesetze von Poisson (S. 347) der Druck am Ende der zweiten Periode

$$p'=\left(\frac{h+H}{h}\right)^n=\left(\frac{h+1,3\,h}{h}\right)^n=(2,3)^{1,44}=3,32 \text{ kg}.$$

Da nun die Temperatur durch die Entzündung im gleichen Verhältnis steigt wie ohne vorgängige Kompression, so wird der Druck des Gases am Anfang der dritten Periode 3,32 p = 33,2 kg per 1 qcm Fläche und die Arbeit per 1 kbm Leuchtgas.

$$\frac{10000\ .\ 33,2}{0,44}\cdot\frac{8,5}{2,3}\left[1-\left(\frac{1}{2,3}\right)^{1,44}\right]=850000 \text{ mkg}.$$

Diese Arbeit ist im Verhältnis von 85 : 74 größer als bei den Systemen ohne vorausgegangene Kompression. Daher liefert die Otto'sche Maschine, unter sonst gleichen Umständen, per 1 kbm Leuchtgas eine Stunde lang eine Arbeit von

$$\frac{1,92}{2} \cdot \frac{85}{74} = 1,1 \text{ Pfd.}$$

Würde H gegenüber h noch größer genommen, so fiele die nützliche Arbeit noch günstiger aus; allein der Druck würde dann so groß, daß die Dichtheit der Kolbenringe 2c. nur schwer erhalten werden könnte.

Die adiabatische Kurve, welche der Berechnung der Arbeit zu Grunde gelegt wurde, kommt in Wirklichkeit nicht vor, da die heißen Gase nicht nur Wärme in Form von Arbeit an den Kolben abgeben, sondern auch solche an das cirkulierende Wasser. Gleichwohl entsprechen die Rechnungsresultate in ziemlich befriedigender Weise den Erfahrungsresultaten.

6. **Wirkungsgrad des Otto'schen Motors.** Ein Kubikmeter Leuchtgas gibt rund 1 Pferd Arbeit. Nun ist das Gewicht von 1 kbm Leuchtgas 1,293 : 2 = 0,6465 kg. Je 1 kg Leuchtgas liefert 11580 Kalorien Wärme und 1 Kalorie gibt 424 mkg Arbeit. Daher die absolute Arbeit von 1 kbm Leuchtgas = 0,6465 . 11580 . 424 mkg.

Dagegen beträgt die nützliche Arbeit in der Stunde, von 1 Pferd hervorgegangen, nur 75 . 3600 mkg. Daher

$$\text{Wirkungsgrad } \frac{75 \,.\, 3600}{0,6465 \,.\, 11580 \,.\, 424} = 0,085.$$

Von der Wärme, welche das Gas entwickelt, werden daher 8,5 Prozent nützlich. Allein bei der Zubereitung des Gases gehen etwa 25 Prozent der Wärme, welche der Brennstoff liefert, verloren. Daher wird beim Gasmotor das Verhältnis der nützlichen zur aufgewendeten Wärme sein 0,75 . 0,085 = 0,064; also annähernd ebenso groß wie bei einer guten Dampfmaschine.

Bemerkung. Statt des Leuchtgases können auch andere Gase, z. B. aus Benzin, Gasolin, Neolin, Naphtha, Petroleum 2c. zur Erzeugung von Kraft verwendet werden. Gefahrlos und billig ist hiezu das Gas aus Petroleum. Die Einrichtung ist im allgemeinen folgende. Das Petroleum gelangt durch eine Röhre, Tropfen an Tropfen, in den Verdunstungsraum, von hier als Gas in den Regulator, wo es sich mit atmosphärischer Luft mischt, und hierauf in den Cylinder, wo es durch Entzündung explodiert.

Technologie.

90. Darstellung und Verarbeitung des Eisens.

I. Roheisen.

1. **Eisenerze.** Die wesentlichsten sind: Magneteisenstein, Eisenglanz und Roteisenstein (Eisenoxyd), Brauneisenstein (Bohnerz), Spat-, Thon- und Kohleneisenstein. Die Zusammensetzung der Eisenerze ist sehr verschieden. Nach H. Kreußer („Das Eisen", Voigt, Weimar 1886) ist der Bestand zweier Erze aus Luxemburg folgender:

	Erz von Esch,	von Differdingen:
Eisen	42,40	37,83
Sauerstoff . . .	18,12	17,84
Thonerde . . .	6,03	9,38
Kalkerde	9,50	7,40
Bittererde . . .	0,48	0,60
Kieselerde . . .	9,80	13,70
Phosphorsäure . .	1,44	1,50
Schwefel	0,08	0,10
Glühverlust . . .	12,15	11,65

Man bereitet die Erze zum Schmelzen vor: durch Zerkleinern (Pochen) und durch Erhitzen an der Luft (Rösten), um flüchtige Bestandteile zu entfernen. Es werden reichere und ärmere Erze gemischt (gattiert), um die gewünschte Qualität beim Schmelzen zu erreichen. Dieses Schmelzen wird erleichtert durch Schmelzmittel, wie Quarz, kohlensauren Kalk, Flußspat 2c.

2. **Hochofen.** Zum Schmelzen dient der Hochofen. Er besteht aus drei über einander liegenden Stockwerken. Das unterste, fast cylindrisch, heißt Gestell (zur Aufnahme des flüssigen Eisens); das mittlere, ein nach oben sich erweiternder Kegel, die Rast, und der obere, ein sich nach oben zusammenziehender Kegel, der Schacht. Seine obere Oeffnung wird Gicht genannt.

Die Höhe eines Holzkohlenofens beträgt 10–18 m, diejenige eines Koksofens 18–25 m. Die Dimensionen der Teile unter einander sind sehr verschieden. Als mittlere Werte können angesehen werden, die Höhe des Ofens = 1 gesetzt:

Höhe des Gestelles . .	0,12	Weite des Gestelles unten	0,09
Höhe der Rast	0,14	Weite des Gestelles oben	0,10
Höhe des Schachtes . .	0,64	Obere Weite der Rast .	0,30
Höhe der Winddüsen über dem Gestellboden . .	0,05	Weite der Gichtöffnung .	0,15

Die erste Ummandung des Ofenraumes heißt Kernfutter. Dasselbe ist 0,30 bis 0,45 m dick und besteht aus feuerfestem Material. Eine zweite Hülle aus harten Backsteinen umgibt das Kernfutter. Das Ganze ist durch Eisen zusammengehalten. Das Gestell steht frei, der übrige Teil wird unten von eisernen Säulen getragen.

3. **Schmelzgang.** Während des Betriebes muß in gleichen Zeitintervallen der Ofen beschickt werden mit gleichförmigen Schichten von Brennstoff, Flußmitteln und Erzen. Das Verhältnis dieser Teile untereinander ist sehr verschieden. Im Mittel kommen auf 100 kg Erz mit etwa 40 Prozent Eisengehalt etwa 45 kg Flußmittel und 60 kg Koks oder 50 kg Holzkohlen oder 80 kg Steinkohlen.

Indem eine und dieselbe Schicht die Höhe des Ofens durchlauft, steigt ihre Temperatur nach und nach bis zu 1500° C. Nachdem die Vorwärmzone des Ofens durchstrichen ist, beginnt der chemische Prozeß. In der Reduktionszone werden der Sauerstoff der Erze und andere verunreinigende Bestandteile vom Eisen ausgeschieden. Dafür nimmt in der folgenden Zone der Verkohlung das Eisen Kohlenstoff auf und zwar 3 bis 6 Prozent. Zu unterst sammelt sich das geschmolzene Eisen und unmittelbar über ihm die Schlacke. Beide werden zeitweise abgelassen. Die Oeffnung für den Abfluß der Schlacke liegt 0,06 bis 0,10 m über derjenigen für das Eisen.

4. **Luftbedarf.** 1 kg Koks bedarf mindestens 9,7 kg kalte atm. Luft zur Verbrennung, was 7,5 kbm ausmacht. Sollen 100 kg Roheisen gewonnen werden, so sind hierzu durchschnittlich erforderlich

Erze (mit 0,4 Eisen) .	250 kg,	Koks	150 kg
Flußmittel	112 „	kalte Luft, mindestens	1455 „

Die festen Bestandteile machen 512 kg aus. Mithin ist das Gewicht der Luft 1455 : 512 oder 2,84mal größer als das der festen Materialien.

Nach Kreußer liefert ein Hochofen mit 32,17 qm größtem Querschnitt in 24 Stunden 60000 kg Roheisen bei einem Koksaufwand von 105500 kg. Dieser Brennstoff bedarf 105500 . 7,7 kbm Luft, was auf die Minute und 1 qm des Querschnittes ergibt

$$\frac{105500 \,.\, 7,7}{24 \,.\, 60 \,.\, 32,17} = 17,5 \text{ kbm.}$$

Für Holzkohlen sinkt dieser Betrag auf annähernd 12 kbm herab.

Unter Anwendung von erhitzter Gebläseluft (von cirka 300° C.) werden annähernd 25 Prozent weniger Brennstoff und Luft erfordert.

Zur Erhitzung werden Kalorifère mit direkter Feuerung oder die vom Hochofen abgehenden Gase benutzt. Diese durchstreichen ein System von Röhren, welche in einer Kammer liegen und ihre Wärme an die sauerstoffhaltige Luft abgeben, welche durch die Kammer getrieben wird.

5. **Gebläse.** Man verwendet in der Regel doppeltwirkende Cylindergebläse (S. 329).

Die Windpressung an der Düse soll sein:

	Quecksilberhöhe.	Wassersäule.
für Kohlen aus leichtem Tannenholz	0,02—0,03 m	0,27—0,41 m,
„ Kohlen aus dichtem Tannenholz	0,03—0,04 „	0,41—0,54 „
„ Kohlen aus Hartholz	0,04—0,06 „	0,54—0,82 „
„ weichen, leicht entzündbaren Koks	0,08—0,12 „	1,08—1,62 „
„ harten, dichten Koks	0,13—0,19 „	1,76—2,68 „

Die kleinern Manometerstände gelten für niedere, die größern für hohe Hochöfen. Um diesen Druck möglichst gleichförmig zu erhalten, wird zwischen den Düsen und den Pumpen ein Regulator in die Windleitung eingesetzt, dessen Inhalt 25—30mal größer ist als der des Gebläsecylinders.

Die Luft gelangt durch 3—7 Düsen, welche gleichförmig um den Ofen verteilt sind, in das Innere des Ofens.

6. **Eigenschaften des Roheisens.** Der Kohlenstoff, welchen das Eisen beim Schmelzen aufnimmt, ist entweder chemisch mit dem Eisen verbunden oder nur mechanisch beigemengt. Die erstere Verbindung gibt das weiße, die letztere das graue Eisen. Da der Kohlenstoff nur teilweise chemisch, teilweise mechanisch mit dem Eisen verbunden sein kann, so gibt es zwischen dem weißen und grauen Eisen verschiedene Abstufungen.

Das graue Eisen wird aus strengflüssigen Erzen bei hoher Temperatur erblasen. Es hat eine mehr oder weniger dunkle Farbe, ist körnig, zähe, weich, selbst etwas geschmeidig und zu Gußwaren besonders geeignet, weil es die Formen gut ausfüllt.

Das weiße Eisen entsteht aus leicht schmelzbaren Erzen (Braun- und Spateisenstein) bei niederer Temperatur. Es ist in seiner ausgeprägtesten Form, dem Spiegeleisen, silberweiß, großblätterig, äußerst spröde und hart. Es ritzt das Glas. Im geschmolzenen Zustand ist das weiße Eisen dickflüssig, es füllt daher die Formen nicht gut aus und wird nur ausnahmsweise umgegossen zur Darstellung harter Gegenstände. Dagegen findet es Verwendung zur Stabeisen- und Stahlfabrikation.

Das Manganeisen ist eine Mischung von Spiegeleisen mit Mangan, einem Metall, das streng flüssig und härter ist als Stahl. Das Manganeisen hat von allen Roheisensorten den höchsten Kohlengehalt (5,5 bis 7,5 Prozent).

II. Gußeisen.

7. **Umschmelzen des Roheisens.** Das Roheisen, wie es aus dem Hochofen kommt, enthält noch mancherlei Verunreinigungen. Wo diese zulässig sind, kann das Eisen sofort zur Anfertigung von Gegenständen in Formen abgelassen werden. Weitaus der größte Teil von Roheisen wird durch Umgießen gereinigt und durch richtige Mischung für die verschiedensten Zwecke geeignet gemacht. Es geschieht das Umschmelzen in Tiegeln, Kupolöfen und in Flammöfen.

Graphittiegel, in glühende Kammern gestellt, verwendet man nur für kleine Gegenstände; Kupolöfen für größere und Flammöfen nur für außergewöhnlich große Gegenstände.

8. **Kupolofen.** Form ähnlich wie beim Hochofen. Höhe 3 bis 8 m; größter Durchmesser des kreisförmigen Querschnittes 0,7 bis 1,8 m.

Es erfordern 100 kg Gußeisen 106 bis 110 kg Roheisen (Masseln) und während des Betriebes 8 kg Koks und 3,5 kg Kalk als Flußmittel.

Man rechnet per 1 qm größten Ofenquerschnittes in der Stunde eine Produktion von 700 bis 1000 kg Gußeisen.

Es genügt eine Windpressung, welche 0,7 beträgt von jener, wie sie auf S. 446 für Hochöfen angegeben ist.

9. **Flammofen.** Er ist eine liegende, in die Länge gezogene, niedere Kammer mit etwas Neigung gegen den Abstich zu und mit Seitenöffnungen versehen, durch welche das Schmelzmaterial eingebracht wird. Auf der entgegengesetzten Seite des Abstiches ist der Feuerherd, von wo aus die heißen Gase durch die Stücke ziehen, welche geschmolzen werden sollen. Ein Ofen kann 12 bis 15 Tonnen Eisen fassen und mit Steinkohlen, Braunkohlen und Torf betrieben werden.

10. **Das Formen.** Von den abzugießenden Gegenständen muß zuerst eine feuerfeste Form erstellt werden: aus Sand, Lehm oder Gußeisen. Daher gibt es Sandguß, Lehmguß und Schalenguß.

Man verwendet zweierlei Sand: magern und fetten. Der magere, mittelfeine, enthält nur wenig Thon, etwas Kohlenstaub und ist schwach befeuchtet. Er wird zu den gewöhnlichen Sandformen benutzt. Soll der Gegenstand scharf ausfallen, soll er weich und zähe werden oder will der gewöhnliche Sand nicht stehen, so wird thonhaltiger, bildsamer Sand, den man Masse nennt, verwendet.

Das Formen in Sand und Masse geschieht von Hand mittelst Modellen, das auf mechanischem Weg unter Benutzung von Zeichnungen.

Die Lehmform wird angewendet zu großen Stücken, die nur einmal zu erstellen sind. Dazu ist weder Modell noch Kasten nötig. Die Masse besteht aus fettem Lehm, Kuhhaaren und gehacktem Stroh.

Formen aus Gußeisen können wiederholt benutzt werden, was bei den andern nicht der Fall ist. Der in diese Form eingetretene Guß kühlt sich in der Form rasch ab, weshalb eine harte Kruste von einigen Millimetern Dicke entsteht. Diese Formen liefern daher den Hartguß.

III. Schmiedeisen.

11. **Chemischer Prozeß bei Gewinnung von Schmiedeisen.** Das Schmiedeisen entsteht aus dem Roh- oder Gußeisen dadurch, daß diesem Kohlenstoff entzogen wird, so daß der Gehalt an solchem nur noch 0,1 bis 0,65 Prozent beträgt. Es geschieht dies dadurch, daß der Kohlenstoff, im erhitzten Zustand des Eisens unter Zuführung von Sauerstoff der Luft, verbrannt wird. Wird hierbei die Erhitzung nur so weit getrieben, daß die Eisenmasse weich und teigartig wird, so entsteht Schweißeisen; wird aber die Masse dabei vollkommen flüssig gemacht, so ent-

steht Flußeisen. Das erstere wird gewonnen durch den Frisch- und Puddelprozeß, das letztere durch den Bessemerprozeß.

a) Frischprozeß. Auf einem Herde wird das Eisen, auf Holzkohlen liegend, nahezu geschmolzen und hierauf die teigartige Masse wiederholt zerstochen und umgewendet. Der Wind tritt von zwei Seiten her ein und verbrennt den Kohlenstoff des Eisens. Nachdem die Masse gar geworden, wird sie aus dem Feuer genommen und unter dem Hammer bearbeitet.

b) Puddelprozeß. Das Puddeln besteht darin, daß das Roheisen nahezu geschmolzen wird in einem Flammofen durch Gase, welche ein Steinkohlenfeuer liefert. Es sind also hier Brennstoff und Eisen getrennt gehalten. Durch Zuschläge von Frischschlacke, Hammerschlag, Walzensinter, altem Eisen 2c. und durch stetiges Rühren der Masse mit Brechstangen geht die Entkohlung und Reinigung des Eisens vor sich. Der Boden des Ofens besteht aus einer gußeisernen Platte von 6 bis 9 cm Dicke. Diese wird mit schwer schmelzenden Schlacken belegt und erst auf diese kommt das Eisen zu liegen. Die Herdfläche richtet sich nach der Größe der Beschickung. Für 300 kg Einsatz ist sie etwa 1,8 m lang und 1,5 m breit. Dieser Einsatz erfordert 270 kg Steinkohlen. In 24 Stunden werden 8 bis 12 Einsätze behandelt.

c) Bessemerprozeß. Das Roheisen wird in einem birnenförmigen Gefäße, dem Konverter, umgewandelt. Zu diesem Zweck wird das Gefäß zuerst durch etwas Koks, der hineingebracht wird, vorgewärmt und sodann in diesem Zustand geleert. Hierauf leitet man flüssiges Roheisen aus dem Hoch- oder Kupolofen in das Gefäß und treibt heißen Wind mit starkem Druck durch die Masse von unten nach oben. Dabei vollzieht sich die Verbrennung des Kohlenstoffes, der im Eisen enthalten ist, wodurch Wärme entsteht, welche den flüssigen Zustand aufrecht erhält. Die Birne ist gewöhnlich um eine horizontale Achse drehbar. Nach dem Prozeß wird das flüssige Eisen in Formen gegossen.

Die Birne hat 1,5 bis 2 m Durchmesser, 2,8 bis 3,2 m Höhe und faßt einen Einsatz von 7 bis 10 Tonnen Roheisen. In 24 Stunden sind 28 bis 30 Ladungen möglich. Abgang an Eisen 10 bis 12 Prozent.

Geringe Mengen von Schwefel machen das Eisen im rotglühenden Zustand rotbrüchig, geringe Mengen von Phosphor kaltbrüchig und größere Mengen von Silicium faulbrüchig. Den Engländern Thomas und Gilchrist ist es gelungen, durch Ausfütterung der Bessemerbirne mit einer basischen Schlacke dem Eisen den Phosphorgehalt zu entziehen, wodurch nunmehr alle phosphorhaltigen Erze zur Darstellung von gutem Eisen verwendet werden können.

12. **Zängen des Eisens.** Die Luppen, wie sie der Frischherd oder Puddelofen liefert, werden sofort, d. h. im erhitzten Zustand zusammengepreßt, um die eingeschlossene flüssige Schlacke hinauszudrücken und den Eisenteilen einen festern Zusammenhang durch Schweißen zu geben. Hierzu dienen:

a) Der Quetscher. Er enthält einen Hebel, der 70 bis 90 Schwingungen per Minute macht und die Luppe zusammendrückt.

b) Der Stirnhammer (mit dem Hebedaumen am Hammerkopf); Gewicht bis 4000 kg; Hub 35 bis 40 cm; Anzahl Schläge per Minute 80 bis 90; Lieferung 12 bis 17 Tonnen in 24 Stunden.

c) Walzen, zwei über einander liegend, zwischen welchen die Luppe durchgeht. Durchmesser der Walzen 48 cm, Länge derselben 160 cm; Anzahl Drehungen per Minute: 20 bis 30, wenn die Luppe noch lose ist, 30 bis 40, wenn sie schon mit dem Hammer bearbeitet worden.

Bei den geformten Stücken, wie sie der Bessemerprozeß liefert, kann das Verdichten nicht sofort vorgenommen werden, weil die Oberfläche der Stücke in der Form sich rasch abkühlt, während der Kern der Masse noch flüssig bleibt. Daher werden diese Stücke in einen Ofen gebracht, wo die Masse gleichförmig erwärmt wird und weich bleibt, ohne jedoch mehr flüssig zu sein. Hierauf erfolgt das Zängen in obiger Weise.

Kleinere Stücke, die durch Bruch entstehen, sowie Abfälle oder schmiedeiserne Stücke irgend welcher Art werden zu Paketen zusammengelegt, in besondern Oefen erhitzt, dann zusammengeschweißt und bearbeitet. Dadurch wird die Zähigkeit des Materials erhöht; es entsteht jedoch ein Abgang von wenigstens 9 Prozent. Solches Eisen heißt Ramas-Eisen.

13. **Fertigstellen der Handelsware.** Dies geschieht mittelst Hämmer, meistens aber mittelst Walzen.

a) Hämmer. Sie werden wesentlich verwendet bei Stücken, deren Querschnitt sich ändert, wie bei Kurbeln, gekröpften Achsen 2c. Außer dem Stirnhammer gibt es noch:

Aufwerfhämmer mit Hebedaumen zwischen Drehachse und Hammerkopf; Gewicht des Kopfes 200 bis 300 kg; Hubhöhe 50 bis 70 cm; Anzahl Schläge per Minute 80 bis 120.

Schwanzhämmer mit Achse zwischen Hammerkopf und Druckdaumen und zwar 2- bis 3mal näher dem Daumen als Kopf; Gewicht 200 bis 400 kg; Anzahl Schläge per Minute 100 bis 200.

Dampfhämmer. Der Dampfcylinder ist oben an einem Gestelle befestigt. Die Kolbenstange geht vertikal abwärts und faßt unten den Hammer. Gelangt Dampf unter den Kolben, so hebt sich der Hammer; wird der Dampf abgelassen, so sinkt der Hammer. Die Steuerung kann nun so besorgt werden, daß der Hub, ebenso die Anzahl Schläge per Minute, dem Zwecke der Arbeit entsprechend, größer oder kleiner ausfällt. Die Steuerung kann auch so angelegt werden, daß während des Fallens Dampf von oben auf den Kolben drückt und die Geschwindigkeit des Hammers beschleunigt.

b) Walzen. Sie werden verwendet zur Anfertigung von Eisenstücken mit konstantem Querschnitt, also zu Stangen, Schienen, Blechen 2c. Zwei gußeiserne Walzen, über einander liegend und von gleichem Durchmesser, drehen sich mit gleicher Umfangsgeschwindigkeit. Ein Stab, im glühenden Zustand zwischen den Walzen durchgelassen, wird vermöge der Reibung an den Walzen mitgenommen. Sein Querschnitt wird bedingt durch die in den Walzen angebrachten Kannelierungen. Diese liegen

neben einander und geben dem Stab, indem er sie der Reihe nach durchläuft, die beabsichtigte Querschnittsform. Dabei sind die Einschnitte in die Walzen so anzubringen, daß der Schwerpunkt des Stabquerschnittes in die Berührungslinie der Walzen zu liegen kommt. Man unterscheidet:

Grobwalzen. Länge 145 bis 155 cm, Durchmesser 24 bis 30 cm, Anzahl Drehungen in der Minute 70 bis 90.

Feinwalzen. Länge 65 bis 70 cm, Durchmesser 20 bis 25 cm, Anzahl Umdrehungen per Minute 150 bis 250.

Blechwalzen. Länge und Durchmesser bedingt durch die Breite und Dicke der Bleche.

IV. Stahl.

Der Stahl ist jene Sorte von Schmiedeisen, welches die Fähigkeit hat, bei einem raschen Uebergang vom glühenden Zustand in den kalten hart zu werden und die Härte wieder zu verlieren, wenn es wieder erwärmt wird. Der Stahl enthält 0,65 bis 2 Prozent Kohlenstoff, also mehr als Schmiedeisen und weniger als Gußeisen. Der Stahl ist schmiedbar und schweißfähig, letzteres jedoch um so weniger, je größer der Gehalt an Kohlenstoff ist. Der Stahl wird im allgemeinen gewonnen aus dem Roheisen durch Entziehung von Kohlenstoff, oder aus dem Schmiedeisen durch Zuführung von Kohlenstoff.

Die Behandlung des Roheisens kann erfolgen durch Frischen, Puddeln und nach dem Bessemerprozeß. Daher gibt es Schweißstahl und Flußstahl. Der letztere, in großem Maßstab erzeugt, heißt auch Bessemerstahl. Wird kohlenstoffreiches Roheisen mit kohlenstoffarmem Schmiedeisen zusammengeschmolzen, so entsteht der Martinsstahl. Es geschieht dies gewöhnlich in einem von Siemens konstruierten Generatorofen.

Stahl, aus Schmiedeisen dargestellt, gibt es verschiedene Sorten. Die wesentlichste ist der Zementstahl. Man bringt in Kasten von feuerfestem Thon Schichten von eisernen Stäben, umgibt diese mit Holz- oder Steinkohle und setzt das Ganze mehrere Tage lang einer Hitze aus von 1000° C. Dadurch durchdringt Kohlenstoff die Masse des Eisens und verwandelt dieses zu Stahl.

Der Flußstahl ist möglichst homogen. Weniger ist dies der Fall mit dem Schweiß- und Zementstahl. Um bei diesen Sorten eine größere Gleichförmigkeit in der Verteilung des Kohlenstoffes, im Gefüge 2c. zu erzielen, werden Stahlstäbe zusammengeschweißt und mittelst Hämmern oder Walzen ausgestreckt. Der Vorgang heißt Raffinieren, auch Gärben. Einen noch höheren Grad der Gleichförmigkeit erhält der Stahl durch Umschmelzen in Tiegeln. Solcher Stahl heißt Gußstahl. Er ist also verschieden vom Flußstahl, der aus dem Bessemerverfahren erhalten wird.

Der Stahl wird verwendet zu Instrumenten, Werkzeugen und Konstruktionen der verschiedensten Art. Man denke an Stahl zu Federn, Sensen, Sägeblättern, Messern, Meißeln, Maschinenteilen aller Art (Kurbeln, Achsen, Bandagen), Dampfkesseln, Kanonen 2c.

Das Härten des Stahles erfolgt durch Eintauchen des rotglühen-

den Stahlstückes in Wasser, Oel, Fette ꝛc. Wird der gehärtete Stahl langsam erwärmt, so zeigt er durch Aenderung seiner Farbe die allmähliche Abnahme des Härtegrades.

V. Verarbeitung.

1. **Kreissäge.** Runde Scheibe, mit Zähnen am Umfange. Umfangsgeschwindigkeit: zum Kaltsägen 3,5, zum Sägen rotglühender Stücke 40 m. Arbeitsaufwand für letztere Sägen: Leergang bis 0,62; zum Durchschneiden von 1 qm stündlicher Arbeitsfläche bei Schmiedeisen 7,5, bei Stahl 10,9 Pferde.

2. **Bandsäge.** Es können Eisenplatten bis zu 10 cm Dicke vorteilhaft zersägt werden. Geschwindigkeit des Sägeblattes 1,25 m per Sekunde; Schnittfläche per Minute 10 qcm.

3. **Fräsen.** Geschwindigkeit der Schneiden 5 bis 10 cm; Arbeitsverbrauch per 1 kg stündliches Spänegewicht 0,07 Pferde, ohne die Arbeit für den Leergang.

4. **Maschinenscheeren.** Anzahl Schnitte per Minute: bei kürzern Messern 30 bis 70; bei längern 7 bis 20.

5. **Hobelmaschine.** Geschwindigkeit beim Schneiden: für Gußeisen 7, für Schmiedeisen 15 cm; Rückgang so schnell als möglich.

Arbeit beim Leergang zu berechnen nach Beisp. S. 89; Arbeit pro 1 kg abgehobelten Materials in der Stunde: Bronze 0,028; Schmiedeisen 0,114; Stahl 0,246; Gußeisen 0,3 bei ganz feinen Spänen und 0,04 Pfd. bei dicken Spänen.

6. **Bohrmaschine.** Geschwindigkeit des Bohrerumfanges: bei Bronze 15, Schmiedeisen 12, Stahl 3, grauem Guß 5, Hartguß 1 cm; Zuschieben des Bohrers pro Umdrehung 0,1 bis 0,5 mm.

7. **Drehbank.** Geschwindigkeiten wie bei der Bohrmaschine; bei schmiedeisernen Stücken auf der Handdrehbank: beim Andrehen 18, beim Fertigmachen 28 cm.

Arbeitsverbrauch netto pro 1 kg stündliches Spänegewicht: bei Gußeisen 0,069; Schmiedeisen 0,072 und Stahl 0,104 Pfd. Dazu noch der Betrag für den Leergang.

8. **Lochmaschine.** Der Widerstand beim Durchstoßen nachzusehen auf S. 138 (Versuche von Cresy). H a r t i g nimmt an, dieser Druck daure an, während der Stempel die erste Hälfte der Blechdicke durchläuft. Nach ihm ergibt sich folgende Zusammenstellung:

Blechdicke	1	2	3	4	cm
Zahl der Schnitte per Minute . .	10	9,2	8,3	7,5	
Arbeit beim Leergang	0,16	0,32	0,55	0,82	Pfd.
Arbeit zu 1 qm stündl. Schnittfläche	1,48	2,00	2,55	3,08	„
Daher Gesamtarbeit	1,64	2,32	3,10	3,90	„

9. **Schleifstein.** Der Durchmesser wechselt von 0,1 bis 3 m; die Umfangsgeschwindigkeit von 4 bis 20 m; für Werkzeuge ist diese gewöhnlich 10 m; bei Schmirgelscheiben 20 m.

Der Arbeitsverbrauch ist proportional der Umfangsgeschwindigkeit und der Reibung zwischen Schleifstein und dem Arbeitsstück. Für Schmiedeisen ist der Reibungskoefficient = 0,44. Dann ergibt sich für grobkörnige Sandsteine folgende Zusammenstellung:

Durchmesser	0,5	1	1,5	2	2,5	m
Umfangsgeschwindigkeit .	10	12	14	16	18	„
Druck auf den Stein .	20	25	30	35	40	kg
Betriebsarbeit	1,31	2,08	3,02	4,13	5,41	Pfd.

Für Stahl ist der Reibungskoefficient 0,29, für Gußeisen 0,22; daher wird auch die Arbeit unter sonst gleichen Umständen proportional kleiner.

91. Verarbeitung des Holzes.

1. **Gattersäge.** Sie schneidet aus Baumstämmen Balken, Bohlen und Bretter. Die Sägeblätter, zu 2 bis 15 in demselben Rahmen (Gatter) eingespannt, bewegen sich mit einer mittleren Geschwindigkeit von 1,5 bis 5 m auf und ab; Hub 0,4 bis 1 m; Anzahl Schnitte pro Minute 80 bis 200; Vorrücken des Wagens pro Schnitt 1 bis 8 mm.

Das Vorrücken kann stattfinden: beim Aufgang des Gatters, beim Niedergang oder gleichförmig während beiden. Im ersten Fall muß das Sägeblatt vorhängen. Es sei nämlich A B der vertikale Hub, B C das horizontale Vorrücken des Wagens während eines Hubes, so soll die Linie, welche durch die Zahnspitzen des Sägeblattes geht, in die Richtung A C kommen, also mit der Vertikalen den Winkel B A C bilden. Bei dieser Stellung des Sägeblattes muß der Wagen gegen das Ende des Aufganges vorrücken; alsdann streifen die Zähne beim Aufgang das Holz nicht und schneiden beim Niedergang gleichmäßig.



Man rechnet per Sägeblatt eine stündliche Schnittfläche: bei hartem Holz 3,5, bei weichem 7 qm. Hartig gibt folgenden Versuch an:

Anzahl Sägeblätter im Gatter .	4	6	12	15	18
Stündliche Schnittfläche per Sägeblatt und Pferd in qm . . .	3,19	4,90	6,62	4,98	3,78

Hiernach würde die günstigste Zahl der Sägen cirka 12 sein.

Am Schwungrad ist ein Gegengewicht nötig, um den Gatter mit den Stelzen (Hubstangen) heben zu helfen.

Die Lager der Schwungradwelle dürfen nicht absolut starr aufliegen, sondern müssen beim Niedergang des Gatters etwas nachgeben, um das Brechen der Stelzen zu verhüten. Zu Unterlagen werden daher schwachfedernde Balken aus Holz gewählt.

2. **Kreissäge.** Das Sägeblatt, am Umfang gezahnt und auf einer horizontalen Achse befestigt, hat 0,3 bis 1,2 m Durchmesser. Nach diesem richtet sich die Blattdicke. Es ist gewöhnlich

beim Durchmesser . . .	30	50	70	100	120 cm
die Scheibendicke . . .	1,1	1,8	2,5	2,9	3,5 mm.

Wegen der Verschränkung der Zähne wird der Schnitt um 0,4 bis 1,2 mm weiter als die Blattdicke.

Umfangsgeschwindigkeit: bei dickem Holz 10 bis 12, bei dünnem 15 bis 25 m; Vorrücken: bei hartem Holz 1/400 der Umfangsgeschwindigkeit der Sägescheibe, bei weichem 1/30.

Die Säge schneidet stündlich einen hohlen Raum aus dem Holz: bei hartem Holz 0,014, bei weichem 0,028 kbm. Dividiert man diesen Inhalt mit der Schnittweite, so erhält man die Schnittfläche per Pferd in der Stunde. Beträgt die Schnittweite z. B. 0,004 m, so wird die Schnittfläche in hartem Holz 0,014 : 0,004 = 3,5 qm, in weichem 7 qm.

3. **Bandsäge.** Durchmesser der beiden Rollen, über welche das Sägeband läuft, wenigstens 1 m; Geschwindigkeit des Blattes 10 bis 15 m; Netto-Arbeit per 1 qm Schnittfläche in der Stunde in Pferden:

bei Fichtenholz 0,057; bei Eichenholz 0,077; bei Rotbuchenholz 0,091.
Für den Leergang kann man rechnen 0,04 bis 0,06 Pfd.

Das Sägeband macht, während es arbeitet, rasche und intensive Spannungswechsel durch (S. 169) und geht daher bald zu Grunde, wenn das Band dick und kurz, der Rollendurchmesser klein und die specifische Spannung des Bandes groß ist. Siehe Haltbarkeit eines Drahtseiles ohne Ende S. 217.

4. **Fourniermaschine.** Fourniere sind dünne Schichten aus edlem Holz zum Belegen von Möbeloberflächen. Die Fourniere werden gesägt oder geschnitten.

a) Säge. Horizontal gehender Gatter mit einem Sägeblatt. Daten:

Dicke des Sägeblattes	0,33 mm	Geschw. des Sägeblattes	5 m
Furchenweite . . .	0,60 „	Hub	0,7 m
Dicke der Fourniere .	0,80 „	Stündliche Schnittfläche	5,4 qm
Vorrücken per Schnitt	0,70 „	Arbeitsaufwand . . .	1,0 Pfd.

b) Schneidmaschine. Die Säge arbeitet in trockenem Holz; die Schneidmaschine dagegen hebt mit dünnem Messer die Fourniere ab dem Holz, das vorher abgedämpft und in feuchtem, erweichtem Zustand zum Schneiden benützt wird. Dadurch geht fast kein Holz verloren, wohl aber leidet häufig die Farbe des Holzes. Geschwindigkeit des Messers (ähnlich dem Doppelhobeleisen) 0,25 m; Schnittbreite bis 1,2 m. Unter Berücksichtigung der Zeit des Rückganges des Hobels können nach Hartig mindestens 200 Blätter von 2 m Länge in der Stunde geliefert werden.

5. **Hobelmaschine.** Die Messer arbeiten entweder in der Quer- oder in der Längenrichtung des Holzes.

a) Querhobelmaschine. Auf der Achse sitzt eine Scheibe mit 0,8 bis 1,8 m Durchmesser, in welcher 2 bis 32 Schneiden eingesetzt sind, die sich mit 12 bis 30 m Geschwindigkeit bewegen. Vorrücken per

Sekunde 1,5 bis 6 mm. Mit 2 Schrupp- und 2 Schlichtstählen, die 700 Umdrehungen per Minute machen, kann bei Rotbuchenholz ein Volumen abgehoben werden = 0,233 kbm mit 3,25 Pfd. — Bei vertikaler Achse liegt die Arbeitsfläche horizontal. Hört die Achse unter der Scheibe auf, so geht das Holz mitten unter der Achse durch; setzt sich die Achse abwärts fort, so kann zu beiden Seiten der Achse gehobelt werden.

b) Langhobelmaschine. In der horizontalen Walze sind 2, 3 oder 4 Messer von 20 bis 70 cm Länge eingesetzt; Durchmesser dieser Messerwalze 16 bis 32 cm. Zuführung des Holzes auf Schlitten oder zwischen zwei Walzen per Sekunde 2 bis 8 mm. Messergeschwindigkeit 12 bis 28 m. Bei 2340 minutlichen Touren und einer Geschwindigkeit der Messer von 22,5 m kann vom Fichtenholz in der Stunde ein Volumen von 0,72 kbm abgehoben werden mit 4,7 Pfd.

92. Von den Mahlmühlen.

1. **Gewicht der Getreidearten.** Dasselbe beträgt per Hektoliter:

Weizen . .	74—80 kg.	Gerste . .	58—66 kg.
Spelt . .	71—76 „	Hafer . .	42—48 „
Roggen . .	68—72 „	Mais . .	64—68 „

2. **Chemischer Bestand.** Nach Dr. J. König sind im Mittel in 100 Gewichtsteilen Getreidekörner enthalten:

	Wasser.	Stickstoff-Substanz.	Fett.	Zucker.	Gummi und Dextrin.	Stärke.	Holzfaser.	Asche.
Weizen .	13,56	12,42	1,70	1,44	2,38	64,06	2,66	1,78
Roggen .	15,26	11,43	1,71	0,95	4,88	62,00	2,01	1,76
Gerste . .	13,78	11,16	2,12	1,56	1,70	62,25	4,80	2,63
Hafer . .	12,92	11,73	6,04	2,22	2,04	51,17	10,83	3,05
Mais . .	13,88	10,05	4,76	4,59	58,96	3,23	2,84	1,69

3. **Vorbereitung zum Mahlen.** Zunächst sind die fremdartigen Bestandteile, wie Strohhalme, Steine, Wicken 2c., dann der Staub an der Oberfläche der Körner zu entfernen. Hierzu dienen u. A. folgende Apparate:

a) Flaches Drahtsieb: Länge 45 cm, Breite 30 cm, Senkung $1/5$, Maschen 12 mm lang und 5 mm breit, Anzahl Hin- und Hergänge per Minute 130, Gangweite 3 cm. Strohhalme, Steinchen 2c. werden nicht durchgelassen, sondern fallen unten über das Sieb hinaus.

b) Liegender Staubcylinder: Länge 3,5 m, Durchmesser 1 m, Senkung $1/10$; mit Drahtgewebe überzogen, das nur den Staub und nicht die Körner durchläßt; Wellbaum, Arme und Längenleisten mit

gebicktem Blech überzogen, um die Körner, welche während der Drehung darüber fallen, abzureiben; 30 Umgänge per Minute; steht in einem Kasten, aus welchem der Staub durch einen Saugventilator abgeführt wird.

c) Aufrechter Staubcylinder: Höhe 1,6 m, Durchmesser 1 m; Mantel aus Blech, mit Löchern von 2 mm Weite, welche ihre Schärfe nach innen kehren; Wellbaum mit 18 bis 24 Flügeln, die über die ganze Länge und den Umfang der Achse gleichförmig verteilt sind und deren gebickte Flächen einen Winkel von 45° mit der Achse bilden. Dreht sich die Achse samt den Flügeln, so wird das oben einfallende Getreide durch die Flügel an den feststehenden Mantel hinausgeworfen und dadurch abgerieben. Der Staub geht durch die Löcher des Mantels hindurch. Beim Austritt wird das Getreide einem Luftstrom, veranlaßt durch einen Ventilator, der unter dem Cylinder liegt und auf der gleichen Welle sitzt, ausgesetzt. 250 bis 300 Umgänge per Minute. — In dieser Abstaubmaschine, welche auch die Form eines Kegels haben kann, bringt man öfters Bürsten, parallel zur Mantelfläche, an, welche an die Körner streifen. — Harter, mit Erde vermischter Weizen wird gewaschen.

d) Spitzgang, ein gewöhnlicher Mahlgang, dessen Steine weit aus einander stehen, die Körner nur abreiben, ihre Spitzen und abfällige Keime entfernen. In Verbindung mit einem Ventilator. Kann auch als Rollgang zur Entfernung der Spreu benutzt werden.

e) Netzmaschine: Blechcylinder 35 cm Durchmesser, 2 m Länge, 1/15 Senkung und 45 Umgänge per Minute. In denselben treten die Körner und ein feiner Wasserstrahl ein. Das so benetzte Getreide wird durch mehrere Arme an einer feststehenden Welle unter einander gemacht. Nur bei sehr trockener Frucht nötig.

4. **Vermahlung.** Die Körner enthalten folgende vier Schichten: die äußere holzige Haut, die Kleberschicht, den Mehlkern und den Keim. Die Kleberschicht ist stickstoffhaltig, der weiße Mehlkern reich an Stärkemehl und der Keim reich an Stickstoff und Fett.

Der Zweck der Vermahlung ist nun nicht allein der, die Körner zu zerkleinern, sondern wesentlich auch, die holzigen Teile von den übrigen zu trennen und Mahlprodukte von verschiedener Qualität zu gewinnen. Die Kleberschicht hat eine gelbliche Farbe und kann daher nicht zur Darstellung von weißem Mehl benutzt werden. Soll sie verarbeitet werden, so geht auch ein Teil der holzigen Haut mit. Was dadurch an nährenden Bestandteilen gewonnen wird, geht wieder durch schlechte Verdauungsfähigkeit des Mahlproduktes verloren. Die äußere Haut und Kleberschicht sind zähe, der Mehlkern dagegen zerfällt leicht in Pulver, so daß eine Ausscheidung dieses Teiles von den übrigen möglich wird. Die Vermahlung erfolgt nach zwei Methoden:

a) Einfache Vermahlung (Flachmüllerei). Das Getreide wird nur einmal aufgeschüttet und nach der Vermahlung in Mehl, Gries und Kleie sortiert; deshalb müssen die Werkzeuge eng gestellt sein und wenig Zufluß an Körnern haben.

b) Wiederholte Vermahlung (Hochmüllerei). Die Zerkleinerung wird nach und nach vorgenommen und nach jeder Zerkleinerung auch sofort die Sortierung durch Siebe, unter Beihilfe eines Luftzuges, bewerkstelligt.

5. **Vermahlung mittelst Mühlsteinen.** Diese Steine müssen scharfe Kanten annehmen, die nicht abbröckeln oder sich leicht abstumpfen. Diese Eigenschaften besitzen die Mehrzahl der harten, grobkörnigen Sandsteine, noch mehr die Basalte z. B. von Andernach am Rheine und besonders die feinkörnigen Quarzsteine von La Ferté und Bergerac in Frankreich. Diese letzteren Steine werden durch Kitt aus einzelnen Teilen zusammengesetzt, die eine Menge Poren und scharfe Kanten von großer Härte haben. Durchmesser der Steine 0,9 bis 1,6 m; Höhe derselben 0,25 bis 0,40 m; Weite des Auges 0,22 bis 0,32 m.

Die Hauschläge sind Furchen, Fig. 1, welche in die Mahlfläche beider Steine, nach einem gewissen Gesetze verteilt, eingehauen werden. Am Auge sind die Furchen 6 bis 7, nach dem Umfange hin 3 bis 4 mm tief. Sie sollen scheerenartig das Korn zerschneiden und zugleich nach dem Umfang hin treiben, weshalb die Furchen des Läufers und Bodensteins nach Fig. 2 zu richten sind. Eine Lage wie in Fig. 3 ist zu verwerfen, weil die Körner während der Schnittwirkung zum Teil nach innen getrieben werden. Der Winkel der schneidenden Kanten soll auf der inneren Seite cirka 60 Grad betragen und nach außen hin stetig auf cirka 45 Grad abnehmen. — Vermittelst eines Kranes kann der Läuferstein in den Löchern h, Fig. 4, gefaßt, abgehoben, gedreht und neben den Bodenstein gelegt werden.

Fig. 1.

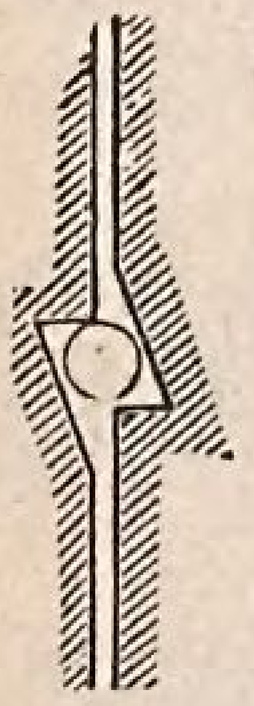


Fig. 2.

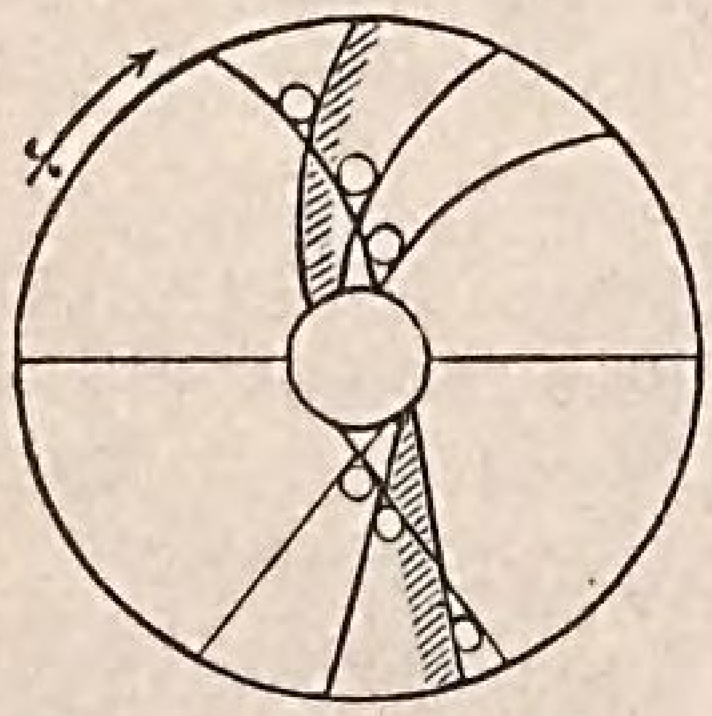
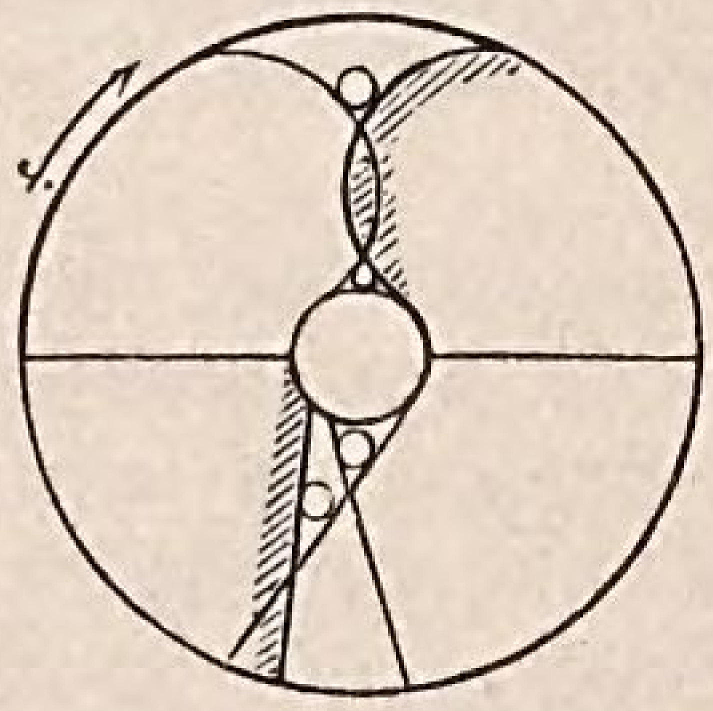


Fig. 3.



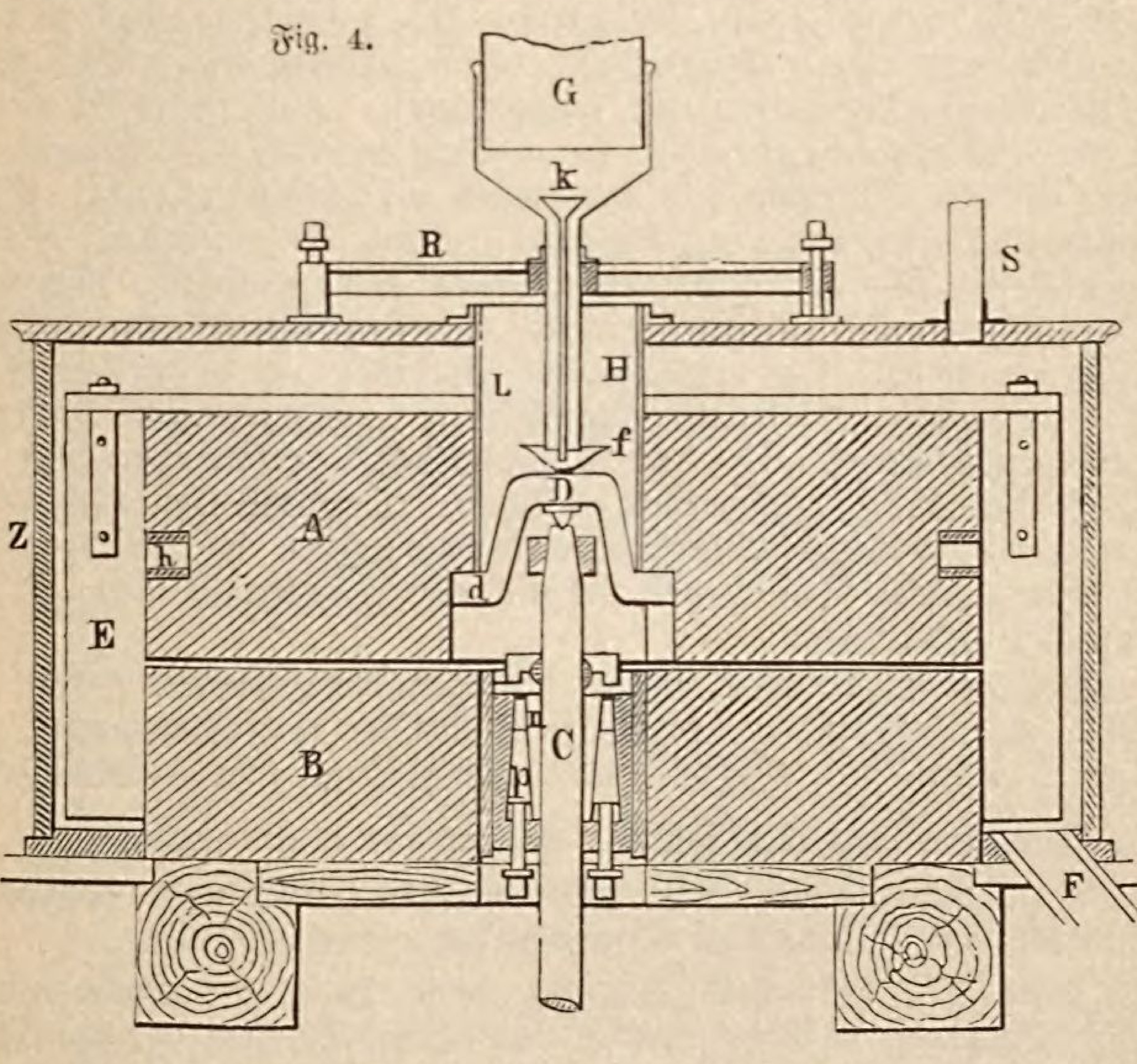
Die Umfangsgeschwindigkeit des Läufers beträgt nach Rühlmann 8 bis 9,4 m per Sekunde. Wegen starker Erhitzung soll die obere Grenze nicht überschritten werden. Es ist deshalb zweckmäßig, einen Regulator anzuwenden.

Der Läufer liegt auf den beiden Zapfen d der Haue D, Fig. 4, und diese auf der Mühlspindel C. Damit der Läufer durch sein eigenes Gewicht immer horizontal, also parallel zum Bodenstein, verbleibe, sollte das obere Ende der Spindel einige Centimeter über die Mitte der Läuferhöhe hinaufreichen. — Der Buchsen oder das Lager, in welchem das Mühleisen beim Durchgang durch den Bodenstein sich dreht, besteht aus 3 bis 4 Stücken Hartholz n, welche durch Keile p angetrieben werden können. — Das untere Lager des Mühleisens kann gehoben oder gesenkt werden, um die Entfernung der Steine zu regulieren. Jeder Mahlgang kann für sich abgestellt werden.

Das Aufschütten durch das Rohr G soll regelmäßig sein. In neueren Mühlen führt von G ein Blechrohr H von 7 cm Durchmesser

die Körner auf den Becher f, der sich mit der Haue D dreht und diese Körner gleichmäßig über den Rand desselben hinauswirft. Durch eine Stellvorrichtung R kann das Rohr H gehoben oder gesenkt und der Zufluß dadurch reguliert werden. Oefters wendet man hierzu das Ventil k an. Das Mehl fällt in den 10 bis 15 cm breiten Raum zwischen den Bodenstein und die Zarge Z und wird durch Flügel E oder auch durch die bloße drehende Bewegung des Läufers nach dem Ableitungsrohr F geführt. In der Zarge und dem Deckel, welche die Steine einschließen, ist ein Rohr S angebracht, durch welches die erhitzte Luft aus dem Mahlgang vermittelst eines Ventilators aufgesogen wird.

Fig. 4.



Die Mehlteilchen werden dabei durch ein Flanellfilter zurückgehalten. Dadurch strömt kalte Luft durch ein Rohr L, das in das Läuferauge eingesetzt ist, zu und geht zwischen den Steinen durch, um sowohl das Mahlgut abzukühlen, als auch dasselbe rascher zwischen den Steinen durchzutreiben.

Oefters wird das Mahlgut aus dem Mahlgange in die Kühlmaschine gebracht. Es ist dies ein aufrechter, cylindrischer Kasten von 2 bis 3 m Durchmesser. In demselben dreht sich über der Mahlfläche ein Rechen, der das Mehl langsam ausbreitet und gegen die Achse hin nach dem Ableitungsrohr schiebt.

6. **Vermahlung mittelst Walzen.** Die Walzen haben 0,18 bis 0,25 m Durchmesser und 0,30 bis 1 m Länge. Sie bestehen aus Porzellan oder Hartguß, liegen horizontal, entweder neben einander

oder schräg über einander und können durch Schrauben gestellt werden. Außerdem gestatten Federn ein etwelches Ausweichen der einen Walze, wenn ein harter Gegenstand zwischen ihnen durchgeht. Ihre Oberfläche ist entweder glatt oder geriffelt. Die Riffeln bilden Schraubenlinien mit äußerst schwacher Steigung. Dadurch entsteht ein Angriffswinkel zum Zerschneiden der Körner wie bei den Mühlsteinen. Die Riffelung ist gröber oder feiner, je nachdem die Walzen zum Vorschroten, Nachschroten oder Ausmahlen bestimmt sind. Ein Walzenstuhl enthält zwei neben einander liegende Walzenpaare, denen das Mahlgut mittelst Speise- und Verteilungswalzen zugeführt wird.

Der Mahlprozeß ist nun folgender. Die gereinigte und gespitzte Frucht wird durch einen Walzenstuhl, dessen Walzen die gröbste Riffelung und weiteste Stellung haben, vorgeschrotet. Bei dieser Schrotung macht die eine Walze cirka 80, die andere 180 bis 250 Touren per Minute. Dieses Schroten soll mehrmals wiederholt werden. Allein nach jedem Schroten wird das Produkt sortiert. Es entstehen: Schrotmehle in kleiner Menge, Schrotgriese, denen Kleie anhaftet, Mehlgriese und Dunste, vermengt mit Kleie, welche jeweilen durch die Putzmaschine ausgeschieden wird. Die aus diesem Verfahren gewonnenen Griese werden nun zwischen Glattwalzen durchgelassen, welche gleiche Umfangsgeschwindigkeit haben, also das Mahlgut nicht zerschneiden oder zerreiben, sondern durch Zerdrücken auflösen. Nachdem auch hier wieder die Sortierung vollzogen, beginnt das Ausmahlen der reinen Griese und Dunste mittelst Walzen von verschiedener Tourenzahl oder mittelst gewöhnlicher Mühlsteine.

Nach Ganz würde eine Mühle mit ununterbrochenem Betrieb auf 9 Stühle mit Riffelwalzen erfordern 3 Stühle mit Glattwalzen zum Auflösen, 5 solche zum Mahlen und 3 Mahlgänge zum Ausmahlen.

7. **Sortieren des Mahlgutes.** Es werden angewendet:

a) Rüttelbeutel. Diese schlauchartigen Siebe aus Wollentuch werden nur noch in kleineren Kundenmühlen angewendet.

b) Drahtsiebe. Das Mahlgut wird durch die etwas geneigt liegenden Drahtgewebe durchgerüttelt oder durch Bürsten durchgetrieben. Man wendet von Nr. 64 bis Nr. 15 an. Auf 1 qcm Fläche der ersteren feinsten Gewebe gehen cirka 590, der gröbsten 9 Oeffnungen. Vorherrschend in England in Anwendung.

c) Cylindersiebe. Sie haben eine Länge von 4 bis 6 m, einen Durchmesser von 0,8 bis 1,2 m, eine Senkung von $^1/_{12}$ bis $^1/_{16}$ und machen 25 bis 30 Umgänge per Minute. Die seidenen Müllergaze haben folgende Nummern:

für das feinste Mehl .	Nr. 18	für besseres Gries . .	Nr. 6
„ gutes Mehl . .	„ 11	„ schlechteres Gries .	„ 4
„ mittleres Mehl .	„ 9	„ feinere Kleie . .	„ 0
„ grobes Mehl . .	„ 7	„ gröbere Kleie . .	„ 00

Um per Stunde 100 kg Mahlgut zu sortieren, bedarf es 12 bis 18 qm solcher Siebfläche.

d) Centrifugalsichtmaschine. In einem Cylindersiebe von 0,8 bis 1,2 m Weite und 1,5 bis 2,5 m Länge drehen sich rasch schraubenförmig geformte Flügel, welche nahe an das Sieb anschließen, während der Cylinder selbst langsam sich dreht. Durch diese Flügel wird die Leistungsfähigkeit des Siebes sehr erhöht.

8. **Transport des Getreides.** Hierzu dienen:

a) Sackaufzug. Das Aufziehen der Säcke wird durch mechanische Kraft, das Herunterlassen durch das Gewicht des Sackstuhls bewirkt und die letztere Bewegung durch eine Friktionsscheibe reguliert. Geschwindigkeit aufwärts 0,6 bis 0,8 m per Sekunde. Die Einrichtung ist so zu treffen, daß der mitfahrende Arbeiter die Bewegung an jeder Stelle und mit Leichtigkeit unterbrechen kann.

b) Becherwerk. Zum Heben des Mahlgutes. Die Becher sind 10 bis 15 cm breit und tief und stehen 30 bis 50 cm aus einander. Die Riemen, auf welchen sie befestigt sind, laufen auf zwei Rollen von 50 cm Durchmesser, welche cirka 25 Umgänge per Minute machen. Uebrigens richten sich die Größe der Becher und ihre Geschwindigkeit nach der zu fördernden Mahlmenge. Die Entfernung der Wellen muß reguliert werden können, um jeweilen den Riemen nach Bedarf zu spannen. Die Bewegung muß immer von der oberen Rolle ausgehen.

c) Mehlschraube (Schnecke). Zur Förderung des Mahlgutes in horizontaler Richtung. Die Schaufelflächen haben eine radiale Breite von 6 bis 10 cm, 20 bis 30 cm Ganghöhe und machen 25 bis 30 Umgänge per Minute.

9. **Bestand des Mahlgutes.** Aus 100 Teilen Körner entstehen

durch die einfache Vermahlung:		durch die wiederholte Vermahlung:	
Gutes Mehl	50	Feines Mehl	25
Mittelmehl	16	Gutes Mehl	35
Schwarzmehl	10	Mittelmehl	9
Kleie	20	Geringere Sorte	9
Fruchtstaub	1	Kleie	18
Mahlverlust	3	Mahlverlust, Staub	4
	100		100

Diese Verhältnisse ändern sich jedoch, je nach der Einrichtung und dem Betrieb, von Mühle zu Mühle.

10. **Mehlproduktion und Betriebskraft.** Ein Mahlgang verarbeitet um so mehr, je schärfer die Steine, je größer die Mahlfläche und je größer die Umfangsgeschwindigkeit des Läufers sind. Ein Quadratmeter gut geschärfter französischer Steine kann in der Stunde cirka 90 kg Weizen bei einer Umfangsgeschwindigkeit von 9 m ausmahlen, wenn der Mahlgang gut ventiliert wird. Sandsteine liefern nur 0,6 von dieser Quantität. Ohne Anwendung von Ventilation beträgt die Lieferung ebenfalls nur 0,6 bis 0,8 von der obigen.

Die Arbeit zum Zerkleinern der Körner ist zu unterscheiden von der Arbeit zum Betrieb aller Maschinen (Mahlgang und Hilfsmaschinen). Die erstere ist die Netto-, die letztere die Bruttoarbeit. Mit französi-

schen Steinen und 9 m Umfangsgeschwindigkeit erhält man folgende entsprechende Werte eines Mahlganges:

Durchmesser der Steine =	0,9	1,0	1,2	1,4	1,6 m.
Mahlgut per Stunde =	53,0	67,5	97,2	132	175 kg.
Bruttoarbeit in Pferden =	2,2	2,8	4,0	5,5	7,3.

Verarbeiten zwei Mühlen, die eine mit Steinen, die andere mit Walzen, in gleicher Zeit gleich viel Frucht, so braucht die Walzenmühle bei rationeller Einrichtung nicht mehr Arbeit als die andere.

93. Numeriersystem für Garne.

I. Numerierung der Baumwollgarne.

a) Französisches oder metrisches System.

Schneller (Echevaux).		Gebinde (Echevettes).		Fäden oder Haspelumgänge.		Meter.
1	=	10	=	700	=	1000

Die Anzahl Schneller Garn, welche 0,5 kg Gewicht haben, bezeichnet die Nummer des Garnes.

Von Nr. 15 gehen daher 15 Schneller = 15000 m auf 0,5 kg; von Nr. 0,7 dagegen bloß 7/10 Schneller = 700 m. Ebenso wiegt z. B. 1 Schneller von Nr. 35 gleich 500 : 35 = 14,28 Gramm.

b) Englisches System.

Schneller (Hank).		Gebinde (Leys).		Fäden oder Haspelumgänge.		Ellen (Yards).		Meter.
1	=	7	=	560	=	840	=	768

Die Anzahl Schneller, welche auf 1 engl. Pfund (avoir du poids) gehen, bezeichnet die Nummer des Garnes. Von Nr. 50 gehen daher 50 Schneller = 840 . 50 Yards auf 1 Pfund.

c) Oesterreichisches System.

Schneller.		Gebinde.		Haspelumgänge.		Ellen.		Meter.
1	=	7	=	700	=	1487,5	=	1159

Die Anzahl Schneller, welche auf 1 Wiener Pfund gehen, gibt die Nummer an.

d) Vergleichungen.

Nr. 1 französ. = 1,181 englisch = 0,966 österreich.
„ 1 englisch = 0,847 französ. = 0,818 österreich.
„ 1 österreich. = 1,222 englisch = 1,035 französ.

Beisp. Nr. 54 englisch = 54 . 0,847 = Nr. 45,74 französisch.
„ „ „ = 54 . 0,818 = Nr. 44,17 österreichisch.

II. Numerierung der Leinengarne.

In Großbritannien und den meisten Spinnereien des Kontinents ist das englische System eingeführt. Der Haspel hat 2½ Yards Um-

fang, und 120 Fäden machen 1 Schneller. (Bisweilen werden Haspel von 3 Yards Umfang angewendet, wonach 100 Fäden 1 Schneller machen.) Die Anzahl Schneller, welche 1 engl. Pfund ausmachen, gibt die Garnnummer an.

Packet.		Bündel.		Hanks (Strangen).		Leas (Schneller).		Yards.		Meter.
1	=	6	=	120	=	1200	=	360000	=	329178
		1	=	20	=	200	=	60000	=	54863
				1	=	10	=	3000	=	2743

1 bayer. Schneller = 4,34 engl. Schneller,
1 engl. Bündel = 46 bayer. Schneller,
1 österr. Bündel = 5 Stück = 20 Strangen.

Da ferner 1 englisch Pfund = 453 Gramm, so ist

Nr. 1 englisch $= \frac{274 \cdot 500}{1000 \cdot 453} =$ Nr. 0,303 metrisch,
Nr. 1 metrisch = 1 : 0,303 = Nr. 3,3 englisch.

III. Numerierung der Wollgarne.

a) Kammgarne (franz. System).
Längeneinheit = 600 franz. Ellen = 720 Meter.

Auf 0,5 kg Nr. 30 gehen z. B. 30 . 600 = 18000 Ellen,
= 21600 Meter.

b) Kammgarne (engl. System). Längeneinheit:

1 Zahl oder Schneller = 550 Haspelumgänge von 3 engl. Fuß = cirka 503 Meter.

1 Bündel = 2 Gros = 48 Docken = 288 Zahlen
1 „ = 24 „ = 144 „
1 „ = 6 „

Von Nr. 28 wiegt ein Bündel 288 : 28 = 10,3 engl. Pfund.

c) Streichgarne. Längeneinheit 3000 Ellen.

3000 Ellen Garn, welche 0,5 kg wägen, werden livre de compte genannt und in 4/4 geteilt, jedes Viertel wieder in 6 Haspelumgänge (sons).

Livre de compte.		Viertel.		Haspelumgänge.		Ellen.		Meter.
1	=	4	=	24	=	3000	=	3600
		1	=	6	=	750	=	900
				1	=	125	=	150

Garn von 3/4, 4 sons hat demnach eine Länge von 3 . 750 + 4 . 125 = 2750 Ellen = 3300 m per 0,5 kg und ist daher Nr. 3,3 metrisch.

IV. Numerierung der Seide.

Die Feinheit (titre) der Seide wird in Italien durch die Anzahl Deniers (grains) des franz. Markgewichts ausgedrückt, welche ein Faden von 450 m Länge wiegt.

Da nun ein neuer Denier = 0,00005 kg ist, so gehen $\frac{450}{0{,}00005 \cdot 2}$ = 4500000 m auf 0,5 kg und es korrespondiert daher die Feinheit von 1 Denier mit der Nr. 4500 metrisch. So z. B. hat Seide von 24 Deniers eine Feinheit = 4500 : 24 = Nr. 187,5 metrisch, und 450 m davon wägen 24 . 0,05 = 1,2 gr.

In Lyon wird der Denier zu 0,05311 gr und die Länge zu 500 m angenommen; es gehen daher $\frac{500}{0{,}00005311 \cdot 2}$ = 4707211 m auf 0,5 kg. Die Feinheit dieses Denier entspricht daher Nr. 4707 metrisch.

Anmerkung 1. Bis vor kurzem war der Denier in Mailand 0,0511, in Turin 0,05336 gr, und es wurde der Faden auf einen Haspel aufgewunden von 1 franz. Elle = 1,19 m Umfang, welcher somit bei 400 Umgängen 476 m Länge gab.

Anmerkung 2. Die Feinheit des Coconfadens ist durchschnittlich $2^1/_4$ bis $2^1/_2$ Deniers. Da dieser Faden jedoch zu jedem Gebrauche zu fein ist, so werden gewöhnlich beim Abhaspeln des Cocons in heißem Wasser 4 bis 12 solcher Fäden zu einem Faden (grèze) vereinigt. Um die Seide zu Stoffen, Bändern und andern Artikeln zu verwenden, muß sie noch gezwirnt werden. Hierauf beruht die Unterscheidung in Organsin (Zettel), Trame (Einschlag) und in Nähseide. Die gewöhnlichsten Titres sind:

Organsin,	grob	$^{30}/_{34}$	bis	$^{36}/_{40}$	Denier.
„	fein	$^{16}/_{18}$	„	$^{22}/_{26}$	„
„	extrafein für Tüll			$^{10}/_{12}$	„
Trame,	grob	$^{70}/_{80}$	bis	$^{100}/_{120}$	„
„	mittel	$^{42}/_{50}$	„	$^{60}/_{75}$	„
„	fein	$^{18}/_{22}$	„	$^{21}/_{28}$	„

Anmerkung 3. Die Bestimmung des Titre und hiermit des Wertes der Seide geschieht seit längerer Zeit in besonderen Anstalten (Konditionierungen), in welchen die Seide vollkommen getrocknet, vor und nach dem Trocknen genau abgewogen und auf solche Weise außer dem Titre noch das absolute Gewicht der betreffenden Seidenpartie in ihrem vollkommen trocknen Zustande ermittelt wird.

V. Garnwaagen.

Das Abwägen der Garnschneller wird auf Sortier- oder Garnwaagen vorgenommen. Diese können jedoch auch zur Bestimmung der Dicke der verschiedenen Watten, Bänder und Vorspunste in Spinnereien verwendet werden. Nur muß alsdann, da ihre Quadranten gewöhnlich nicht gröber als Nr. 10 gehen, eine weit geringere Länge zur Einheit genommen werden. Statt 1000 m werden z. B. nur 20 m Vorspunst abgewogen, und die Nummer, welche die mit metrischer Einteilung versehene Skala der Sortierwaage anzeigt, ist alsdann 50mal feiner als die eigentliche Nummer dieser Vorspunst. 20 m Vorspunst von Nr. 0,70 werden z. B. auf der Waage Nr. 35 zeigen.

Der Quadrant der Waage darf nicht in gleiche Teile eingeteilt werden, sondern es müssen diese Teile der Tangente des Ausschlagwinkels proportional sein.

94. Baumwollspinnerei.

1. **Rohstoff.** Der Wert der Baumwolle richtet sich wesentlich nach der Länge, der Festigkeit und Elasticität, der Feinheit und Weichheit, Gleichmäßigkeit und Farbe der Fasern. Es beträgt:

	die Faserlänge bei
Pernambuco, Sea-Island, Bahia, Maco, Guadeloupe	27—38 mm
Lange Georgia, lange Cayenne, Maranham . . .	22—30 „
Bourbon, Portorico, Minas, Louisiana, New-Orleans	20—26 „
Tennessee, Levantinische, Italienische	18—24 „

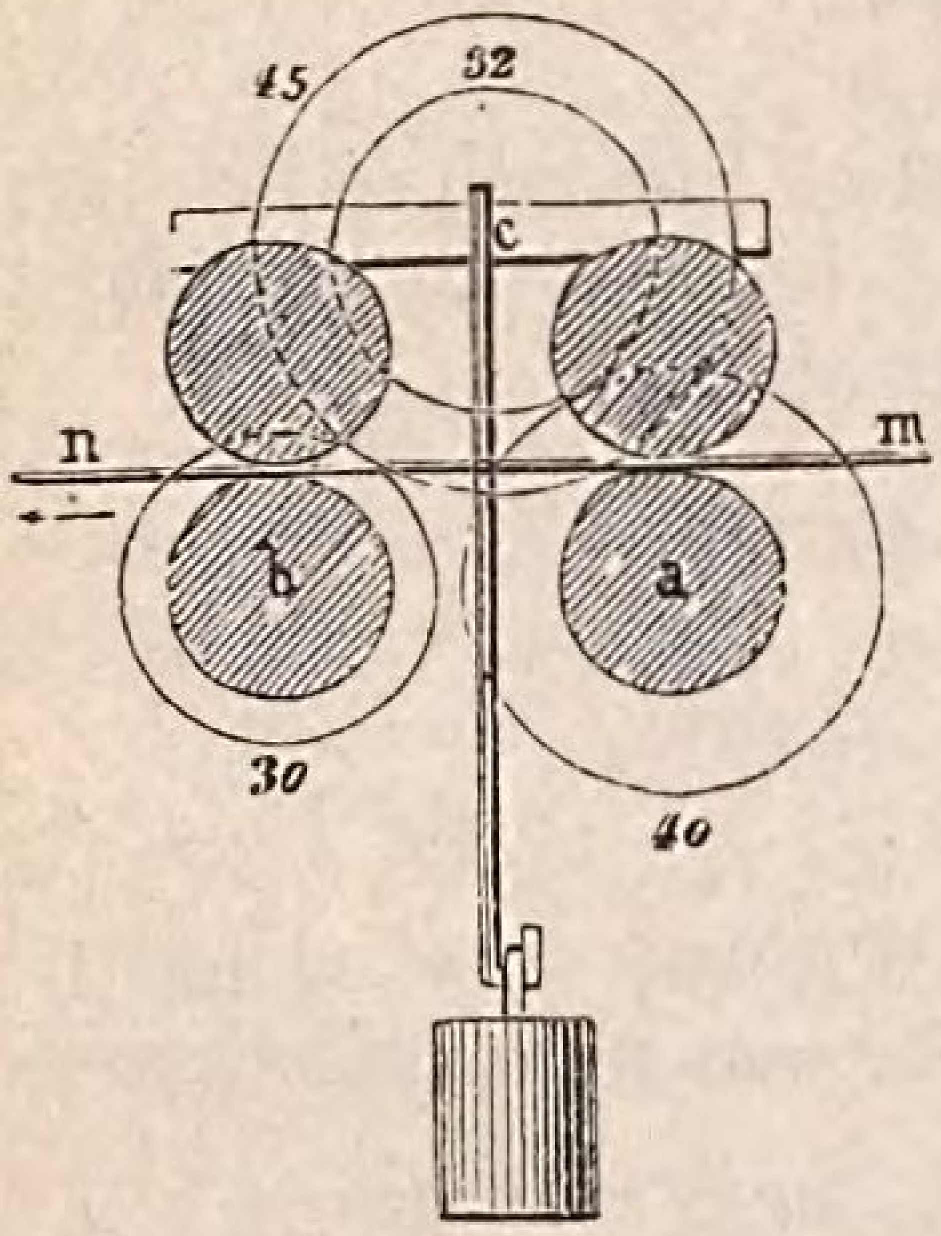
Jüllien teilt die Baumwolle in folgende Klassen, von denen die erste zu den feinsten, die letzte zu den gröbsten Garnen verarbeitet wird:

1. Lange Georgia,
2. Bourbon, Jümel, Portorico,
3. Pernambuco und ähnliche,
4. Louisiana, Cayenne,
5. Carolina, kurze Georgia,
6. Virginia und ähnliche,
7. Surate (ostindisch) und ähnliche,
8. Alexandria, Bengal.

2. **Arbeitsprozeß.** Die rohe Baumwolle wird durch den Zausler (Willow, Wipper, Opener), sodann durch die Schlagmaschinen (Batteur, Wickelmaschine) gelockert und gereinigt und durch die letztere Maschine in Form einer Watte auf eine Walze aufgewickelt. Von da gelangt sie auf die Grob- und Feinkarde, um die Fasern, welche in der Watte in allen möglichen Richtungen durch einander gehen, durch die Wirkung gebogener Drahthacken parallel zu legen. Die aus den Karden hervorgehenden Bänder haben noch immer einzelne verworrene Fasern und eine ungleiche Dicke. Deshalb werden diese Bänder auf den Streckwerken (Laminoirs, Etirages) gestreckt, mit einander vereinigt (dupliert) und wieder gestreckt ꝛc., bis sich die Ungleichheiten in der Dicke möglichst ausgeglichen haben. Bänder zu feineren Garnnummern oder zu Nähfaden bestimmt, gehen noch durch die Kämmmaschine, welche die zu kurzen Fasern ausscheidet. Hierauf gelangen die so präparierten Bänder auf die Vorspinnmaschinen (Bancs à broches oder Flyer), wo sie wieder gestreckt und schwach gedreht werden und von da auf die Feinspinnmaschinen (Watermaschine, Mulemaschine, Ringspinnmaschine, Selbstspinner oder Selfaktor). Hier wird die Vorspunst weiter ausgestreckt und gezwirnt. Endlich folgt das Numerieren, Weifen und Packen.

3. **Strecken und Duplieren.** Wird ein Band oder eine Vorspunst durch zwei Walzenpaare a, b (deren Achsen für kurze Baumwolle um 25—30, für lange um 32—38 mm aus einander liegen) in der Richtung mn durchgelassen und ist die Umfangsgeschwindigkeit von b 2mal größer als von a, so findet eine 2fache Streckung statt, d. h. das durchgehende Band erhält eine 2fache Länge. Die Verstreckung zwischen a und b ist den Umfangsgeschwindigkeiten dieser Walzen proportional. Hat das Streckwerk 3 Walzenpaare a, b, c und findet zwischen a und b eine zweifache und zwischen b und c eine $^3/_2$fache Verstreckung statt, so

wird die Gesamtverstreckung 2 . $^3/_2$ oder dreifach. Die Gesamtverstreckung, welche ein Band von der Karde an bis zur Feinspinnmaschine erleidet, wird erhalten, wenn man die Verstreckungen auf den einzelnen Maschinen mit einander multipliziert.



Vereinigt man in einem Streckwerk 6 Bänder und in einem zweiten je 5 dieser Bänder, so erhält das aus dem letztern Streckwerk hervorgehende Band 6 . 5 oder 30 ursprüngliche Bänder. Hiernach ist die Gesamtduplierung das Produkt aus den einzelnen Duplierungen.

Die Feinheit oder Nummer des ausgehenden Bandes verhält sich zu der des eingehenden Bandes, wie sich die inzwischen eingetretene Gesamtverstreckung zur Gesamtduplierung verhält.

Gewöhnlich werden die Streckwerke so eingerichtet, daß die Geschwindigkeit des einen Walzenpaares, somit die Verstreckung nach Bedarf verändert werden kann. Dies geschieht durch Veränderungsräder.

Beisp. Es sei an der vordern Walze (siehe letzte Figur) ein Getriebe mit 30 Zähnen befestigt, welches in ein Rad von 45 Zähnen eingreift. An der Zwischenachse dieses letzteren sei ein Veränderungsrad mit 32 Zähnen befestigt, welche in das an der hintern Walze a angebrachte Rad mit 40 Zähnen eingreift. Die Walze b habe 25 mm, die Walze a 21 mm Dicke; welche Streckung wird dadurch hervorgebracht?

Walze b macht $\frac{45}{30} \cdot \frac{40}{32} = 1{,}875$ Umgänge bei 1 Umgang von a; daher ist die Streckung $1{,}875 \cdot \frac{25}{21} = 2{,}232$fach.

Wird statt des Veränderungsrades mit 32 Zähnen ein solches mit 28 Zähnen eingesetzt, so bewegt sich die Walze a im Verhältnis von 32 zu 28 langsamer; es wird daher

$$\text{die Verstreckung } 2{,}232 \cdot \frac{32}{28} = 2{,}551\text{fach}.$$

Bei der folgenden Uebersicht von Hülse ist die Duplierung, welche bei der Feinkarde für die Strecke vorgenommen wird, bei der Strecke berücksichtigt, um jeden Feinkardenband in seinen Verhältnissen einzeln darzustellen.

	Karden.	Strecken.	Vorspinnen.	Feinspinnen.	Im Ganzen.
a) Für Strumpfgarn Nr. 20 aus Georgia und Louisiana.					
Zahl der Durchgänge	2	3	3	1	9
Duplierung	28	800	4	2	179200
Streckung	2660	680	68,8	13,3	1655124000
Verfeinerung . . .	95	0,850	17,2	6,65	9236,2

	Karden.	Strecken.	Vor-spinnen.	Fein-spinnen	Im ganzen.
b) Für gewöhnlichen Schuß Nr. 40 aus New-Orleans und Surate.					
Zahl der Durchgänge	2	3	3	1	9
Duplierung	22	1200	4	1	105600
Streckung	881	665	110,2	9,5	613342000
Verfeinerung . . .	40	0,554	27,5	9,5	5789,3
c) Für Kette Nr. 114 aus langer Georgia.					
Zahl der Durchgänge	2	5	4	1	12
Duplierung	52	6912	8	2	5750784
Streckung	2117	7776	325,5	12,9	69122242000
Verfeinerung . . .	40,7	1,123	40,7	6,45	12010

Die Nummer (engl.) dieser Gespinste, ohne Rücksicht auf den Abgang, ist:

	Anlage der Grobkarde.	Band der Feinkarde.	Letztes Streckenband.	Vorgarn zum Feinspinnen.	Nummer des Garnes.
bei a)	0,00216	0,206	0,175	3,02	20
„ b)	0,00689	0,276	0,153	4,21	40
„ c)	0,00949	0,386	0,435	8,84	114

4. **Zwirnung der Vorspunst.** Die Zahl der Drehungen der Vorspunst richtet sich nach der Maschine und soll betragen:

Nummer		Drehung mit Flyer	
Englisch.	Metrisch.	per 1″ engl.	per 1 m.
1/2	0,423	0,69	25,5
3/4	0,635	0,80	29,6
1	0,847	0,92	34,1
1 1/2	1,270	1,14	42,2
2	1,694	1,35	50,0
3	2,541	1,55	57,4
4	3,388	2,09	77,4
6	5,082	2,70	100,0
8	6,776	3,17	117,4

5. **Zwirnung der Garne.** Bei der Drehung des Fadens legen sich die Fasern spiralförmig um die Fadenachse herum an. Bei Garnen von derselben Sorte soll nun der Winkel, welchen die Spirallinien mit der Fadenachse bilden, dieselbe Größe haben. Dies findet statt, wenn die Anzahl Drehungen per Längeneinheit proportional dem Umfange des Fadens, also proportional der Quadratwurzel des Fadenquerschnittes, mithin verkehrt proportional der Garnnummer ist.

Es sei n die englische Garnnummer und z die Anzahl Drehungen auf 1″ engl., so soll sein:

für Kette $z = 3{,}2\sqrt{n}$ bis $z = 4{,}5\sqrt{n}$,

für Schuß $z = 2{,}7\sqrt{n}$ bis $z = 3{,}5\sqrt{n}$.

Es sei N die metrische Garnnummer und Z die Anzahl Drehungen auf 1 m Länge, so soll sein:

für Kette $Z = 128\sqrt{N}$ bis $Z = 180\sqrt{N}$,

für Schuß $Z = 108\sqrt{N}$ bis $Z = 140\sqrt{N}$.

Die kleinern Werte kommen bei kurzen, die größern Werte bei langen Fasern in Anwendung. Man kann durchschnittlich nehmen:

Nummer		Drehungen per 1″ engl.		Drehungen per 1 m.	
Englisch.	Metrisch.	Kette.	Schuß.	Kette.	Schuß.
10	8,47	16	13	600	480
20	16,94	20	16	730	584
30	25,41	23	18	830	664
40	33,88	25	20	930	744
60	50,82	30	24	1100	880
80	67,76	34	27	1250	1000
100	84,70	37	29	1360	1088
125	105,87	40	32	1480	1184
150	127,05	43	34	1590	1272
200	169,40	47	38	1740	1392

Diese Zwirnung geschieht beim Spinnen von gröbern Nummern bis Nr. 40 während der Streckung, und zwar mit einer Geschwindigkeit von 4000 bis 6000 Spindeldrehungen per Minute. Bei höhern Nummern wird dagegen bloß $^3/_5$ bis $^1/_2$ der Zwirnung während des Streckens ausgeführt und zwar bei 2500 bis 3000 Umgängen, der Rest der Zwirnung, wenn der Wagen ausgezogen ist, mit cirka 4000 bis 5000 Umgängen.

6. Leistung der Maschinen und Betriebskraft.

Nach Friedrich's Taschenbuch über Baumwollspinnerei.

	Touren pro Minute.	Anzahl Pferde.	Lieferung in 12 Stunden. Engl. Pfund.
Willow, Cylinder mit kon. Zähnen	300—400	2	1200
Opener, Trommel mit Schlagnasen Lieferbr. 900 mm; Ventilator	600—900 1000—1200	3—3,5	4500
Crighton Opener, steh. Schläger mit Zuführvorrichtung; Ventilat.	900—1000 1200—1400	3	6600
Schlagmaschine, einflügelig; Flügel, Ventilator	1100—1400 1400—1800	4	2000—3000
Karde, Deckel, Arbeiter und Wender; großer Tambour . . .	130—160	0,35	120—170
24 Deckel für feine Nr.; Tambour Patentkamm	120—140 1100—1300	0,30	40—100
Derby-Doubler; 48 Bänder; Hauptachse	200	0,2	2000
Strecke, 3 Köpfe mit 7 Ablieferungen. Vordercylinder . .	250—350	0,4	600—1000

	Touren pro Minute.	Anzahl Pferde.	Lieferung in 12 Stunden. Engl. Pfund.
Grobflyer, 76 Spindeln; Spindeltouren	450—500	0,014	pro Spindel 8—12
Mittelflyer, 120 Spindeln; Spindeltouren	600—700	0,016	6—8
Feinflyer, 140—160 Spindeln; Touren	900—1000	0,016	1,5—2,5
Extrafeinflyer, 150—170 Spindeln; Spindeltouren	1200—1300	0,02	0,5—1,3
Selfaktor, 1 2/8″ Teilung; Spindeltouren	6000—8000	0,007	
Selfaktor, 1 4/8″ Teilung für grobe Nummern; Spindeltouren . .	5000—6000	0,0068	
Ringdrossel, 300 Spindeln; Spindeltouren	7000	0,009	
Zwirnmaschine, 120 Spindeln; Touren	4000—5000	0,016	

Man rechnet den gesamten Kraftbedarf einer Spinnerei für Nr. 20 bis 60 annähernd:

1 Pferd auf 90—100 Selfaktorspindeln,
1 „ „ 75— 80 Ringdrosseln.

Eine Spinnerei, welche 1000 kg Garn von Nr. 36 bis 40 täglich liefern soll, erfordert:

	Anzahl Maschinen.	Anzahl Pferde.	Raum zur Aufstellung.
Wolf	1	3,5	30 qm
Schlagmaschinen	2	8	60
Grobkarden von 0,96 m Breite	36	12,5	216
Feinkarden von 0,96 m Breite	42	12,6	252
Strecken	6	4	60
Grobflyerspindeln	240	3,4	82
Mittelflyerspindeln	720	11,5	215
Feinflyerspindeln	1600	25,6	440
Selfaktorspindeln	24000	168	2400
	Summa	249,1	3755

Mithin kommen 96 Spindeln auf 1 Pferd. Für Schußgarn sind im Verhältnis von 4 : 5 mehr Spindeln bei derselben Nummer zu rechnen.

7. **Raum zur Aufstellung der Maschinen.** Zu obiger Fabrik mit 24000 Selfaktorspindeln werden 3755 qm Bodenfläche der Arbeitssäle, ohne Rücksicht auf die Lokalitäten für die Baumwollvorräte neben der Schlagmaschine und den Abgang, die Abtritte, Treppen 2c., erfordert. Rechnet man mit Einschluß dieser letzten Räume 4100 qm, so macht dies für Garn von Nr. 36 bis 40 per Spindel eine Fläche = 0,167 qm. Gewöhnlich wird angenommen

für die metrischen Nummern . . .	10	40	120
Fläche per 1 Spindel	0,320	0,165	0,095 qm.

8. **Abgang.** Nach Oger beträgt der Abgang bei Verarbeitung der Baumwolle zu Kettengarn Nr. 36 und Schuß Nr. 44 (engl.):

	Nach Prozenten der rohen Wolle.	Vom Gewicht des Gespinstes.
bei der ersten Schlagmaschine (éplucheur)	3,75	4,50
bei der zweiten Schlagmaschine (étaleur)	2,07	2,50
bei der Grobkarde	3,12	3,75
bei der Feinkarde	2,91	3,50
bei den Strecken	0,46	0,50
beim Vorspinnen	0,83	1,00
beim Feinspinnen	3,33	4,00
beim Weifen (Haspeln)	0,20	0,25
	16,67	20,00

9. **Berechnung einer Baumwollkarde.** (System Durskamp.) Die Tambourachse a, auf welcher die Triebrollen befestigt sind, mache 100 Umgänge per Minute; darnach berechnen sich die Geschwindigkeiten der andern Achsen wie folgt:

Die Achse v wird getrieben mittelst der Triebrollen k und k′, deren

Durchmesser seien . k = 132 mm und k′ = 210 mm;

daher Anzahl Umgänge von $v = 100 \cdot \frac{132}{210} = 63$.

Die Achse v treibt den Abnehmer b und die Streckwerkachse u und zwar

1) mit den Rädern o zu 18 Zähnen und o′ zu 39 Zähnen,
p „ 13 „ und p′ „ 120 „

und einem Zwischenrad den Abnehmer b, welcher somit macht

$$63 \cdot \frac{18 \,.\, 13}{39 \,.\, 120} = 3{,}15 \text{ Umgänge;}$$

2) mit den Rädern o zu 18, o″ zu 28 Zähnen und 2 Zwischenrädern die Streckwerkachse u, welche macht $63 \cdot \frac{18}{28} = 40{,}5$ Umgänge.

An dieser letztern ist ein Getriebe mit 85 Zähnen befestigt, welches in drei Getriebe von 35, 21 und 45 Zähnen eingreift.

Das erste ist an der hintern Walze c, das zweite an der vordern d und das dritte an der Abzugswalze e befestigt; und machen Umgänge

$$\overset{c}{40{,}5 \cdot \frac{35}{35} = 40{,}5}, \qquad \overset{d}{40{,}5 \cdot \frac{35}{21} = 67{,}5}, \qquad \overset{e}{40{,}5 \cdot \frac{35}{45} = 28{,}8}.$$

Der Abnehmer b treibt den großen Igel

1) mit den 2 Rollen J = 160 mm und J′ = 150 mm, welcher macht

$$3{,}15 \cdot \frac{160}{150} = 3{,}36 \text{ Umgänge;}$$

2) und die kannelierte Speisewalze h mit 2 Paar Winkelrädern: r mit 48, r′ mit 42 Zähnen; s mit 10 und s′ mit 72 Zähnen, welche macht

$$3{,}15 \cdot \frac{48 \,.\, 10}{42 \,.\, 72} = 0{,}5 \text{ Umgänge.}$$

Die Walze h treibt mit den Rädern t = 18, t' = 36 Zähne, nebst einem Zwischenrad, die Zuführungswalze i, welche macht

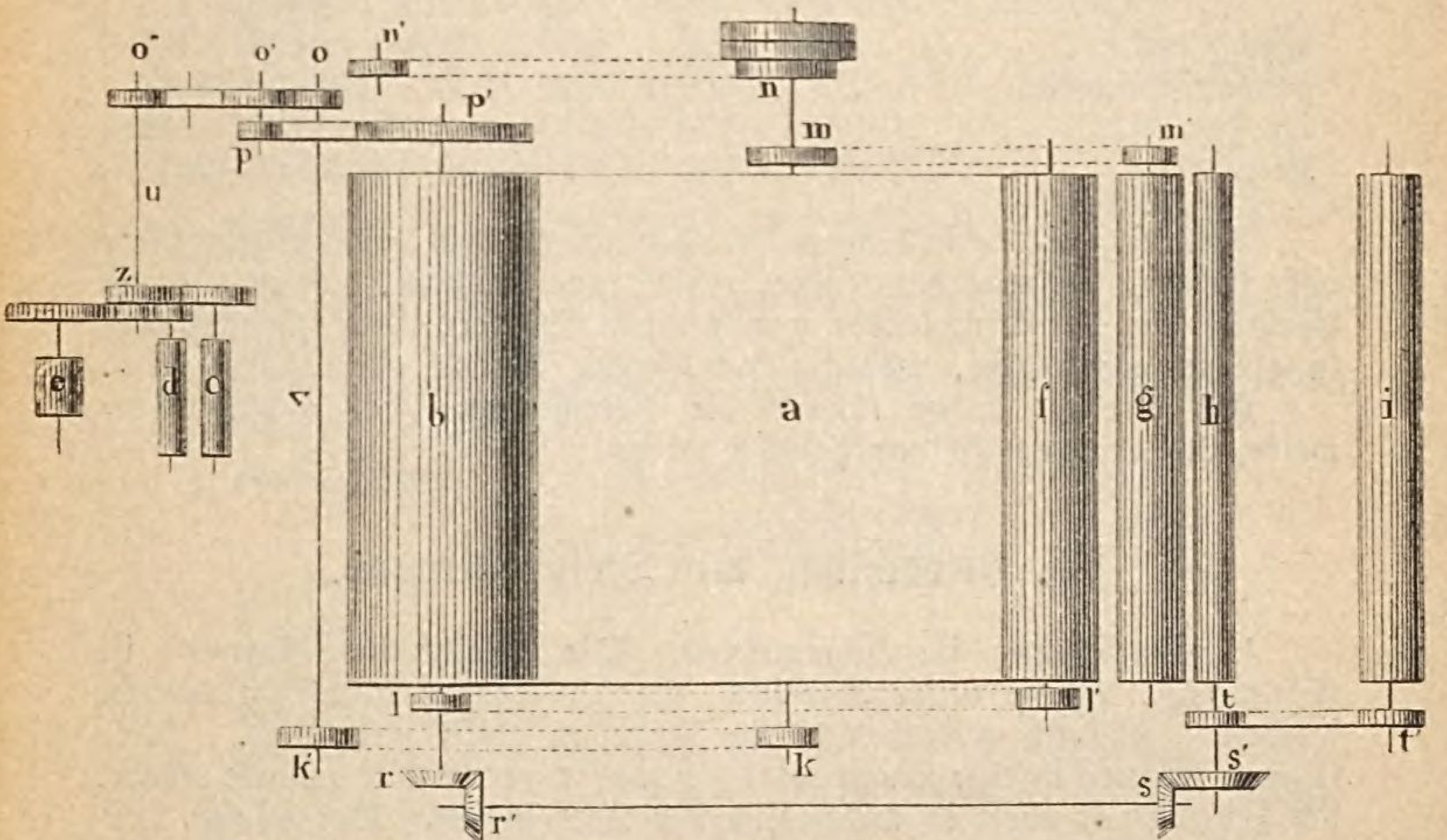
$$0{,}5 \cdot \frac{18}{36} = 0{,}25 \text{ Umgänge.}$$

Endlich treibt die Achse a mit den Rollen m = 300 und m' = 75 mm

den kleinen Igel g mit . . . $100 \cdot \frac{300}{75} = 400$ Umgängen,

und mit den Rollen n = 325 mm und n' = 115 mm,

die Kurbelachse des Kammes mit $100 \cdot \frac{325}{115} = 282$ Umgängen.



Durch diese Zusammenstellung der hier erhaltenen Umgänge mit den Durchmessern der verschiedenen Achsen erhält man die Verhältnisse ihrer Umfangsgeschwindigkeiten, wie umstehende Tabelle zeigt.

Der Tambour hat somit eine 5966mal größere Umfangsgeschwindigkeit als der Speisecylinder.

Da der Abnehmer 3711 mm Weg per Minute macht, die Achse des Kammes dagegen 282 Umgänge, so muß der letztere einen Weg von 3711 : 282 = 13 mm machen.

Wird dieser Karde eine Watte von 4 m Länge im Gewicht von 1,15 kg aufgelegt, so braucht dieselbe zu deren Verarbeitung bei obiger Geschwindigkeit 4000 mm : 50 mm = 80 Minuten = $1\frac{1}{3}$ Stunde und kardiert daher in 12 Stunden 1,15 . 12 : $1\frac{1}{3}$ = 10,35 kg.

Da ferner der Verzug zwischen dem Speisecylinder und der Abzugswalze = 130 ist, so liefert letztere aus dieser Watte ein Band von 4 . 130 = 520 m Länge oder $\frac{520}{1{,}15} = 452$ m auf 1 kg Gewicht; somit wird dieses Band die Dicke von Nr. = 0,266 metrisch haben.

	Durchmesser	Umfang	Anzahl Umgänge	Umfangsgeschwindigkeit	Verhältnis.
	in Millimetern.		per Minute.		
				mm	
Zuführungswalze . . . i	63	198	0,25	49	—
Speisecylinder . . . . h	32	100	0,50	50	1
Abnehmer . . . . b	375	1178	3,15	3711	74
Streckwerk, hintererCylinder c	30	94	40,5	3807	76
„ vorderer „ d	30	94	67,5	6345	127
Abzugswalze . . . . . e	72	226	28,8	6509	130
Großer Tambour . . . a	950	2983	100	298300	5966
Großer Igel . . . . . f	170	532	3,36	1787	36
Kleiner „ . . . . . g	100	314	400	125600	2512

Anmerkung. Ein dickeres oder dünneres Band, somit eine größere oder kleinere Leistung der Karde, erhält man dadurch, daß man durch Veränderung der Winkelräder r und s den Speisecylinder schneller oder langsamer gehen läßt, wodurch der Verzug kleiner oder größer wird.

Auf ähnliche Weise können die Berechnungen der andern Vorwerke und Spinnmaschinen geführt werden.

95. Beleuchtung mit Steinkohlengas.

1. **Einrichtung im allgemeinen.** Die Steinkohlen kommen in Retorten, wo sie unter Ausschluß von Luft der Erhitzung ausgesetzt werden. Dadurch zerlegt sich die Kohle in Koks und Gase. Diese letztern strömen in eine waagrechte, zur Hälfte mit Wasser gefüllte Röhre, die Vorlage, über, in welche sich der Teer absetzt. Der übrige Teil der Gase durchstreicht nun eiserne Röhren, um darin abzukühlen und tropfbar flüssige Teile auszuscheiden. Dieser Teil der Einrichtung heißt Kondensator. Hierauf muß das Gas von ungesunden Bestandteilen auf chemischem Wege befreit werden in Apparaten, welche Reiniger genannt werden. Endlich wird das gereinigte Gas in besondern Behältern, Gasometern, gesammelt, von wo aus dasselbe durch Leitungen dahin gelangt, wo es seine Verwendung finden soll.

2. **Wahl der Steinkohlen.** Verpulvert man Steinkohlen und glüht sie in einem bedeckten Tiegel, so blähen sich die einen auf und bilden eine zusammenhängende Masse (Backkohlen); andere kleben nur wenig zusammen, ohne sich zu blähen (Sinterkohlen), und wieder andere zeigen gar keinen Zusammenhang (Sandkohlen). Dieses Verhalten beruht wesentlich auf dem Verhältnis des Wasserstoffs zum Sauerstoff. Dieses Verhältnis ist dem Gewichte nach bei den Backkohlen 1 : 1 bis 2, bei Sinterkohlen 1 : 2 bis 3 und bei Sandkohlen 1 : 3 und darüber. Die Backkohlen, unter denen die englischen Kannelkohlen die vorzüglichsten sind, eignen sich wegen ihres großen Wasserstoffgehaltes am besten zur Gas-

bereitung. Sie liefern ein Gas von großer Leuchtkraft, dagegen wenig und schlechte Koks. Häufig benützt man Steinkohlen, welche eine ordentliche Ausbeute an Gas und Koks zugleich geben (Gas-Koks-Kohlen).

Die Steinkohlen sollen möglichst wenig Schwefelkies und Schlacken enthalten und bei der Verwendung möglichst trocken sein.

3. **Produkte der Destillation.** In der Retorte entstehen 65 bis 80 Prozent Koks. Der andere Teil besteht aus Ammoniakwasser, Teer und Leuchtgas.

Der Koks enthält 85 bis 93 Prozent Kohle; den Rest bilden Schlacke, Schwefeleisen 2c.

Das Ammoniakwasser, auch Gaswasser genannt, enthält wesentlich kohlensaures Ammoniak.

Der Teer besteht aus flüssigen und festen Kohlenwasserstoffen (Benzol, Naphthalin 2c.), sowie Kreosot, Anilin 2c.

Die Bestandteile des Leuchtgases zerfallen in:

a) Leuchtende Stoffe (Lichtgeber), wie Aethylen (C_2H_4), Naphthalin ($C_{10}H_8$) 2c.
b) Verdünnende Stoffe (Lichtträger), wie Wasserstoff, Sumpfgas und Kohlenoxyd und
c) Verunreinigende Stoffe, wie Kohlensäure, Stickstoff, Ammoniak, Schwefelwasserstoff 2c.

4. **Gasausbeute.** 1 kg Steinkohlen liefert durchschnittlich:

	Spec. Gewicht.	Schwere Kohlenwasserstoffe.	Gasmenge in Litern.
Saarkohlen . . .	0,473	0,0603	266–272
Zwickauer Kohlen .	0,600	—	247–252
Wigan Kannel .	0,518	0,1468	247–326
Newcastle Kannel .	0,601	0,2229	241–330
Boghead Kannel .	0,694	0,3019	264–430

Bei einem Versuche, welchen Regnault 1854 in Sevres machte, lieferten 100 kg Steinkohlen:

Koks	75,45 kg.	Gas dem Gewichte nach	10,51 kg.
Teer	6,73 „	Gas dem Volumen nach	22,94 kbm.
Ammoniakwasser . .	7,31 „	Hierbei verbrauchte Koks	20,43 kg.

5. **Chemische Zusammensetzung des Leuchtgases.** Nach Firle enthält Leuchtgas

		Ungereinigt.	Gereinigt.
Wasserstoff	H	37,97	37,97 Proz.
Grubengas	CH_4	39,78	39,37
Kohlenoxyd	CO	7,21	3,97
Schwere Kohlenwasserstoffe, bes.	C_2H_4	4,91	4,29
Stickstoff	N	4,81	9,99
Sauerstoff	O	0,31	0,61
Kohlensäure	CO_2	3,00	0,41
Schwefelwasserstoff	SH_2	1,06	—
Ammoniak	NH_3	0,95	—
		100,00	96,61

6. **Einfluß der Destillationsdauer auf die Zusammensetzung.** Nach Henry ist das Verhältnis der Hauptbestandteile folgendes:

Dauer der Destillation.	Spec. Gewicht.	Aus 100 Raumteilen Gas aus Wigan-Kannel-Kohle entstehen				
		Kohlenwasserstoffe schwere. Aethylen.	Kohlenwasserstoffe leichte. Grubeng.	Kohlenoxyd.	Wasserstoff.	Stickstoff.
In den ersten Stunden	0,650	13	82,5	3,2	0	1,3
	0,620	12	72,0	1,9	8,8	5,3
	0,630	12	58,0	12,3	16	1,7
In 5 Stunden . .	0,500	7	56,0	11,0	21,3	4,7
In 10 „ . .	0,345	0	20,0	10,0	60	10

Hiernach ändert sich mit der Dauer der Destillation das Verhältnis der Hauptbestandteile und zwar zu Ungunsten des leuchtfähigen Teiles. Ist die Erhitzung der Steinkohle schwach, so erscheinen nur Wasserdämpfe und Teer; in der Kirschrotglühhitze (900 bis 1000° C.) bildet sich die größte Menge Leuchtgas, in der Weißglühhitze gar keines mehr. Gewöhnlich dauert eine Destillation $4^1/_2$ bis 6 Stunden.

7. **Retorten.** Es sind dies horizontale, luftdicht schließende Röhren mit oval- oder halbkreisförmigem Querschnitt. Im Lichten beträgt: die Weite bis 0,52, die Höhe bis 0,38 und die Länge bis 2,8 m. Retorten aus feuerfestem Thon haben 6 bis 7 cm Wanddicke; sie halten 2 bis 2,5 Jahre, solche aus Gußeisen, die indessen fast ganz verschwinden, nur 8 bis 11 Monate. Die vordere Seite der Retorte trägt ein gußeisernes Mundstück, das während der Destillation mit einem gußeisernen Deckel luftdicht geschlossen wird.

In einem und demselben Ofen, ausgeführt aus feuerfesten Backsteinen, liegen 2 bis 9 Retorten neben und über einander, gleichförmig im Ofenraum verteilt, so daß die Flamme ihre äußere Oberfläche überall möglichst gleichförmig bestreichen kann.

Die Steinkohlen blähen sich in den Retorten bis zu $^2/_5$ ihres Volumens auf. Deshalb werden die Retorten nicht ganz zur Hälfte ihres Raumes mit Steinkohlen angefüllt. Man rechnet per 1 kbm Raum cirka 280 kg Steinkohlen.

8. **Brennstoffmenge zur Destillation.** Die Koks, welche die Retorten liefern, gehören zu den schlechten. Gleichwohl können sie zur Feuerung der Retortenöfen benützt werden. Man braucht auf 1 kg zu destillierende Steinkohle 0,20 bis 0,25 kg Koks. Die Gaswerke liefern also einen namhaften, anderweitig verwendbaren Ueberschuß an Koks.

Bei der Teerfeuerung leisten 50 kg Teer so viel als 76 kg Koks. Dabei wird der Teer in feiner Verteilung auf die glühenden Koks geleitet.

Häufig wird mit Generatorgasen geheizt. Der Brennstoff (Koks 2c.) gelangt in einen Schacht, in dem sich Kohlenoxyd bildet, das

sodann im Retortenofen unter Zuführung erhitzter atmosphärischer Luft sich in Kohlensäure verwandelt.

9. **Roststäche.** Sie beträgt: bei kleinen Ofenanlagen $^1/_{60}$, bei mittlern $^1/_{75}$ und bei großen $^1/_{90}$ von der innern Oberfläche der Retorten.

10. **Vorlage.** Aus den Retorten gelangen die aufsteigenden Gase durch eine Röhre von 13 bis 18 cm Durchmesser in die Vorlage. Sie ist eine horizontale Röhre mit kreis- oder U-förmigem Querschnitt, die bis zur Hälfte mit Wasser gefüllt ist. Die aufsteigende Röhre, vom Mündungsstück der Retorte ausgehend, führt über den Wasserspiegel hinauf, biegt dann um und taucht mit ihrer Mündung einige Centimeter in das Wasser. Die Tiefe dieser Tauchung bedingt wesentlich den Druck des Gases in der Retorte, sie soll also so gering als möglich sein. Je kleiner indessen die Tauchung verlangt wird, um so größer muß die Oberfläche des Wassers in der Vorlage sein, damit diese Oberfläche durch das Hervortreten des Gases möglichst ruhig bleibt. Man gibt der Vorlage gewöhnlich das halbe Volumen der Retorten. Hier setzt sich der Teer und Ammoniakflüssigkeit über dem Wasser ab, welche beide seitwärts abgeleitet werden.

11. **Kondensator.** Die Gase strömen mit einer Temperatur von 70 bis 90° aus der Vorlage in ein System von vertikal stehenden, von Luft oder Wasser umgebenen Röhren, wovon jede unten in das Wasser eines luftdicht schließenden Behälters eintaucht. Durch diese Röhren und das Wasser muß das Gas cirkulieren, sich auf die Temperatur der Umgebung abkühlen und mitgerissene Teerbestandteile absetzen. Die Oberfläche des Luftkondensators soll cirka 0,5 der innern Oberfläche der Retorten sein. Bisweilen läßt man das Gas noch in ein anderes Gefäß, Scrubber genannt, strömen. Dieser ist mit kleinen Koksstücken, auch Reisig, Thonkugeln gefüllt, welche beständig angenetzt werden. Beim Durchstreichen derselben wird das Gas ganz von Teerteilen befreit.

12. **Exhaustor.** Das Gas hat verschiedene Widerstände auf seinem Weg von der Retorte durch die Vorlage und den Kondensator zu überwinden. Es hat dies eine Vermehrung seiner Spannung in den Retorten und dadurch Gasverluste und Graphitbildung zur Folge. Es wird deshalb eine Vorrichtung (Exhaustor) angewendet, welche die Gase aus dem Kondensator saugt und ihren Druck in den Retorten auf den der äußeren Luft vermindert. Einer dieser Apparate ist die Kolbenpumpe mit zwei Cylindern von Schmitz, ein anderer die Centrifugalpumpe von Schiele, ein weiterer die Dampfstrahlpumpe von Körting, Bourdon 2c. Es muß Vorsorge getroffen werden, daß der Exhaustor je nach der Gasproduktion mehr oder weniger arbeitet.

13. **Chemische Reinigung.** Die Gase treten aus dem Kondensator in ein luftdicht schließendes Gefäß, das mehrere über einander liegende Siebe enthält. Diese wurden früher mit angefeuchtetem, gelöschtem Kalkpulver belegt, später aber mit der Laming'schen Masse, bestehend aus einem Gemenge von Eisenoxydhydrat, Kalkhydrat und schwefelsaurem Kalk. Während das Gas diese Siebe durchstreicht, saugen diese Stoffe

die unreinen Bestandteile (Ammoniak, Kohlensäure, Schwefelwasserstoff ꝛc.) auf. In neuester Zeit wendet man dafür häufig künstlich dargestelltes Eisenoxydhydrat (Deicke'sche Masse) oder auch natürliches fein gemahlenes Eisenerz an. Die Oberfläche der Siebe soll für Kalk $^1/_2$ bis $^3/_4$ von der innern Oberfläche der Retorten betragen, für Hydrate kann sie zweimal kleiner sein. Fällt diese Fläche groß aus, so wendet man zwei und mehr solcher Reiniger an.

14. **Gasbehälter.** Das so gereinigte Gas strömt in den Gasbehälter (Gasometer). Es ist dies eine wasserdichte cylindrische Grube, die mit Wasser gefüllt ist und in welche eine cylindrische Glocke aus Blech eintaucht. Das Gas sammelt sich zwischen der Oberfläche des Wassers und derjenigen der Glocke und erhält durch das Gewicht der letzteren einen Druck, welcher durch Gegengewichte am Mantel reguliert werden kann. Der Druck dieses Gases wird durch ein Manometer (S. 321), das mit gefärbtem Wasser gefüllt ist, gemessen. Es sei

G der stündliche Gasverbrauch in Kubikmetern,
t die Anzahl der Brennstunden am kürzesten Tag,
V das Volumen der mit Gas angefüllten Glocke,
d der Durchmesser der Glocke,
P ihr Gewicht und
p der Ueberdruck des Gases per 1 qm Fläche, so ist

G t der größte Gasverbrauch, also auch die Gasmenge, welche die Gasanstalt in 24 Stunden zu liefern hat. Folglich liefert sie in 1 Stunde $^1/_{24}$ G t und in 24 — t Stunden die Gasmenge

$$V = G\,t\left(\frac{24 - t}{24}\right).$$

Da der Gasdruck aufwärts $= 0{,}25\, d^2 \pi\, p$, so wird ohne Rücksicht auf den Gewichtsverlust durch Eintauchen eines Teiles der Wand und auf Gegengewichte

$$0{,}25\, d^2 \pi\, p = P.$$

Bei kleinen Glocken macht man die Höhe gleich dem Halbmesser. Bei größeren Glocken dagegen muß die Höhe, wegen der Wirkungen des Windes und um keine zu tiefen Gruben zu erhalten, kleiner genommen werden.

Die Blechdicke e in Millimeter kann berechnet werden nach der Formel

$$e = 1 + 0{,}12\, d.$$

Entsprechende Werte sind:

Durchmesser der Glocke .	5	10	20	30	40 m.
Höhe derselben . . .	2,5	5	8	10	12 „
Wanddicke	1,6	2,4	3,6	4,8	5,8 mm.
Gasdruck p	38	55	70	83	95 kg.
Manometerstand . . .	4	6	8	10	11 cm.

15. **Regulator.** Er wird zwischen den Gasometer und den Anfang der Gasleitung gestellt und soll bewirken, daß das Gas mit dem erforderlichen Druck in die Leitung trete. Er ist ein Gasometer im kleinen

Maßstab, bei welchem die Eintrittsöffnung durch einen Konus sich verengt, wenn die Gasglocke steigt, d. h. wenn das Gas mit zu großem Druck aus dem Gasometer kommt, und sich erweitert, wenn das Gas mit zu niederm Druck zuströmt.

16. **Gasleitung.** Die Formel zur Berechnung des Druckverlustes, welchen das Gas in der Rohrleitung erleidet, ist nach S. 325

$$h = 0{,}025 \cdot 0{,}0007 \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

wo 0,0007 als specifisches Gewicht des Leuchtgases (Mittel aus den auf S. 471 angegebenen Werten) angenommen ist.

Nach dieser Formel ist in der folgenden Tabelle der Druckverlust für eine Länge L = 100 m und für verschiedene Geschwindigkeiten berechnet. Multipliziert man noch den Querschnitt der Leitung mit der Geschwindigkeit, so erhält man das Volumen des Gases, das per 1 Sekunde von der Leitung geliefert wird.

Je weiter hiernach die Leitung ist, um so geringer wird die Reibung des Gases an den Wänden der Röhren, um so geringer somit der Verlust an Druck und um so weniger muß der Gasometer belastet werden, damit das Gas mit der erforderlichen Geschwindigkeit in den Brennern ausströmen kann.

Man ersieht ferner aus der Tabelle, daß eine und dieselbe Röhre viel oder wenig Gas liefert, je nachdem sie kurz oder lang ist, einen großen oder kleinen Druckverlust erleiden kann u. s. w. So liefert eine Röhre von 8 cm Weite 20,1 Liter Gas mit 27,8 mm Druckverlust auf 100 m Länge; annähernd dieselbe Gasmenge auf die nämliche Entfernung eine Röhre von 10 cm Weite mit 6,04 mm Druckverlust; ferner eine Röhre von 16 cm Weite mit 0,56 mm Druckverlust u. s. w.

Erfahrungsgemäß kann man für enge Röhren nehmen

Anzahl Brenner . . .	1	5	10	20	50	100	200
Durchmesser der Leitung	1	2	2,5	3	4,3	5,5	6,5 cm.

Dichte Gase können eine 2mal größere Anzahl Brenner unterhalten.

Zu den engen Röhren bis auf 3,5 cm Weite werden gezogene Röhren von Schmiedeisen verwendet. Röhren aus Blei sind leicht Verletzungen ausgesetzt; sie sollen daher nur ausnahmsweise, z. B. wo häufige Biegungen vorkommen, benützt werden.

Bei einer Abzweigung einer städtischen Gasleitung kennt man die Länge der Leitung, die Gasmenge, welche sie liefern soll und den Verlust an Druck, der eintreten darf; daraus ergibt sich mittelst der Tabelle annähernd die Weite der Röhre.

17. **Gasdruck.** Das Gas wird aus den Gasbehältern einer städtischen Gasanstalt mit einem Druck von höchstens 150 mm Wassersäule, gewöhnlich aber mit einem solchen von 80 bis 100 mm entlassen. In Zweigleitungen, in deren Nähe die Brenner angebracht sind, jedoch vor der Gasuhr, ist ein Druck von 15 bis 18 mm genügend. Die Gasuhr

Gasmenge per Sekunde und Druckverlust per 100 m Länge.

Geschwindigkeit v	Durchmesser der Leitung 2 cm.		4 cm.		6 cm.		8 cm.		10 cm.	
	Druck-verlust.	Gas-menge.	Druck-verlust.	Gas-menge.	Druck-verlust.	Gas-menge.	Druck-verlust.	Gas-menge.	Druck-verlust.	Gas-menge.
m	mm	Liter	mm	Liter	mm	Liter	mm	Liter	mm	Liter
0,6	1,61	0,19	0,85	0,75	0,54	1,70	0,40	3,01	0,34	4,71
0,8	2,85	0,25	1,42	1,01	0,95	2,26	0,71	4,02	0,57	6,28
1,0	4,46	0,31	2,23	1,26	1,49	2,83	1,12	5,01	0,89	7,84
1,2	6,44	0,38	3,22	1,51	2,15	3,39	1,61	6,02	1,29	9,41
1,4	8,74	0,44	4,37	1,76	2,91	3,96	2,18	7,04	1,75	11,0
1,6	11,4	0,50	5,70	2,01	3,80	4,52	2,85	8,06	2,28	12,6
1,8	14,4	0,57	7,22	2,26	4,80	5,09	3,60	9,05	2,88	14,1
2,0	17,8	0,63	8,92	2,51	5,93	5,65	4,25	10,1	3,56	15,7
2,2	21.5	0,69	10,7	2,77	7,17	6,22	5,38	11,1	4,30	17,3
2,4	25,7	0,75	12,8	3,01	8,57	6,78	6,42	12,1	5,24	18,8
2,6	30,2	0,82	15,1	3,27	10,1	7,35	7,55	13,2	6,04	20,4
2,8	35,0	0,88	17,5	3,52	11,7	7,99	8,75	14,1	6,99	22,0
3,0	40,2	0,94	20,1	3,77	13,4	8,48	10,0	15,1	8,04	23,5
3,3	49,0	1,03	24,5	4,15	16,3	9,33	12,2	16,6	9,80	25,9
3,6	57,8	1,13	28,9	4,53	19,3	10,2	14,4	18,1	11,6	28,2
4,0	71,4	1,26	35,7	5,03	23,8	11,3	17,8	20,1	14,3	31,4
4,5	90,3	1,41	45,1	5,66	30,1	12,7	22,6	22,6	18,1	35,3
5,0	111	1,57	55,5	6,28	37,1	14,1	27,8	25,1	22,3	39,2

	Durchmesser der Leitung 12 cm.		14 cm.		16 cm.		18 cm.		20 cm.	
0,6	0,27	5,78	0,23	9,24	0,20	12,1	0,18	15,3	0,16	18,8
0,8	0,48	9,05	0,41	12,5	0,35	16,8	0,32	20,4	0,29	25,1
1,0	0,74	11,3	0,64	15,4	0,56	20,1	0,50	25,4	0,45	31,4
1,2	1,07	13,6	0,84	18,5	0,85	24,1	0,72	30,5	0,64	37,7
1,4	1,46	15,8	1,25	21,5	1,09	28,1	0,97	35,6	0,87	44,0
1,6	1,90	18,1	1,63	24,6	1,42	32,2	1,27	40,7	1,14	50,2
1,9	2,68	21,5	2,36	29,3	2,01	38,2	1,79	48,2	1,61	59,7
2,2	3,25	24,9	2,92	33,9	2,69	44,2	2,39	56,0	2,15	69,1
2,5	4,64	28,3	3,99	38,5	3,48	50,3	3,82	63,6	2,79	78,5
2,8	5,83	31,7	4,99	43,1	4,37	56,3	3,90	71,2	3,50	87,9
3,1	7,14	35,1	5,98	47,1	5,36	62,3	4,72	78,9	4,29	97,3
3,4	8,60	38,4	7,36	52,3	6,26	68,4	5,73	86,5	5,16	107
3,8	10,7	43,0	9,17	58,5	8,05	76,4	7,16	96,7	6,44	119
4,2	13,1	47,9	11,2	64,7	9,93	84,4	8,54	107	7,87	132
4,6	15,7	52,5	13,4	70,8	11,8	92,5	10,46	117	9,43	144
5,0	18,5	57,1	15,9	76,9	13,9	100	12,4	127	11,1	157
5,5	22,5	62,7	19,2	84,7	16,9	111	15,0	140	13,5	173
6,0	26,8	68,5	22,9	92,4	20,1	121	17,8	153	16,1	188

Geschwindigkeit v	Durchmesser der Leitung 24 cm.		28 cm.		32 cm.		36 cm.		40 cm.	
	Druckverlust.	Gasmenge.	Druckverlust.	Gasmenge.	Druckverlust.	Gasmenge.	Druckverlust.	Gasmenge.	Druckverlust.	Gasmenge.
m	mm	Liter	mm	Liter	mm	Liter	mm	Liter	mm	Liter
1,0	0,37	45,2	0,32	61,6	0,28	80,4	0,25	102	0,22	126
1,2	0,54	54,3	0,47	72,9	0,43	96,5	0,36	122	0,32	151
1,4	0,73	63,3	0,63	86,2	0,55	112	0,44	143	0,44	176
1,6	0,95	72,4	0,81	98,5	0,71	129	0,68	163	0,57	202
1,8	1,20	81,4	1,03	111	0,90	148	0,80	183	0,72	226
2,0	1,48	90,5	1,27	123	1,06	161	0,99	203	0,89	251
2,2	1,79	99 5	1,54	135	1,35	177	1,19	224	1,07	276
2,4	2,14	108	1,84	148	1,61	193	1,43	244	1,31	301
2,6	2,52	118	2,16	160	1,88	209	1,67	265	1,51	327
2,8	2,92	128	2,49	172	2,18	225	1,95	285	1,75	352
3,0	3,35	136	2,84	185	2,50	241	2,23	305	2,01	377
3,3	4,08	149	3,50	203	3,05	265	2,71	336	2,45	415
3,6	4,82	159	4,13	222	3,60	290	3,22	366	2,90	452
4,0	5,95	181	5,10	246	4,45	322	3,97	407	3,57	503
4,5	7,53	204	6,45	277	4,65	362	5,02	458	4,55	565
5,0	9,26	226	7,90	308	6,95	402	6,18	509	5,56	628
5,5	11,2	249	9,60	338	8,45	442	7,50	560	6,75	691
6,0	13,4	271	11,5	368	10,1	482	8,90	611	8,02	754

	Durchmesser der Leitung 44 cm.		48 cm.		52 cm.		56 cm.		60 cm.	
1,0	0,20	152	0,18	181	0,17	212	0,16	246	0,15	283
1,2	0,29	182	0,27	217	0,24	255	0,21	295	0,21	339
1,4	0,40	213	0,36	253	0,32	297	0,36	345	0,29	396
1,6	0,52	243	0,47	289	0,42	340	0,41	394	0,38	472
1,8	0,66	274	0,60	326	0,53	382	0,51	447	0,48	509
2,0	0,81	304	0,74	362	0,66	425	0,62	493	0,59	565
2,2	0,97	334	0,89	398	0,79	467	0,77	542	0,72	622
2,4	1,15	365	1,07	434	0,95	509	0,92	591	0,86	679
2,6	1,37	395	1,26	470	1,12	552	1,08	640	1,01	735
2,8	1,59	426	1,46	507	1,30	595	1,24	690	1,17	792
3,0	1,83	456	1,67	543	1,49	637	1,49	739	1,34	848
3,3	2,23	502	2,04	597	1,81	701	1,75	813	1,63	933
3,6	2,63	547	2,41	651	2,14	765	2,06	887	1,93	1018
4,0	3,25	608	2,97	724	2,64	849	2,55	985	2,38	1131
4,5	4,10	684	3,76	814	3,34	955	3,22	1108	3,01	1272
5,0	5,05	760	4,68	905	4,12	1062	3,95	1231	3,70	1414
5,5	6,14	836	5,60	995	5,19	1168	4,82	1355	4,50	1555
6,0	7,92	912	6,70	1085	6,17	1274	5,73	1478	5,36	1696

bewirkt einen Druckverlust von 3 bis 5 mm. Durch die Brenner geht das Gas mit 2 bis 20 mm Druck.

Der Druck der Luft in der Atmosphäre nimmt von unten nach oben ab. In der Formel von Babinet (S. 323)

$$h = 15976 \frac{B - b}{B + b} \left(1 + \frac{T + t}{500}\right)$$

über die Höhenmessung bezeichnet h die Höhe der obern Station über die der untern. Nun sei h = 1 m, B = 10 m (Wasserdruckhöhe), so weicht b nur wenig von B ab und es kann B + b = 2 . 10 = 20 m gesetzt werden. Sind die Temperaturen $T = t = 10^0$, so gibt die vorstehende Formel B — b = 0,0012 m, d. h. der Luftdruck nimmt auf je 1 m Höhe ab um 0,0012 m.

Es ist daher nicht gleichgültig, ob das Gas, von einer bestimmten Stelle ausgehend, horizontal, aufwärts oder abwärts geführt wird. Nehmen wir an, es werde das Gas nach allen drei Richtungen durch gleich weite Röhren gleich weit geleitet und es habe am Ende der horizontalen Leitung noch 0,08 m Ueberdruck. An dieser Stelle sei der Luftdruck 10 m, also der absolute Gasdruck 10,08 m.

Bei der steigenden wie bei der fallenden Leitung ist an deren Ende der Gasdruck 10,08 m, während der Luftdruck an ersterem Ort kleiner, an letzterem größer als 10 m. Geht die eine Leitung z. B. um 50 m über, die andere um 50 m unter die Horizontale, so ändert sich der Luftdruck um 0,0012 . 50 = 0,06 m. Daher ist der Luftdruck

an der obern Station . . . . 10 — 0,06 = 9,94 m,
an der untern Station . . . 10 + 0,06 = 10,06 „

und der Ueberdruck des Gases

an der obern Station . . . . 0,08 + 0,06 = 0,14 m,
an der untern Station . . . 0,08 — 0,06 = 0,02 „

Der Gasdruck an der obern Station wird daher zu groß, an der untern zu klein. Um diesen Druck möglichst gleich groß zu erhalten, macht man steigende Leitungen enger, fallende weiter als horizontale.

18. **Gasuhr.** Das Gas wird, bevor es das Gaswerk verläßt, gemessen; ebenso werden diejenigen Gasmengen gemessen, welche in den einzelnen Häusern konsumiert werden, weil sich danach die Größe der Entschädigung für den Gasverbrauch richtet. Zugleich liegt in diesem Messen eine Kontrolle über die Verluste, welche in der Leitung entstehen. Die Konstruktion der Gasuhren ist sehr verschieden. Es gibt trockne und nasse Gasmesser. Die nassen haben ein Flügelrad mit 4 Schaufelräumen, wovon die beiden untern in Wasser eingetaucht sind. Füllt sich durch Zuströmen ein solcher Raum mit Gas, so treibt es ihn nach oben, wo er das Gas abgibt. Aus dem Volumen der Schaufelräume und der Anzahl Drehungen des Rades ergibt sich das Volumen des Gases. Jede Gasuhr wird vor ihrem Gebrauche verifiziert.

19. Anzahl der Brennstunden des ganzen Jahres.

Mit Einschluß der Sonn- und Feiertage.

	Januar.	Februar.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	August.	September.	Oktober.	November.	Dezember.	Summa.
Bis Tagesanbruch von 4 Uhr Mrgs.	137	98	71	28	2	—	—	16	48	80	110	137	727
5 „ „	106	70	40	3	—	—	—	—	18	49	80	106	472
6 „ „	75	42	9	—	—	—	—	—	—	18	50	75	269
7 „ „	44	14	—	—	—	—	—	—	—	—	20	44	122
von der Dämmerung bis 6 Uhr Abds.	65	33	4	—	—	—	—	—	2	31	62	80	277
7 „ „	96	61	31	4	—	—	—	14	22	62	92	111	493
8 „ „	127	89	62	28	4	—	—	40	52	93	122	142	759
9 „ „	158	117	93	58	29	8	13	71	82	124	152	173	1178
10 „ „	189	145	124	88	60	38	44	102	112	155	182	204	1443
11 „ „	220	173	155	118	91	68	75	133	142	186	212	235	1808
12 „ „	251	201	186	148	122	98	106	164	172	217	242	266	2173
die ganze Nacht	512	411	382	295	242	195	217	307	345	421	473	527	4327

20. **Brenner.** Hauptformen: Einfacher Strahlbrenner, wie bei einer Kerze; Zweiloch- oder Fischschwanzbrenner, auch Manchesterbrenner genannt, dessen zwei Löcher unter cirka 90 Graden gegen einander gerichtet sind; Argand- oder Rundbrenner mit 15 bis 45 Löchern, welche kreisförmig unter einander angebracht sind; Schnitt- oder Fledermausbrenner mit einem Schnitt; Zwillingsbrenner mit zwei schwach gegen einander geneigten Schnitten; Dumasbrenner mit kreisförmigem Schnitt u. s. w. Jeder Form der Brenner entspricht eine günstigste Höhe der Flamme. Die günstigste Höhe liegt zwischen 8 bis 13 cm. Für diese vorteilhafte Höhe ist nach Christison und Turner:

Brenner.	Einfacher Strahl.	Fledermausbrenner		Fischschwanzbrenner.	Argand'scher Brenner	
		Klein.	Groß.		mit 24 Löchern.	mit 42 Löchern.
Lichtmenge aus gleichviel Gas	100	135	164	138	183,5	182,3

Im allgemeinen gilt die Regel, daß bei gegebenem Gasverbrauch die Brenner weit, die Geschwindigkeit des Gases unter der Oeffnung daher klein oder doch eine sehr mäßige sein soll. Nach der Formel über den Ausfluß des Gases findet man für $g = 9{,}81$ m und $s = 0{,}0007$

für den Gasdruck . .	2	4	7	10	15	20 mm,
die Gasgeschwindigkeit	6,7	9,5	12,7	15	18,3	21,2 m.

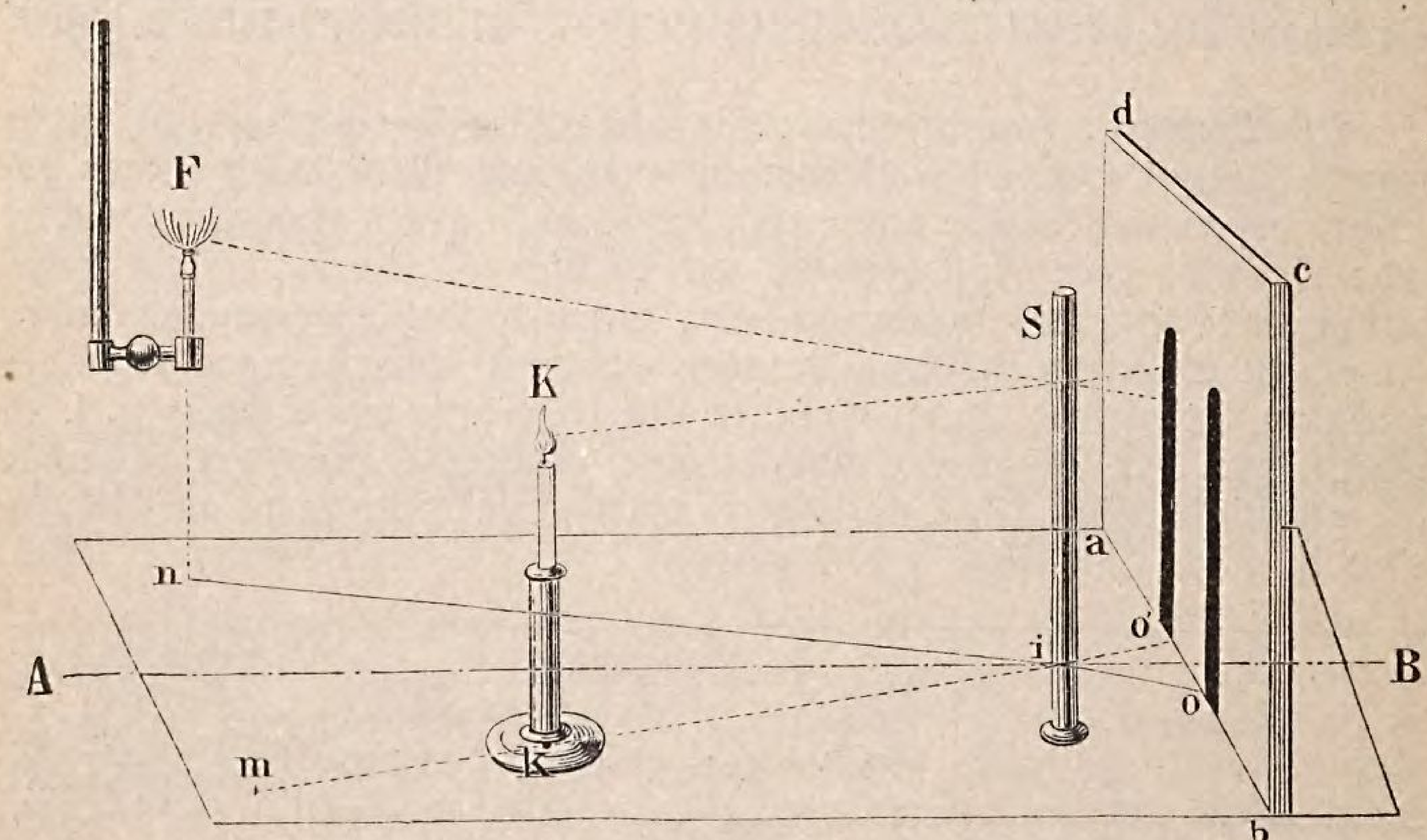
Hiernach scheint eine Geschwindigkeit von 6 bis 12 m die zweckmäßigste zu sein.

21. **Messung der Lichtstärke.** Das Licht, welches eine Flamme auf irgend eine Fläche wirft, nimmt im quadratischen Verhältnis zur Entfernung ab, so daß z. B. bei einer doppelt so großen Entfernung die Intensität des Lichtes abnimmt von 1 auf 1/4 oder daß eine 4mal stärkere Flamme erfordert wird, um dieselbe Beleuchtung hervorzubringen. Auf diesem Prinzipe beruhen die verschiedenen Instrumente, Photometer genannt, zur Bestimmung der Lichtstärke.

Bei den photometrischen Messungen vergleicht man die Intensitäten zweier Flammen unter einander, wovon die eine als Normalflamme betrachtet wird.

In England ist zur Erzielung der Normalflamme eine Kerze aus gereinigtem Walrat (Spermacet) vorgeschrieben, wovon 6 auf 1 Pfund gehen und die in der Stunde bei stetiger Verbrennung 120 grains oder 4,78 Gramm Stoff verbraucht. In Deutschland wird hierzu häufig eine Kerze aus Paraffin verwendet, wovon 6 Stück aus 500 Gramm angefertigt werden.

a) Photometer von Rumford. Bei diesem besteht das Eigentümliche darin, daß der Schatten, welchen ein undurchsichtiger Körper



auf eine Fläche wirft, um so schwärzer aussieht, je stärker diese Fläche beleuchtet wird, und daß gleich schwarze Schatten gleiche Lichtstärken andeuten. Dieses Instrument besteht aus einem horizontal liegenden Tische von cirka 2 m Länge, einer aufrecht aufgestellten und mit weißem Papier überzogenen Fläche a b c d, und einem Stabe, welcher ganz nahe zu dieser Fläche auf der Mittellinie A B des Tisches in dem Punkte i

aufrecht aufgestellt ist. Man setze nun diese Vorrichtung in ein ganz finsteres Lokal, bringe über irgend einem Punkte n die zu untersuchende Flamme F an, stelle dagegen auf einem Punkte der Linie m i o', welche zur Mittellinie A B unter gleichem Winkel wie n i o steht, das als Einheit angenommene Kerzenlicht K auf, so wird der Stab i durch letzteres einen Schatten o' auf die Fläche a b c d, durch die Flamme F dagegen einen Schatten in o werfen. Je näher nun das Licht K gegen die Fläche gerückt wird, desto schwärzer wird der Schatten in o', und man wird also leicht durch Hin- und Herrücken auf der Linie m i o' dasselbe auf einen Punkt bringen können, wo die beiden Schatten in o und o' einander gleich werden. Die Intensitäten der beiden Flammen F und K verhalten sich alsdann zu einander, wie die Quadrate der Entfernungen.

Beisp. Es sei die Entfernung des Gaslichtes F von dem Schatten = 2 m, diejenige des Kerzenlichtes, bei welcher die beiden Schattenbilder einander gleichkommen, = 0,9 m; welche Stärke hat das Gaslicht?

Bezeichnen F und K die bezüglichen Intensitäten, so wird

$$F : K = 2^2 : 0{,}9^2, \text{ woraus } F = 4{,}94\ K,$$

d. h. das Gaslicht ist 4,94mal stärker als das Kerzenlicht.

b) Photometer von Bunsen. Man stellt zwischen die beiden Flammen einen Papierschirm, welcher einen Fettflecken enthält, der durchsichtig wird. Nun rückt man den Schirm zwischen den Flammen hin und her, bis der Fleck undurchsichtig wird. Oder man nehme als Schirmfläche zwei an einander liegende dünne Papierflächen und schiebe zwischen sie ein Blättchen von dickerem Papier, so spielt dieses Blättchen die gleiche Rolle wie der frühere Fettfleck. Alsdann verfährt man mit den Entfernungen der Flammen vom Schirm wie beim Rumford'schen Apparat.

22. **Passende Lichtstärke.** Für Uhrmacher 1,5 Kerzen, Dreher und Schlosser 3, Bandstühle 4, Spinnereien und Webereien 8, Druckereien 10, Straßenbeleuchtung 10 bis 15. Die Straßenbeleuchtung großer Städte hat Brenner, welche 100 bis 180 Liter Gas in der Stunde verbrauchen.

Leuchtkraft. Man denke sich von zwei Leuchtstoffen in der Zeiteinheit gleiche Gewichtsmengen stetig verbrannt, so liefert jeder Stoff eine bestimmte Lichtstärke. Nimmt man nun die Lichtstärke des einen Stoffes als Einheit an, so ist die Lichtstärke des anderen Stoffes seine Leuchtkraft. Es ist für 7,78 Gramm Stoff

	Leuchtkraft.
Spermacet	1
Wachs	0,924
Stearin	0,778
Talg	0,830
Paraffin, beste Qualität	1,145
Petroleum, bestes amerikanisches .	1,810
Englisches Normalleuchtgas . . .	0,991

Dieses englische Normalgas hat ein specifisches Gewicht = 0,0066; es geben davon 5 engl. Kubikfuß in der Stunde 12 Lichteinheiten, d. h. so viel Licht als 12 Normalkerzen aus Spermacet.

Legt man diese letztere Einheit zu Grunde, so geben 5 Kubikfuß = 141,6 Liter Gas folgende Leuchtkraft im Argandbrenner:

	Normalkerzen.
Englisches Normalgas	12
Newcastle Kannelkohle	24,6
Bogheadkohle	36,2
Saarkohle	10,9
Petroleumgas	46,2
Holzgas	14,6
Oelgas	32,6

Leuchtwert. Er entsteht, wenn man die Lichtmengen bestimmt, welche mit gleichem Geldaufwand erzielt werden, und sodann diese Lichtmengen vergleicht. Kostet z. B. das Gas aus Saarkohlen nur 0,35 von dem aus Boghead, so verhalten sich die Lichtmengen, auf gleichen Geldwert bezogen, wie

$$10{,}9 : 36{,}2 \,.\, 0{,}35 \text{ oder wie } 1 : 1{,}163.$$

Hiernach kann auch der Leuchtwert eines Gases berechnet werden, das aus einer Mischung zweier Kohlensorten gebildet wird. Es seien z. B. 60 Prozent Saarkohlen mit 40 Prozent Boghead gemischt, so wird der Leuchtwert der Mischung, unter Benützung der letzten Zahlen

$$0{,}60 \,.\, 1 + 0{,}40 \,.\, 1{,}163 = 1{,}065.$$

Mithin verhalten sich die Leuchtwerte von Gas aus Saarkohlen, Boghead und der Mischung wie 1 : 1,163 : 1,065.

23. **Wirkungsgrad bei der Gaserzeugung.** Es werden aufgewendet: Steinkohlen und Koks und gewonnen: Gas, Teer und Koks. Dividiert man die Wärme, welche die gewonnenen Stoffe enthalten, durch die Wärme, welche die aufgewendeten Stoffe enthalten, so entsteht der Wirkungsgrad. Nach dem auf S. 471 angegebenen Versuche von Regnault ist nun:

Aufgewendete Wärme von

100 kg Steinkohlen zu 7000 Kal. . . .	= 700000 Kal.
20,43 „ Koks „ 5800 „ . . .	= 118494 „
Zusammen	= 818494 Kal.

Gewonnene Wärme aus

75,45 kg Koks zu 5800 Kal.	= 437610 Kal.
6,73 „ Teer „ $5800 \cdot \frac{76}{50}$ Kal. . . .	= 59332 „
10,51 „ Gas „ 11580 Kal.	= 121706 „
Zusammen	= 618648 Kal.

Daher Wirkungsgrad . . 618648 : 818494 = 0,755.

Tabellen.

96. Maße und Gewichte.

Aegypten. 1 Pick Stambuli = 0,686 Meter; 1 Pick Endasch = 0,638 Meter.
1 Oka = 400 Drachmen = 1,235 Kilogramm.
1 Cantar forforo = 100 Rotoli = 4,3237 kg.

Belgien: wie in Frankreich. 1 Elle = 0,695 Meter.

Brasilien: 1 Pe = 12 Polligados (zu 12 Linhas) = 0,32912 Meter.
1 Libbra = 459 Gramm. 1 Quintal = 4 Arrabos zu 32 Libbras.

China: 1 Covid = 10 Punti. 1 Tschan = 10 Covidi.
1 Li = 180 Tschan = 575,5 Meter.
1 Picol = 100 Katis zu 16 Taels. 1 Katti = 604,75 Gramm.

Dänemark: wie in Preußen.

Deutsches Reich: franz. Maßsystem (seit 1. Januar 1872).
Meter heißt auch Stab, Centimeter Neuzoll, Millimeter Strich, Dekameter Kette, Liter Kanne, Hektoliter Faß; 50 Liter = 1 Scheffel; 10 Gramm = 1 Neulot; 1 Kilogramm = 2 Pfund.

England: 1 Fuß = 12 Zoll = 0,30479449 Meter.
1 Q.-Fuß = 144 Q.-Zoll = 0,0928996 Q.-Meter.
1 Kubikfuß = 1728 Kubikzoll = 0,028315 Kubikmeter.
1 Zoll (in 8 oder 12 Teilen) = 0,02539954 Meter.
1 Yard = 3 Fuß = 4 Quarters = 0,91438348 Meter.
1 Fathom = 2 Yards. 1 Pole = 5,5 Yards = 5,02911 Meter.
1 British Mile = 1760 Yards = 5280 Fuß = 1609,3149 Meter.
1 London Mile = 5000 Fuß. 1 Sea Mile (Seemeile) = 6082,66 Fuß
60 Seemeilen = 1 Grad des Aequators.
1 Acre = 4 Roods = 160 Q.-Poles = 4046,71 Q.-Meter.
1 Imperial Charter (Getreide) = 290,7813 Liter.
1 Imperial Gallon (zu 4 Quarts) = 4,543458 Liter.

Handelsgewicht (Avoir du poids):

1 Pfund = 16 Unzen = 453,593 Gramm.
1 Centner = 4 Quarters = 112 Pfund = 50,802 kg.
1 Ton = 20 Centner = 2240 Avoir d. p. Pfund = 1016,048 kg.

Troygewicht (für Gold, Silber, Platin und Medizinen):

1 Pfund = 12 Unzen = 0,373242 Kilogramm.
1 Unze = 20 Penni weight = 480 Grains. 1 Grain = 0,0648 Gramm.
1 Pfund Avoir d. p. = 7000 Grains Tróy.
1 Pfund Troy = 5760 Grains Troy.
175 Pfund Troy (annähernd) = 144 Avoir d. p. Pfund.

Frankreich:

I. Metrisches System (neues Maß).

(Von der französischen Nationalversammlung 1791 die Einführung eines Decimalsystems beschlossen, der Meter als Längeneinheit 1795 **provisorisch** und 1799 definitiv eingeführt.)

Längenmaße: 1 Meter ist der zehnmillionste Teil des nördlichen Meridianquadranten.
1 Meter = 10 Decimeter = 100 Centimeter = 1000 Millimeter.
1 Myriameter = 10 Kilometer = 100 Hektometer = 1000 Dekameter = 10000 Meter.
1 neuer Fuß = 1/3 Meter. 1 neue Elle = 1,2 Meter.

Flächenmaße: 1 Q.-Meter = 100 Q.-Decimeter; 1 qdm = 100 qcm.
1 Hektare = 100 Ares = 10000 Q.-Meter.

Körpermaße: 1 Kubik-Meter = 1000 Kubik-Decimeter.
1 Kubik-Decimeter (Liter) = 1000 Kubik-Centimeter.
1 Kubik-Centimeter = 1000 Kubik-Millimeter.

Frucht- und Weinmaße: 1 Kiloliter = 10 Hektoliter.
1 Hektoliter = 10 Dekaliter = 100 Liter.
1 neuer Boisseau = 1/8 Hektoliter.

Holzmaße: 1 Stère = 1 Kubikmeter = 0,1 Dekastères = 10 Decistères.
1 Klafter (voie) = 2 Stères.

Gewichtsmaße: 1 Gramm ist das Gewicht von 1 Kubik-Centimeter destillierten Wassers im leeren Raum bei der Temperatur von 4° C. (bei welcher das Wasser die größte Dichtigkeit hat).
1 Kilogramm = Gewicht von 1 Liter solchen Wassers.
1 Kilogramm = 10 Hektogramm = 100 Dekagramm = 1000 Gramm.
1 Gramm = 10 Decigramm = 100 Centigramm = 1000 Milligramm.
1 metrischer Centner = 100 Kilogramm.
1 Schiffstonne = 10 metr. Centner = 1000 Kilogramm.

II. Altes französisches System.

1 par. Fuß = 12 Zoll = 0,3248394 Meter.
1 par. Zoll = 12 Linien = 2,706995 Centimeter.
1 Meter = 3′ 0″ 11,296‴ par. = 3,07844 par. Fuß.
1 Toise = 6 par. Fuß = 1,9490363 Meter.
1 par. Fuß = 0,9746 neue Fuß. 1 neuer Fuß = 1,0261 par. Fuß.

1 alte par. Elle = 43″ 10½‴ par. = 1,188 Meter.
1 Juchart (arpent) = 100 Q.-Ruten (perches carrées).
1 Juchart von 900 Q.-Toisen = 34,18867 Ares.
1 Hektare = 2,924944 Juchart. 1 Q.-Toise = 3,798743 Q.-Meter.
1 Muid = 12 Septiers = 24 Mines = 48 Minos.
1 Minos = 3 Boisseaux = 48 Litrons.
1 Boisseau = 655,78 par. Kubikzoll. 1 Pinte = 0,9313 Liter.
1 Velte = 8 Pinten = 7,45 Liter.
1 Pfund = 2 Mark = 16 Unzen = 128 Gros = 0,48951 Kilogramm.
1 Gros = 3 Scrupeln = 72 Grains (déniers) = 3,82 Gramm.

Griechenland: wie in Frankreich.

Holland: wie in Frankreich, nämlich:
1 Ell (Meter) = 10 Palmen = 100 Duimen.
1 Mijl (Kilometer) = 100 Roeden zu 10 Ellen.
1 Bunder (Hektare) = 100 Q.-Roeden zu 100 qm.
1 Last (Getreide) = 30 Zakken (Hektoliter).
1 Vat (Hektoliter) Flüssigkeit = 100 Kannen.
1 Pond (Kilogramm) = 10 Onsen zu 10 Looden.

Japan: 1 Sasi = 10 Sun zu 10 Bon = 0,302959 m.
1 Picol = 100 Kätti = 58 Kilogramm.
1 Kin = 100 Monme = 280 Gramm.

Italien: Maße und Gewichte wie in Frankreich.

Mexiko: Seit 1873 gilt das metrische Maß und Gewicht.

Norwegen: Maße und Gewichte wie in Dänemark.

Oesterreich: 1 Wiener Fuß = 0,316102 Meter.
1 Fuß = 12 Zoll = 144 Linien = 140,172 par. Linien.
1 Elle = 2,465 Fuß. 1 Klafter = 6 Fuß.
1 Meile = 4000 Klafter = 24000 Fuß = 7,58646 Kilometer.
1 Joch = 1600 Q.-Klafter. 1 Metze = 4,9417 Kubikfuß.
1 Maß = 0,0448 Kubikfuß. 1 Eimer = 40 Maß.
1 Wiener Handelspfund = 32 Lot = 560,0122 Gramm.
1 Centner = 5 Stein = 100 Handelspfund.

Vom 1. Januar 1876 an ist das metrische Maß und Gewicht allein gesetzlich.

Portugal: wie in Frankreich.

Preußen: 1 alter Fuß, auch rheinländischer Fuß genannt, = 12 Zoll = 144 Linien = 0,3138536 Meter.
1 altes Pfund = 1/66 von dem Gewichte eines Kubikfußes Wasser bei 15° R. (im luftleeren Raum gewogen) = 0,935422 neuen Pfunden.
1 neues Pfund = 1,069036 alte Pfund = 500 Gramm.
1 Centner = 100 Pfund = 50 Kilogramm.

Rußland: 1 Fuß = 12 Zoll = 1 engl. Fuß = 0,30479 Meter.
1 Arschini (Elle) = 0,71119 Meter.
1 Werst (Meile) = 3500 Fuß = 1,066781 Kilometer.
1 Pfund = 32 Lot = 96 Solotnik = 409,516 Gramm.
1 Schiffspfund (Berkowrtz) = 10 Pud = 400 Pfund.

Schweden: 1 Fuß = 12 Zoll = 0,29691 Meter.
1 Skalbund = 32 Lot = 425,3395 Gramm.

Schweiz: Neues französisches Maßsystem.
Altes Maß: 1 Fuß = 10 Zoll = 100 Linien = 0,3 Meter.
1 Centner = 100 Pfund = 50 Kilogramm.

Spanien: wie in Frankreich.
Altes Maß: 1 Vara = 3 Pies = 0,8350 Meter.
1 Quintal = 4 Arrobas zu 32 Arratels. 1 Arratel = 459 Gramm.

Türkei: 1 Pik (Fuß) = 0,68579 Meter.
1 Meter = 1,45817 Pik.
1 Oke (Pfund) = 1,27848 Kilogramm.

Vereinigte Staaten von Nordamerika: wie in England.

Vergleichung verschiedener Stundenmaße.

Geographische Meile, 15 auf 1 Grad des Aequators.	Neue deutsche Meile, 7500 Meter.	Oesterreichische Meile, zu 24000 Wiener Fuß.	Englische Meile, zu 5280 engl. Fuß.	Russische Werst, zu 3500 russ. Fuß.	1 Kilometer, zu 1000 Met.
1	0,9893	0,9780	4,6108	6,9555	7,4200
1,0108	1	0,9886	4,6604	7,0304	7,5000
1,0224	1,0115	1	4,7142	7,1112	7,5865
0,2169	0,2146	0,2121	1	1,5085	1,6093
0,1439	0,1422	0,1416	0,6629	1	1,0668
0,1348	0,1333	0,1318	0,6214	0,9374	1

Vergleichung verschiedener Gewichte.

Altes Preußisches Pfund.	Oesterreich. Pfund.	Bayerisches Pfund.	Kölnische Mark.	Deutsches und Schweiz. Pfund.	Englisches Pfund av. d. p.	Altfranzös. Pfund.	Kilogramm.
1	0,8352	0,8352	2,0004	0,9354	1,0311	0,9555	0,4677
1,1974	1	1,0000	2,3951	1,1200	1,2346	1,1440	0,5600
1,1973	0,9999	1	2,3951	1,1200	1,2346	1,1440	0,5600
0,4999	0,4175	0,4175	1	0,4676	0,5155	0,4776	0,2338
1,0690	0,8928	0,8929	2,1385	1	1,1023	1,0214	0,5000
1,9698	0,8100	0,8100	1,9400	0,9072	1	0,9266	0,4536
1,0466	0,8741	0,8741	2,0936	0,9790	1,0792	1	0,4895
2,1381	1,7857	0,7857	4,2769	2,0000	2,2046	2,0429	1

Vergleichung verschiedener Raummaße.

Preußischer Fuß.	Oesterreich. Fuß.	Bayerischer Fuß.	Sächsischer Fuß.	Württembergischer Fuß.	Badenscher od. Schweizer Fuß.	Englischer Fuß.	Pariser Fuß.	Meter.
A. Längenmaße (Fuße, Meter).								
1	0,9929	1,0754	1,1083	1,0955	1,0462	1,0297	0,9662	0,3139
1,0072	1	1,0831	1,1163	1,1034	1,0537	1,0371	0,9731	0,3161
0,9299	0,9233	1	1,0306	1,0187	0,9729	0,9576	0,8985	0,2919
0,9023	0,8959	0,9703	1	0,9885	0,9440	0,9291	0,8718	0,2832
0,9128	0,9063	0,9816	1,0117	1	0,9550	0,9399	0,8819	0,2865
0,9559	0,9490	1,0279	1,0594	1,0472	1	0,9843	0,9235	0,3000
0,9711	0,9642	1,0443	1,0763	1,0639	1,0160	1	0,9383	0,3048
1,0350	1,0276	1,1130	1,1471	1,1339	1,0828	1,0658	1	0,3248
3,1862	3,1635	3,4263	3,5312	3,4905	3,3333	3,2809	3,0784	1
B. Flächenmaße (Quadratfuße, Quadratmeter).								
1	0,9858	1,1564	1,2283	1,2002	1,0945	1,0603	0,9335	0,0985
1,0144	1	1,1731	1,2460	1,2175	1,1103	1,0756	0,9470	0,0999
0,8647	0,8525	1	1,0622	1,0378	0,9465	0,9169	0,8072	0,0852
0,8142	0,8026	0,9415	1	0,9771	0,8911	0,8633	0,7600	0,0802
0,8332	0,8214	0,9636	1,0234	1	0,9120	0,8835	0,7778	0,0821
0,9137	0,9007	1,0566	1,1222	1,0965	1	0,9688	0,8529	0,0900
0,9431	0,9297	1,0906	1,1584	1,1319	1,0322	1	0,8804	0,0929
1,0712	1,0560	1,2388	1,3158	1,2856	1,1725	1,1359	1	0,1055
10,152	10,007	11,740	12,469	12,184	11,111	10,764	9,4768	1
C. Körpermaße (Kubikfuße, Kubikmeter).								
1	0,9787	1,2435	1,3613	1,3148	1,1450	1,0918	0,9019	0,0309
1,0217	1	1,2706	1,3909	1,3433	1,1699	1,1156	0,9215	0,0316
0,8042	0,7871	1	1,0949	1,0573	0,9208	0,8780	0,7253	0,0249
0,7346	0,7190	0,9135	1	0,9658	0,8411	0,8021	0,6626	0,0227
0,7606	0,7444	0,9458	1,0354	1	0,8709	0,8304	0,6860	0,0235
0,8733	0,8548	1,0860	1,1889	1,1482	1	0,9536	0,7877	0,0270
0,9159	0,8964	1,1389	1,2468	1,2042	1,0487	1	0,8261	0,0283
1,1087	1,0852	1,3788	1,5093	1,4577	1,2695	1,2106	1	0,0343
32,346	31,658	40,224	44,032	42,527	37,037	35,317	29,174	1

97. Potenzen von π und g.

1. Verhältnis π zwischen Umfang und Durchmesser des Kreises.

$\pi = 3,14159$ $\pi^2 = 9,86960$ $\pi^3 = 31,00628$

$\sqrt{\pi} = 1,77245$ $\sqrt{\pi^3} = 5,56833$ $\sqrt[3]{\pi} = 1,46459$

$\frac{1}{\pi} = 0,31831$ $\frac{1}{\pi^2} = 0,10132$ $\frac{1}{\pi^3} = 0,03225$

$\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0,56419$ $\sqrt{\frac{1}{\pi^3}} = 0,17959$ $\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} = 0,68278$

$\log \pi = 0,49715$ $\log \pi^2 = 0,99430$ $\log \pi^3 = 1,49145$

2. Beschleunigung g beim freien Fall der Körper.

$g = 9,8088$ $2g = 19,6176$ $g^2 = 96,2126$

$\frac{1}{g} = 0,1020$ $\frac{1}{2g} = 0,0510$ $\frac{1}{g^2} = 0,0104$

$\sqrt{g} = 3,1319$ $\sqrt{2g} = 4,4292$ $\log g = 0,9916$

98. Trigonometrische Zahlen.

Grad.	Sinus.	Cosinus.	Tangente.	Cotangente.	Grad.
0,5	0,0087	0,9999	0,0078	114,5886	89,5
1	0,0175	0,9998	0,0175	57,2899	89
1,5	0,0262	0,9996	0,0262	38,1885	88,5
2	0,0349	0,9994	0,0349	28,6363	88
2,5	0,0436	0,9991	0,0437	22,9037	87,5
3	0,0523	0,9986	0,0524	19,0811	87
3,5	0,0611	0,9981	0,0617	16,3498	86,5
4	0,0698	0,9976	0,0699	14,3007	86
4,5	0,0785	0,9969	0,0787	12,7062	85,5
5	0,0872	0,9962	0,0875	11,4301	85
5,5	0,0958	0,9954	0,0963	10,3854	84,5
6	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	84
6,5	0,1132	0,9936	0,1139	8,7769	83,5
7	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	83
7,5	0,1305	0,9914	0,1316	7,5957	82,5
8	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	82
8,5	0,1478	0,9890	0,1494	6,6912	81,5
9	0,1564	0,9877	0 1584	6,3138	81
9,5	0,1651	0,9863	0,1673	5,9758	80,5
10	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	80
Grad.	Cosinus.	Sinus.	Cotangente.	Tangente.	Grad.

Grad.	Sinus.	Cosinus.	Tangente.	Cotangente.	Grad.
10,5	0,1822	0,9833	0,1853	5,3955	79,5
11	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	79
11,5	0,1994	0,9799	0,2035	4,9152	78,5
12	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	78
12,5	0,2164	0,9763	0,2217	4,5107	77,5
13	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	77
13,5	0,2335	0,9724	0,2401	4,1653	76,5
14	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	76
14,5	0,2504	0,9682	0,2586	3,8667	75,5
15	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	75
15,5	0,2672	0,9636	0,2773	3,6059	74,5
16	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	74
16,5	0,2840	0,9588	0,2962	3,3759	73,5
17	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	73
17,5	0,3007	0,9537	0,3153	3,1716	72,5
18	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	72
18,5	0,3173	0,9483	0,3346	2,9887	71,5
19	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	71
19,5	0,3338	0,9426	0,3541	2,8239	70,5
20	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	70
20,5	0,3502	0,9367	0,3739	2,6746	69,5
21	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	69
21,5	0,3665	0,9304	0,3939	2,5386	68,5
22	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	68
22,5	0,3827	0,9239	0,4142	2,4142	67,5
23	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	67
23,5	0,3987	0,9171	0,4348	2,2998	66,5
24	0,4067	0,9135	0,4452	2,2160	66
24,5	0,4147	0,9099	0,4557	2,1943	65,5
25	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	65
25,5	0,4305	0,9026	0,4770	2,0965	64,5
26	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	64
26,5	0,4462	0,8949	0,4986	2,0057	63,5
27	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	63
27,5	0,4617	0,8870	0,5206	1,9210	62,5
Grad.	Cosinus.	Sinus.	Cotangente.	Tangente.	Grad.

Grad.	Sinus.	Cosinus.	Tangente.	Cotangente.	Grad.
28	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	62
28,5	0,4772	0,8788	0,5430	1,8418	61,5
29	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	61
29,5	0,4924	0,8704	0,5658	1,7675	60,5
30	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	60
30,5	0,5075	0,8616	0,5890	1,6977	59,5
31	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	59
31,5	0,5225	0,8526	0,6128	1,6318	58,5
32	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	58
32,5	0,5373	0,8434	0,6371	1,5697	57,5
33	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	57
33,5	0,5519	0,8339	0,6619	1,5108	56,5
34	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	56
34,5	0,5664	0,8241	0,6873	1,4550	55,5
35	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	55
35,5	0,5807	0,8141	0,7133	1,4019	54,5
36	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	54
36,5	0,5948	0,8039	0,7399	1,3514	53,5
37	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	53
37,5	0,6088	0,7933	0,7673	1,3032	52,5
38	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	52
38,5	0,6225	0,7826	0,7954	1,2572	51,5
39	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	51
39,5	0,6361	0,7716	0,8243	1,2131	50,5
40	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	50
40,5	0,6495	0,7604	0,8541	1,1708	49,5
41	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	49
41,5	0,6626	0,7489	0,8847	1,1303	48,5
42	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	48
42,5	0,6756	0,7373	0,9163	1,0913	47,5
43	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	47
43,5	0,6884	0,7254	0,9489	1,0538	46,5
44	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	46
44,5	0,7009	0,7132	0,9827	1,0176	45,5
45	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	45
Grad.	Cosinus.	Sinus.	Cotangente.	Tangente.	Grad.

99. Gemeine Logarithmen.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	40
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	37
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	33
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	31
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	29
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	27
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	25
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	24
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	23
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	21
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	21
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	20
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	19
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	18
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	17
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	17
26	4150	4166	4183	4209	4216	4232	4249	4265	4281	4298	16
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	16
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	15
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	14
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	14
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	13
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	13
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	13
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	13
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	12
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	12
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	12
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	12
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	11
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	11
41	6123	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	10
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	10
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	10
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	10

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	10
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	9
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	9
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	9
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	9
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	8
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	8
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	8
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	8
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	8
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	8
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	8
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	7
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	7
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	7
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	7
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	7
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	7
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	6
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	6
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	6
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	6
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	6
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	6
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	6
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	6
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	6
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	5

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	5
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	5
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	5
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	5
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	5
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	5
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	4

100. Natürliche Logarithmen.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	— ∞	0,000	0,693	1,099	1,386	1,609	1,792	1,946	2,079	2,197
1	2,303	2,398	2,485	2,565	2,639	2,708	2,773	2,833	2,890	2,944
2	2,996	3,045	3,091	3,136	3,178	3,219	3,258	3,296	3,332	3,367
3	3,401	3,434	3,466	3,496	3,526	3,555	3,583	3,611	3,638	3,664
4	3,689	3,714	3,738	3,761	3,784	3,807	3,829	3,850	3,871	3,892
5	3,912	3,932	3,951	3,970	3,989	4,007	4,025	4,043	4,060	4,078
6	4,094	4,111	4,127	4,143	4,159	174	190	205	219	234
7	249	263	277	291	304	317	331	344	357	370
8	382	394	407	419	431	443	454	466	477	489
9	500	511	522	533	543	554	564	575	585	595
10	602	615	625	635	644	654	663	673	682	691
11	701	709	718	727	736	745	754	762	771	779
12	788	796	804	812	820	828	836	844	852	860
13	868	875	883	890	898	905	913	920	927	935
14	4,942	4,949	4,956	4,963	4,970	4,977	4,984	4,990	4,997	5,004
15	5,011	5,017	5,024	5,030	5,037	5,043	5,050	5,056	5,063	5,069
16	075	081	088	094	100	106	112	118	124	130
17	136	142	148	153	159	165	171	176	182	187
18	193	198	204	210	215	220	226	231	236	242
19	247	252	257	263	268	273	278	283	288	293

101. Winkelgeschwindigkeit aus gegebener Tourenzahl.

Winkelgeschwindigkeit $= \frac{2\pi n}{60}$; n Tourenzahl.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0,105	0,209	0,314	0,419	0,524	0,628	0,733	0,838	0,943
1	1,047	1,152	1,257	1,361	1,466	1,571	1,676	1,780	1,885	1,990
2	2,094	2,199	2,304	2,409	2,513	2,618	2,723	2,827	2,932	3,037
3	3,142	3,346	3,351	3,456	3,561	3,665	3,770	3.875	3,977	4,084
4	4,189	4,294	4,398	4,503	4,608	4,712	4,817	4,922	5,027	5,131
5	5,236	5,341	5,445	5,550	5,655	5,760	5,864	5,969	6,074	6,179
6	6,283	6,388	6,493	6,597	6,702	6,807	6,912	7,016	7,121	7,226
7	7,330	7,435	7,540	7,645	7,749	7,854	7,959	8,063	8,168	8,273
8	8,378	8,482	8,587	8,692	8,797	8,901	9,006	9,111	9,215	9,320
9	9,425	9,530	9,634	9,739	9,844	9,948	10,05	10,16	10,26	10,37
10	10,47	10,58	10,68	10,79	10,89	11,00	11,10	11,21	11,31	11,41
11	11,52	11,62	11,73	11,83	11,94	12 04	12,15	12,25	12,36	12,46
12	12,57	12,67	12,78	12,88	12,99	13,09	13,20	13,30	13,40	13,51
13	13,61	13,72	13,82	13,93	14,03	14,14	14,24	14,35	14,45	15,56
14	14,66	14,77	14,87	14,98	15,08	15,18	15,29	15,39	15,50	15,60
15	15,71	15,81	15,92	16,02	16,13	16,23	16,34	16,44	16,55	16,65
16	16,76	18,86	16,97	17,07	17,17	17,28	17,38	17,49	17,59	17,70
17	17,80	17,91	18,01	18,12	18,22	18,33	18,43	18,54	18,64	18,75
18	18,85	18,95	19,06	19,16	19,27	19,37	19,48	19,58	19,69	19,79
19	19,90	20,00	20,11	20,21	20,32	20,42	25,53	20,63	20,74	20,84
20	20,94	21,05	21,15	21,26	21,36	21,47	21,57	21,68	21,78	21,89
21	21,99	22,10	22,20	22,31	22,41	22,52	22,62	22,72	22,83	22,93
22	23,04	23,14	23,25	23,33	23,46	23,56	23,67	23,77	23.88	23,98
23	24,09	24,19	24,30	24,40	24,50	24,61	24,71	24,82	24,92	25,03
24	25,13	25,24	25,34	25,45	25,55	25,66	25,76	25,87	25,97	26,08
25	26,18	26,29	26,39	26,49	26,60	26,70	26,81	26,91	27,02	27,12
26	27,23	27,33	27,44	27,54	27,65	27,75	27,86	27,96	28,07	28,17
27	28,27	28,38	28,48	28,59	28,69	28,80	28,90	29,01	29,11	29,22
28	29,32	29,41	29,53	29,64	29,74	29,85	29,95	30,06	30,16	30,26
29	30,37	30,47	30,58	30,68	30,79	30,89	31,00	31,10	31,21	31,31
30	31,42	31,52	31,63	31,73	31,84	31,94	32,04	32,15	32,25	32,36
31	32,46	32,57	32,67	32,78	32,88	32,99	33,09	33,20	33,30	33,41
32	33,51	33,62	33,72	33,82	33,93	34,03	34,14	34,24	34,35	34,45
33	34,56	34,66	34,77	34,87	34,98	35,08	35,18	35,29	35,40	35,50
34	35,60	35,71	35,81	35,92	36,02	36,13	36,23	36,34	36,44	36,55

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
35	36,65	36,76	36,86	36,97	37,07	37,18	37,28	37,39	37,49	17,59
36	37,70	37,80	37,91	38,01	38,12	38,22	38,33	38,43	38,54	38,64
37	38,75	38,85	38,96	39,06	39,17	39,27	39,38	39,48	39,58	39,69
38	39,79	39,90	40,00	40,11	40,21	40,32	40,42	40,53	40,63	40,74
39	40,84	40,95	41,05	41,16	41,26	41,36	41,47	41,57	41,68	41,78
40	41,89	41,99	42,10	42,20	42,31	42,41	42,52	42,62	42,73	42,83
41	42,94	43,04	43,15	43,25	43,35	43,46	43,56	43,67	43,77	43,88
42	43,98	44,08	44,19	44,30	44,40	44,51	44,61	44,72	44,82	44,93
43	45,03	45,13	45,24	45,34	45,45	45,55	45,66	45,76	45,87	45,97
44	46,08	46,18	46,29	46,39	46,50	46,60	46,71	46,81	46,91	47,02
45	47,12	47,23	47,33	47,44	47,54	47,65	47,75	47,86	47,96	48,07
46	48,17	48,28	48,38	48,49	48,59	48,69	48,80	48,90	49,01	49,11
47	49,22	49,32	49,43	49,53	49,64	49,74	49,85	49,95	50,06	50,16
48	50,27	50,37	50,47	50,58	50,68	50,79	50,89	51,00	51,10	51,21
49	51,31	51,42	51,52	51,63	51,73	51,84	51,94	52,05	52,15	52,26
50	52,36	52,46	52,57	52,67	52,78	52,88	52,99	53,09	53,20	53,30
51	53,41	53,51	53,62	53,72	53,83	53,93	54,04	54,14	54,25	54,25
52	54,45	54,56	54,66	54,77	54,87	54,98	55,08	55,18	55,29	55,39
53	55,50	55,61	55,71	55,82	55,92	56,03	56,13	56,23	56,54	56,44
54	56,55	56,65	56,76	56,86	56,97	57,07	57,18	57,28	57,39	57,49
55	57,60	57,70	57,81	57,91	58,02	58,12	58,22	58,33	58,43	58,54
56	58,64	58,75	58,85	58,96	59,06	59,17	59,27	59,38	59,48	59,59
57	59,69	59,79	59,90	60,00	60,11	60,21	60,32	60,42	60,53	60,63
58	60,74	60,84	60,95	61,05	61,16	61,26	61,37	61,47	61,58	61,68
59	61,79	61,89	61,99	62,10	62,20	62,31	62,41	62,52	62,62	62,73
60	62,83	62,94	63,04	63,15	63,25	63,36	63,46	63,57	63,67	63,77
61	63,88	63,98	64,19	64,19	64,30	64,40	64,51	64,61	64,72	64,82
62	64,93	65,03	65,14	65,24	65,34	65,45	65,55	65,66	65,76	65,87
63	65,97	66,08	66,18	66,29	66,39	66,50	66,60	66,71	66,81	66,92
64	67,02	67,13	67,23	67,34	67,44	67,54	67,65	67,75	67,86	67,96
65	68,07	68,17	68,28	68,38	68,49	68,59	68,70	68,80	68,91	69,01
66	69,12	69,22	69,32	69,43	69,53	69,63	69,74	69,84	69,95	70,06
67	70,16	70,27	70,37	70,48	70,58	70,69	70,79	70,90	71,00	71,10
68	71,21	71,31	71,42	71,52	71,63	71,73	71,84	71,94	72,05	72,15
69	72,26	72,36	72,47	72,57	72,68	72,78	72,89	72,99	73,10	73,20
70	73,30	73,41	73,51	73,62	73,72	73,83	73,93	74,04	74,14	74,25
71	74,35	74,46	74,56	74,67	74,77	74,87	74,98	75,08	75,19	75,29
72	75,40	75,50	75,61	75,71	75,82	75,92	76,03	76,13	76,24	76,34
73	76,45	76,55	76,65	76,76	76,86	76,97	77,07	77,18	77,28	77,39
74	77,49	77,60	77,70	77,81	77,91	78,02	78,12	78,23	78,33	78,44

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
75	78,54	78,64	78,75	78,85	78,96	79,06	79,17	79,27	79,38	79,48
76	79,59	79,69	79,80	79,90	80,01	80,11	80,22	80,32	80,42	80,53
77	80,63	80,74	80,84	80,95	81,05	81,16	81,26	81,37	81,47	81,58
78	81,68	81,79	81,89	82,00	82,10	82,20	82,31	82,41	82,52	82,62
79	82,73	82,83	82,94	83,04	83,14	83,25	83,35	83,46	83,57	83,67
80	83,78	83,88	83,99	84,09	84,20	84,30	84,40	84,51	84,61	84,72
81	84,82	84,93	85,03	85,14	85,24	85,35	85,45	85,56	85,66	85,77
82	85,87	85,97	86,08	86,18	86,29	86,39	86,50	86,60	86,71	86,81
83	86,92	87,02	87,13	87,23	87,34	87,44	87,55	87,65	87,75	87,86
84	87,97	88,07	88,18	88,28	88,38	88,49	88,59	88,70	88,80	88,91
85	89,01	89,12	89,22	89,33	89,43	89,54	89,64	89,75	89,85	89,95
86	90,06	90,16	90,27	90,37	90,48	90,58	90,69	90,79	90,90	91,00
87	91,11	91,21	91,32	91,42	91,52	91,63	91,73	91,84	91,94	92,05
88	92,12	92,26	92,36	92,47	92,57	92,68	92,78	92,89	92,99	93,10
89	93,20	93,31	93,41	93,52	93,62	93,72	93,83	93,93	94,04	94,14
90	94,25	94,35	94,46	94,56	94,67	94,77	94,88	94,98	95,09	95,19
91	95,30	95,40	95,50	95,61	95,71	95,82	95,92	96,03	96,13	96,24
92	96,34	96,45	96,55	96,66	96,76	96,87	96,97	97,08	97,18	97,28
93	97,39	97,49	97,60	97,70	97,81	97,91	98,02	98,12	98,23	98,33
94	98,44	98,54	98,65	98,75	98,86	98,96	99,07	99,17	99,27	99,38
95	99,48	99,59	99,69	99,80	99,90	100,0	100,1	100,2	100,3	100,4
96	100,5	100,6	100,7	100,8	100,9	101,1	101,2	101,3	101,4	101,5
97	101,6	101,7	101,8	101,9	102,0	102,1	102,2	102,3	102,4	102,5
98	102,6	102,7	102,8	102,9	103,1	103,2	103,3	103,4	103,5	103,6
99	103,7	103,8	103,9	104,0	104,1	104,2	104,3	104,4	104,5	104,6

Beisp. 1. Ein Wasserrad habe 2,4 m Halbmesser und 1,5 m Umfangsgeschwindigkeit; wie groß ist seine Tourenzahl per Minute?

Es ist die Winkelgeschwindigkeit (für 1 m Halbmesser) $\frac{1,5}{2,4} = 0,625$ m. Nun enthält die erste waagrechte Linie auf S. 494 die Winkelgeschwindigkeit 0,628 m. Daher wird die Tourenzahl nur sehr wenig unter 6 sein.

Um den Wert genauer zu bestimmen, nehme man die Geschwindigkeit 100mal größer, also 62,5 m; dafür gibt die Tabelle auf S. 495 die Zahl 62,52, also als entsprechende Tourenzahl 597. Es wird daher die wirkliche Tourenzahl zu 597 : 100 = 5,97 angenommen werden können.

Beisp. 2. Eine Centrifugal-Trockenmaschine mit 0,4 m Halbmesser soll 985 Touren per Minute machen; wie groß ist ihre Umfangsgeschwindigkeit?

Die Tabelle gibt auf S. 496 unmittelbar als Winkelgeschwindigkeit 103,2 m. Daher wird die Geschwindigkeit in Abstand 0,4 m von der Achse sein 0,4 . 103,2 = 41,28 m.

102. Durchmesser eines Zahnrades bei gegebener Anzahl Zähne.

Teilung des Rades = 1 angenommen.

Anzahl Zähne.	Durchmesser.	Anzahl Zähne.	Durchmesser.	Anzahl Zähne.	Durchmesser.	Anzahl Zähne.	Durchmesser.
10	3,183	45	14,324	80	25,465	115	36,606
11	3,501	46	14,642	81	25,783	116	36,924
12	3,820	47	14.961	82	26,101	117	37,242
13	4,138	48	15,279	83	26,420	118	37,561
14	4,456	49	15,597	84	26,738	119	37,879
15	4,775	50	15,915	85	27,056	120	38,197
16	5,093	51	16,234	86	27,375	121	38,515
17	5,411	52	16,552	87	27,693	122	38,834
18	5,730	53	16.870	88	28,011	123	39,152
19	6,048	54	17,189	89	28,330	124	39,470
20	6,366	55	17,507	90	28,648	125	39,789
21	6,685	56	17,825	91	28,966	126	40,107
22	7,003	57	18,144	92	29,284	127	40,425
23	7,321	58	18,462	93	29,603	128	40,744
24	7,639	59	18,780	94	29,921	129	41,062
25	7,958	60	19,099	95	30,239	130	41,380
26	8,276	61	19,417	96	30,558	131	41,699
27	8,594	62	19,735	97	30,876	132	42,017
28	8,913	63	20,054	98	31,194	133	42,335
29	9,231	64	20.372	99	31,513	134	42,653
30	9,549	65	20,690	100	31,831	135	42,972
31	9,868	66	21,009	101	32,149	136	43,290
32	10.186	67	21,327	102	32,468	137	43,608
33	10,504	68	21,645	103	32,786	138	43,927
34	10,823	69	21,964	104	33,104	139	44,245
35	11,141	70	22,282	105	33,423	140	44,563
36	11,459	71	22,600	106	33,741	141	44,882
37	11,778	72	22,919	107	34,059	142	45,200
38	12,095	73	23,237	108	34,377	143	45,518
39	12,414	74	23,555	109	34,696	144	45,837
40	12,732	75	23,873	110	35,014	145	46,155
41	13,050	76	24,192	111	35,332	146	46,473
42	13,369	77	24,510	112	35,651	147	46,792
43	13,687	78	24,828	113	35,969	148	47,110
44	14,006	79	25,146	114	36,287	149	47,428

Anzahl Zähne.	Durchmesser.	Anzahl Zähne.	Durchmesser.	Anzahl Zähne.	Durchmesser.	Anzahl Zähne.	Durchmesser.
150	47,747	185	58,887	220	70,028	255	81,170
151	48,065	186	59,206	221	70,347	256	81,488
152	48,383	187	59,524	222	70,665	257	81,806
153	48,701	188	59,842	223	70,981	258	82,125
154	49,020	189	60,161	224	71,301	259	82,125
155	49,338	190	60,479	225	71,620	260	82,761
156	49,656	191	60,797	226	71,938	261	83,079
157	49,975	192	61,116	227	72,256	262	83,397
158	50,293	193	61,434	228	72,575	263	83,715
159	50,611	194	61,752	229	72,893	264	84,034
160	50,930	195	62,071	230	73,211	265	84,352
161	51,248	196	62,389	231	73,530	266	84,670
162	51,566	197	62,707	232	73,848	267	84,989
163	51,885	198	63,026	233	74,166	268	85,307
164	52,203	199	63,344	234	74,484	269	85,625
165	52,521	200	63,662	235	74,828	270	85,944
166	52,839	201	63,981	236	75,121	271	86,262
167	53,158	202	64,299	237	75,439	272	86,580
168	53,476	203	64,617	238	75,758	273	86,899
169	53,794	204	64,936	239	76,076	274	87,217
170	54,113	205	65,254	240	76,394	275	87,535
171	54,431	206	65,572	241	76,713	276	87,854
172	54,749	207	65,890	242	77,031	277	88,172
173	55,068	208	66,209	243	77,349	278	88,490
174	55,386	209	66,527	244	77,667	279	88,808
175	55,704	210	66,845	245	77,986	280	89,127
176	56,022	211	67,164	246	78,304	281	89,446
177	56,341	212	67,482	247	78,622	282	89,764
178	56,659	213	67,800	248	78,941	283	90,082
179	56,977	214	68,119	249	79,259	284	90,400
180	57,296	215	68,437	250	79,577	285	90,719
181	57,614	216	68,756	251	79,896	286	91,037
182	57,932	217	69,074	252	80,215	287	91,355
183	58,251	218	69,392	253	80,533	288	91,678
184	58,269	219	69,710	254	80,851	289	91,991

Beisp. Ein Rad soll 173 Zähne erhalten bei 4,7 cm Teilung. Wie groß wird sein Durchmesser?

Es ist der Durchmesser für 1 cm Teilung . . : = 55,068 cm,
daher Durchmesser für 4,7 cm Teilung 4,7 . 55,068 = 258,82 „

103. Quadrat- und Kubikzahlen, Quadrat- und Kubikwurzeln, Kreisumfang und Kreisflächen.

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n^2	Kubikzahl n^3	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2\pi}{4}$
1	1	1	1,000	1,000	3,14	0,79
2	4	8	1,414	1,259	6,28	3,14
3	9	27	1,732	1,442	9,42	7,07
4	16	64	2,000	1,587	12,57	12,57
5	25	125	2,236	1,709	15,71	19,63
6	36	216	2,449	1,817	18,85	28,27
7	49	343	2,645	1,912	21,99	38,48
8	64	512	2,828	2,000	25,13	50,27
9	81	729	3,000	2,080	28,27	63,62
10	100	1000	3,162	2,154	31,42	78,54
11	121	1331	3,316	2,223	34,55	95,03
12	144	1728	3,464	2,289	37,69	113,10
13	169	2197	3,605	2,351	40,84	132,73
14	196	2744	3,741	2,410	43,98	153,94
15	225	3375	3,872	2,466	47,12	176,71
16	256	4096	4,000	2,519	50,26	201,06
17	289	4913	4,123	2,571	53,40	226,98
18	324	5832	4,242	2,620	56,54	254,47
19	361	6859	4,358	2,668	59,69	283,53
20	400	8000	4,472	2,714	62,83	314,16
21	441	9261	4,582	2,758	65,97	346,36
22	484	10648	4,690	2,802	69,11	380,13
23	529	12167	4,795	2,843	72,25	415,48
24	576	13824	4,898	2,884	75,39	452,39
25	625	15625	5,000	2,924	78,54	490,87
26	676	17576	5,099	2,962	81,68	530,93
27	729	19683	5,196	3,000	84,82	572,55
28	784	21952	5,291	3,036	87,96	615,75
29	841	24389	5,385	3,072	91,10	660,52
30	900	27000	5,477	3,107	94,24	706,85
31	961	29791	5,567	3,141	97,38	754,76
32	1024	32768	5,656	3,174	100,53	804,24

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n^2	Kubikzahl n^3	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2\pi}{4}$
33	1089	35937	5,744	3,207	103,67	855,29
34	1156	39304	5,830	3,239	106,81	907,92
35	1225	42875	5,916	3,271	109,95	962,11
36	1296	46656	6,000	3,301	113,09	1017,87
37	1369	50653	6,082	3,332	116,23	1075,21
38	1444	54872	6,164	3,361	119,38	1134,11
39	1521	59319	6,244	3,391	122,52	1194,59
40	1600	64000	6,324	3,419	125,66	1256,63
41	1681	68921	6,403	3,448	128,80	1320,25
42	1764	74088	6,480	3,476	131,94	1385,44
43	1849	79507	6,557	3,503	135,08	1452,20
44	1936	85184	6,633	3,530	138,23	1520,52
45	2025	91125	6,708	3,556	141,37	1590,43
46	2116	97336	6,782	3,583	144,51	1661,90
47	2209	103823	6,855	3,608	147,65	1734,94
48	2304	110592	6,928	3,634	150,79	1809,55
49	2401	117649	7,000	3,659	153,93	1885,74
50	2500	125000	7,071	3,684	157,08	1963,49
51	2601	132651	7,141	3,708	160,22	2042,82
52	2704	140608	7,211	3,732	163,36	2123,71
53	2809	148877	7,280	3,756	166,50	2206,18
54	2916	157464	7,348	3,779	169,64	2290,21
55	3025	166375	7,416	3,802	172,78	2375,82
56	3136	175616	7,483	3,825	175,92	2463,09
57	3249	185193	7,549	3,848	179,07	2551,75
58	3364	195112	7,615	3,870	182,21	2642,08
59	3481	205379	7,681	3,892	185,35	2733,97
60	3600	216000	7,745	3,914	188,49	2827,43
61	3721	226981	7,810	3,936	191,63	2922,46
62	3844	238328	7,874	3,957	194,77	3019,07
63	3969	250047	7,937	3,979	197,22	3117,24
64	4096	262144	8,000	4,000	201,06	3216,99
65	4225	274625	8,062	4,020	204,20	3318,30
66	4356	287496	8,124	4,041	207,34	3421,18
67	4489	300763	8,185	4,061	210,48	3525,65
68	4624	314432	8,246	4,081	213,62	3631,68
69	4761	328509	8,306	4,101	216,77	3739,28
70	4900	343000	8,366	4,121	219,91	3848,45
71	5041	357911	8,426	4,140	223,05	3959,19
72	5184	373248	8,485	4,160	226,19	4071,50

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n^2	Kubikzahl n^3	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2\pi}{4}$
73	5329	389017	8,544	4,179	229,33	4185,38
74	5476	405224	8,602	4,198	232,47	4300,84
75	5625	421875	8,660	4,217	235,61	4417,86
76	5776	438976	8,717	4,235	238,76	4536,45
77	5929	456533	8,774	4,254	241,90	4656,62
78	6084	474552	8,831	4,272	245,04	4778,36
79	6241	493039	8,888	4,290	248,18	4901,66
80	6400	512000	8,944	4,308	251,32	5026,54
81	6561	531441	9,000	4,326	254,46	5153,00
82	6724	551368	9,055	4,344	257,61	5281,01
83	6889	571787	9,110	4,362	260,75	5410,59
84	7056	592704	9,165	4,379	263,89	5541,77
85	7225	614125	9,219	4,396	267,03	5674,50
86	7396	636056	9,273	4,414	270,17	5808,80
87	7569	658503	9,327	4,431	273,31	5944,67
88	7744	681472	9,380	4,447	276,46	6082,11
89	7921	704969	9,433	4,461	279,60	6221,13
90	8100	729000	9,486	4,481	282,74	6361,72
91	8281	753571	9,539	4,497	285,88	6503,87
92	8464	778688	9,591	4,514	289,02	6647,61
93	8649	804357	9,643	4,530	292,16	6792,90
94	8836	830584	9,695	4,546	295,31	6939,78
95	9025	857375	9,746	4,562	298,45	7088,21
96	9216	884736	9,797	4,578	301,59	7238,23
97	9409	912673	9,848	4,594	304,73	7389,81
98	9604	941192	9,899	4,610	307,87	7542,96
99	9801	970299	9,949	4,626	311,01	7697,68
100	10000	1000000	10,000	4,641	314,15	7853,98
101	10201	1030301	10,049	4,657	317,30	8011,86
102	10404	1061208	10,099	4,672	320,41	8171,30
103	10609	1092727	10,148	4,687	323,58	8332,30
104	10816	1124864	10,198	4,702	326,72	8494,88
105	11025	1157625	10,246	4,717	329,86	8659,03
106	11236	1191016	10,295	4,732	333,00	8824,75
107	11449	1225043	10,344	4,747	336,15	8992,04
108	11664	1259712	10,392	4,762	339,29	9160,90
109	11881	1295029	10,440	4,776	342,43	9331,33
110	12100	1331000	10,488	4,791	345,57	9503,34
111	12321	1367631	10,535	4,805	348,71	9676,91
112	12544	1404928	10,583	4,820	351,85	9852,05

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n^2	Kubikzahl n^3	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2\pi}{4}$
113	12769	1442897	10,630	4,834	355,01	10028,77
114	12996	1481544	10,677	4,848	358,14	10207,05
115	13225	1520875	10,723	4,862	361,28	10386,91
116	13456	1560896	10,770	4,876	364,42	10568,34
117	13689	1601613	10,816	4,890	367,56	10751,34
118	13924	1643032	10,862	4,904	370,70	10935,90
119	14161	1685159	10,908	4,918	373,81	11122,04
120	14400	1728000	10,954	4,932	376,99	11309,76
121	14641	1771561	11,000	4,946	380,13	11499,04
122	14884	1815848	11,045	4,959	383,27	11689,89
123	15129	1860867	11,090	4,973	386,41	11882,31
124	15376	1906624	11,135	4,986	389,55	12076,31
125	15625	1953125	11,180	5,000	392,70	12271,87
126	15876	2000376	11,224	5,013	395,84	12469,01
127	16129	2048383	11,269	5,026	398,98	12667,71
128	16384	2097152	11,313	5,039	402,12	12867,99
129	16641	2146689	11,357	5,052	405,26	13069,84
130	16900	2197000	11,401	5,065	408,10	13273,26
131	17161	2248091	11,445	5,078	411,54	13478,24
132	17424	2299968	11,489	5,091	414,69	13694,80
133	17689	2352637	11,532	5,104	417,83	13892,94
134	17956	2406104	11,575	5,117	420,97	14102,64
135	18225	2460375	11,618	5,129	424,11	14313,91
136	18496	2515456	11,661	5,142	427,25	14526,75
137	18769	2571353	11,704	5,155	430,39	14741,17
138	19044	2620872	11,747	5,167	433,54	14957,15
139	19321	2685619	11,789	5,180	436,68	15174,71
140	19600	2744000	11,832	5,192	439,82	15393,84
141	19881	2803221	11,874	5,204	442,96	15614,53
142	20164	2863288	11,916	5,217	446,10	15836,80
143	20449	2924207	11,958	5,229	449,24	16060,64
144	20736	2985984	12,000	5,241	452,39	16286,05
145	21025	3048625	12,041	5,253	455,53	16513,03
146	21316	3112136	12,083	5,265	458,67	16714,58
147	21609	3176523	12,124	5,277	461,81	16971,70
148	21904	3241792	12,165	5,289	464,95	17203,40
149	22201	3307949	12,206	5,301	468,09	17436,66
150	22500	3375000	12,247	5,313	471,24	17671,50
151	22801	3442951	12,288	5,325	474,38	17907,90
152	23104	3511808	12,328	5,336	477,52	18145,88

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n^2	Kubikzahl n^3	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2\pi}{4}$
153	23409	3581577	12,369	5,348	480,66	18385,42
154	23716	3652264	12,409	5,360	483,80	18626,54
155	24025	3723875	12,449	5,371	486,94	18869,23
156	24336	3796416	12,489	5,383	490,08	19113,49
157	24649	3869893	12,529	5,394	493,23	19359,32
158	24964	3944312	12,569	5,406	499,37	19606,72
159	25281	4019679	12,609	5,417	496,51	19855,69
160	25600	4096000	12,649	5,428	502,65	20106,24
161	25921	4173281	12,688	5,440	505,79	20358,35
162	26244	4251528	12,727	5,451	508,93	20612,03
163	26569	4330747	12,767	5,462	512,08	20876,20
164	26896	4410944	12,806	5,473	515,22	21124,11
165	27225	4492125	12,845	5,484	518,36	21382,51
166	27556	4574296	12,884	5,495	521,50	21642,48
167	27889	4657463	12,922	5,506	524,64	21904,02
168	28224	4741632	12,961	5,517	527,78	22167,12
169	28561	4826809	13,000	5,528	530,93	22431,80
170	28900	4913000	13,038	5,539	534,07	22698,06
171	29241	5000211	13,076	5,550	537,31	22965,88
172	29584	5088448	13,114	5,561	540,35	23235,27
173	29929	5177717	13,152	5,572	543,49	23506,23
174	30276	5268024	13,190	5,582	546,03	23778,77
175	30625	5359375	13,228	5,593	549,78	24052,87
176	30976	5451776	13,266	5,604	552,92	24328,55
177	31329	5545233	13,304	5,614	556,06	24605,79
178	31684	5639752	13,341	5,625	559,20	24884,61
179	32041	5735339	13,379	5,635	562,34	25165,00
180	32400	5832000	13,416	5,646	565,48	25446,96
181	32761	5929741	13,453	5,656	568,62	25730,48
182	33124	6028568	13,409	5,667	571,77	26015,58
183	33489	6128487	13,527	5,677	574,91	26302,26
184	33856	6229504	13,564	5,687	578,05	26590,50
185	34225	6331625	13,601	5,698	581,19	26880,31
186	34596	6434836	13,638	5,708	584,33	27171,69
187	34969	6539203	13,674	5,718	587,47	27464,65
188	35344	6644672	13,711	5,728	590,62	27759,17
189	35721	6751269	13,747	5,738	593,76	28055,27
190	36100	6859000	13,784	5,748	596,90	28352,94
191	36481	6967871	13,820	5,758	600,04	28652,17
192	36864	7077888	13,856	5,768	603,18	28952,98

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n^2	Kubikzahl n^3	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2\pi}{4}$
193	37249	7189057	13,892	5,778	606,32	29255,36
194	37636	7301384	13,928	5,788	609,47	29559,31
195	38025	7414875	13,964	5,798	612,61	29864,83
196	38416	7529536	14,000	5,808	615,75	30171,92
197	38809	7645373	14,035	5,818	618,89	30480,60
198	39204	7762392	14,071	5,828	622,03	30790,82
199	39601	7880599	14,106	5,838	625,17	31102,52
200	40000	8000000	14,142	5,848	628,32	31416,00
201	40401	8120601	14,177	5,857	631,46	31730,94
202	40804	8242408	14,212	5,867	634,60	32047,46
203	41209	8365427	14,247	5,877	637,74	32365,54
204	41616	8489664	14,282	5,886	640,88	32685,20
205	42025	8615125	14,317	5,896	644,02	33006,43
206	42436	8741816	14,352	5,905	647,16	33329,23
207	42849	8869743	14,387	5,915	650,31	33653,60
208	43264	8998912	14,422	5,924	653,45	33979,54
209	43681	9123329	14,456	5,934	656,59	34307,05
210	44100	9261000	14,491	5,943	659,73	34636,14
211	44521	9393931	14,525	5,953	662,87	34966,79
212	44944	9528128	14,560	5,962	666,01	35299,01
213	45369	9663597	14,594	5,972	669,16	35632,81
214	45796	9800344	14,628	5,981	672,30	35968,17
215	46225	9938375	14,662	5,990	675,44	36305,11
216	46656	10077696	14,696	6,000	678,58	36643,62
217	47089	10218313	14,730	6,009	681,72	36983,70
218	47524	10360232	14,764	6,018	684,86	37325,34
219	47961	10503459	14,798	6,027	688,01	37668,56
220	48400	10648000	14,832	6,036	691,15	38013,36
221	48841	10793861	14,866	6,045	694,29	38359,72
222	49284	10941048	14,899	6,055	697,43	38707,65
223	49729	11089567	14,933	6,064	700,57	39057,51
224	50176	11239424	14,966	6,073	703,71	39408,23
225	50625	11390625	15,000	6,082	706,86	39760,87
226	51076	11543176	15,033	6,091	710,00	40115,09
227	51529	11697083	15,066	6,100	713,14	40470,87
228	51984	11852352	15,099	6,109	716,28	40828,23
229	52441	12008989	15,132	6,118	719,42	41187,16
230	52900	12167000	15,165	6,126	722,56	41547,66
231	53361	12326391	15,198	6,135	725,70	41909,72
232	53824	12487168	15,231	6,144	728,85	42273,36

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n^2	Kubikzahl n^3	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2\pi}{4}$
233	54289	12649337	15,264	6,153	731,99	42638,58
234	54756	12812904	15,297	6,162	735,13	43005,36
235	55225	12977875	15,329	6,171	738,27	43373,71
236	55696	13144256	15,362	6,179	741,41	43743,63
237	56169	13312053	15,394	6,188	744,55	44115,11
238	56644	13481272	15,427	6,197	747,69	44488,19
239	57121	13651919	15,459	6,205	750,84	44862,83
240	57600	13824000	15,491	6,214	753,98	45239,04
241	58081	13997521	15,524	6,223	757,12	45616,81
242	58564	14172488	15,556	6,231	760,26	45996,16
243	59049	14348907	15,588	6,240	763,40	46377,08
244	59536	14526784	15,620	6,248	766.55	46759,57
245	60025	14706125	15,652	6,257	769,69	47143,63
246	60516	14886936	15,684	6,265	772,83	47529,26
247	61009	15069223	15,716	6,274	775,97	47916,46
248	61504	15252992	15,748	6,282	779,11	48305,24
249	62001	15438249	15,779	6,291	782,25	48695,58
250	62500	15625000	15,811	6,299	785,40	49087,50
251	63001	15813251	15,842	6,307	788,54	49480,98
252	63504	16003008	15,874	6,316	791,68	49876,04
253	64009	16194277	15,905	6,324	794,82	50272,66
254	64516	16387064	15,937	6,333	797,96	50670,86
255	65025	16581375	15,968	6,341	801,10	51070,63
256	65536	16777216	16,000	6,349	804,24	51471,96
257	66049	16974593	16,031	6,357	807,39	51874,88
258	66564	17173512	16,062	6,366	810,53	52279,36
259	67081	17373979	16,093	6,374	813,67	52685,41
260	67600	17576000	16,124	6,382	816,81	53093,04
261	68121	17779581	16,155	6,390	819,97	53502,23
262	68644	17984728	16,186	6,398	823,09	53912,99
263	69169	18191447	16,217	6,406	826,24	54325,33
264	69696	18399744	16,248	6,415	829,38	54739,23
265	70225	18609625	16,278	6,423	832,52	55154,71
266	70756	18821096	16,309	6,431	835,66	55571,76
267	71289	19034163	16,340	6,439	838,80	55990,38
268	71824	19248832	16,370	6,447	841,94	56410,56
269	72361	19465109	16,401	6,455	845,09	56832,32
270	72900	19683000	16,431	6,463	848,23	57255,66
271	73441	19902511	16,462	6,471	851,37	57680,56
272	73984	20123648	16,492	6,479	854,51	58107,03

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n^2	Kubikzahl n^3	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2\pi}{4}$
273	74529	20346417	16,522	6,487	857,65	58535,07
274	75076	20570824	16,552	6,495	860,79	58964,69
275	75625	20796875	16,583	6,502	863,94	59395,87
276	76176	21024576	16,613	6,510	867,08	59828,63
277	76729	21253933	16,643	6,518	870,22	60262,95
278	77284	21484952	16,673	6,526	873,36	60698,85
279	77841	21717639	16,703	6,534	876,50	61136,32
280	78400	21952000	16,733	6,542	879,64	61575,36
281	78961	22188041	16,763	6,549	882,78	62015,96
282	79524	22425768	16,792	6,557	885,93	62458,14
283	80089	22665187	16,822	6,565	889,07	62901,90
284	80656	22906304	16,852	6,573	892,21	63347,22
285	81225	23149125	16,881	6,580	895,35	63794,11
286	81796	23393656	16,911	6,588	898,49	64242,57
287	82369	23639903	16,941	6,596	901,63	64692,61
288	82944	23887872	16,970	6,603	904,78	65144,21
289	83521	24137569	17,000	6,611	907,92	65597,39
290	84100	24389000	17,029	6,619	911,06	66052,14
291	84681	24642171	17,059	6,627	914,24	66508,45
292	85264	24897088	17,088	6,634	917,34	66966,34
293	85849	25153757	17,117	6,642	920,48	67425,80
294	86436	25412184	17,146	6,649	923,63	67886,83
295	87025	25672375	17,176	6,657	926,77	68349,43
296	87616	25934336	17,205	6,664	929,91	68813,60
297	88209	26198073	17,234	6,672	933,05	69279,34
298	88804	26463592	17,263	6,679	936,19	69746,66
299	89401	26730899	17,292	6,687	939,33	70215,54
300	90000	27000000	17,320	6,694	942,48	70686,00
301	90601	27270901	17,349	6,702	945,62	71158,02
302	91204	27543608	17,378	6,709	948,76	71631,62
303	91809	27818127	17,407	6,717	951,90	72106,78
304	92416	28094464	17,436	6,724	955,04	72583,52
305	93025	28372625	17,464	6,731	958,18	73061,83
306	93636	28652616	17,493	6,739	961,32	73541,71
307	94249	28934443	17,521	6,746	964,47	74023,16
308	94864	29218112	17,549	6,753	967,61	74506,18
309	95481	29503629	17,578	6,761	970,75	74990,77
310	96100	29791000	17,607	6,768	973,89	75476,94
311	96721	30080231	17,635	6,775	977,03	75964,67
312	97344	30371328	17,663	6,782	980,17	76453,93

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n^2	Kubikzahl n^3	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2\pi}{4}$
313	97969	30664297	17,692	6,789	983,32	76944,85
314	98596	30959144	17,720	6,797	986,45	77457,29
315	99225	31255875	17,748	6,804	989,60	77931,31
316	99856	31554496	17,776	6,811	992,74	78426,89
317	100489	31855013	17,804	6,818	995,88	78924,06
318	101124	32157432	17,832	6,826	999,02	79422,78
319	101761	32461759	17,860	6,833	1002,17	79923,08
320	102400	32768000	17,888	6,839	1005,31	80424,96
321	103041	33076161	17,916	6,847	1008,45	80928,40
322	103684	33386248	17,944	6,854	1011,59	81433,41
323	104329	33698267	17,972	6,861	1014,73	81939,99
324	104976	34012224	18,000	6,868	1017,88	82448,15
325	105625	34328125	18,028	6,875	1021,02	82957,87
326	106276	34645976	18,055	6,882	1024,16	83469,17
327	106929	34965783	18,083	6,889	1027,30	83982,60
328	107584	35287552	18,111	6,896	1030,44	84496,47
329	108241	35611289	18,138	6,903	1033,58	85012,48
330	108900	35937000	18,166	6,910	1036,72	85530,06
331	109561	36264691	18,193	6,917	1039,86	86049,20
332	110224	36594368	18,221	6,924	1043,01	86569,92
333	110889	36926037	18,248	6,931	1046,15	87092,22
334	111556	37259704	18,276	6,938	1049,29	87616,08
335	112225	37595375	18,303	6,945	1052,43	88141,51
336	112896	37933056	18,330	6,952	1055,57	88668,51
337	113569	38272753	18,357	6,959	1058,71	89197,09
338	114244	38614472	18,385	6,966	1061,86	89727,23
339	114921	38958219	18,412	6,973	1065,02	90258,95
340	115600	39304000	18,439	6,979	1068,14	90792,24
341	116281	39651821	18,466	6,986	1071,28	91327,09
342	116964	40001688	18,493	6,993	1074,27	91863,52
343	117649	40353607	18,520	7,000	1077,56	92401,15
344	118336	40707584	18,547	7,007	1080,71	92941,09
345	119025	41063625	18,574	7,014	1083,85	93482,23
346	119716	41421736	18,601	7,020	1086,99	94024,94
347	120409	41781923	18,628	7,027	1090,13	94569,22
348	121104	42144192	18,655	7,034	1093,27	95115,08
349	121801	42508549	18,681	7,040	1096,41	95662,50
350	122500	42875000	18,708	7,047	1099,56	96211,50
351	123201	43243551	18,735	7,054	1102,70	96762,06
352	123904	43614208	18,762	7,061	1105,84	97314,20

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n^2	Kubikzahl n^3	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2\pi}{4}$
353	124609	43986977	18,788	7,067	1108,98	97867,90
354	125316	44361864	18,815	7,074	1112,12	98423,18
355	126025	44738875	18,842	7,081	1115,26	98980,03
356	126736	45118016	18,868	7,087	1118,40	99538,45
357	127449	45499293	18,894	7,094	1121,55	100098,43
358	128164	45882712	18,921	7,101	1124,69	100660,00
359	128881	46268279	18,947	7,107	1127,83	101223,13
360	129600	46656000	18,974	7,114	1130,97	101787,84
361	130321	47045881	19,000	7,120	1134,11	102354,11
362	131044	47437928	19,026	7,127	1137,25	102921,95
363	131769	47832147	19,052	7,133	1140,40	103491,31
364	132496	48228544	19,079	7,140	1143,54	104062,35
365	133225	48627125	19,105	7,146	1146,68	104634,91
366	133956	49027896	19,131	7,153	1149,82	105209,04
367	134689	49430863	19,157	7,159	1152,96	105784,74
368	135424	49836032	19,183	7,166	1156,10	106362,00
369	136161	50243409	19,209	7,172	1159,25	106940,84
370	136900	50653000	19,235	7,179	1162,39	107521,26
371	137641	51064811	19,261	7,185	1165,53	108103,22
372	138384	51478848	19,287	7,192	1168,67	108686,79
373	139129	51895117	19,313	7,198	1171,81	109271,91
374	139876	52313624	19,339	7,205	1174,95	109858,62
375	140625	52734375	19,365	7,211	1178,10	110446,87
376	141376	53157376	19,391	7,218	1181,24	111036,71
377	142129	53582633	19,416	7,224	1184,38	111628,11
378	142884	54010152	19,442	7,230	1187,52	112221,09
379	143641	54439939	19,468	7,237	1190,66	112815,64
380	144400	54872000	19,493	7,243	1193,80	113411,76
381	145161	55306341	19,519	7,249	1196,94	114009,46
382	145924	55742968	19,545	7,256	1200,09	114608,70
383	146689	56181887	19,570	7,262	1203,23	115209,54
384	147456	56623104	19,596	7,268	1206,37	115811,94
385	148225	57066625	19,621	7,275	1209,51	116415,91
386	148996	57512456	19,647	7,281	1212,65	117021,45
387	149769	57960603	19,672	7,287	1215,79	117628,57
388	150544	58411072	19,698	7,294	1218,94	118237,25
389	151321	58863869	19,723	7,299	1222,08	118846,51
390	152100	59319000	19,748	7,306	1225,22	119459,94
391	152881	59776471	19,774	7,312	1228,36	120072,73
392	153664	60236288	19,799	7,319	1231,50	120687,70

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n^2	Kubikzahl n^3	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2\pi}{4}$
393	154449	60698457	19,824	7,325	1234,64	121304,24
394	155236	61162984	19,849	7,331	1237,79	121922,43
395	156025	61629875	19,875	7,337	1240,93	122542,03
396	156816	62099136	19,899	7,343	1244,07	123163,28
397	157609	62570773	19,925	7,349	1247,21	123786,10
398	158404	63044762	19,949	7,356	1250,35	124410,21
399	159201	63521199	19,975	7,362	1253,49	125036,46
400	160000	64000000	20,000	7,368	1256,64	125664,00
401	160801	64481201	20,025	7,374	1259,78	126293,10
402	161604	64964808	20,049	7,380	1262,92	126923,88
403	162409	65450827	20,075	7,386	1266,06	127556,02
404	163216	65939264	20,099	7,392	1269,20	128189,84
405	164025	66430125	20,125	7,399	1272,34	128825,23
406	164836	66923416	20,149	7,405	1275,48	129462,19
407	165649	67419143	20,174	7,411	1278,63	130100,71
408	166464	67911312	20,199	7,417	1281,77	130740,82
409	167281	68417929	20,224	7,422	1284,91	131382,49
410	168100	68921000	20,248	7,429	1288,05	132025,74
411	168921	69426531	20,273	7,434	1291,19	132670,55
412	169744	69934528	20,298	7,441	1294,34	133316,93
413	170569	70444997	20,322	7,447	1297,48	133964,89
414	171396	70957944	20,347	7,453	1300,62	134614,41
415	172225	71473375	20,371	7,459	1303,76	135265,51
416	173056	71991296	20,396	7,465	1306,90	135918,18
417	173889	72511713	20,421	7,471	1310,04	136572,42
418	174724	73034632	20,445	7,477	1313,18	137228,22
419	175561	73560059	20,469	7,483	1316,32	137885,69
420	176400	74088000	20,494	7,489	1319,47	138544,56
421	177241	74618461	20,518	7,495	1322,61	139205,08
422	178084	75151448	20,543	7,501	1325,75	139867,17
423	178929	75686967	20,567	7,507	1328,89	140530,83
424	179776	76225024	20,591	7,513	1332,03	141196,07
425	180625	76765625	20,615	7,518	1335,18	141862,87
426	181476	77308776	20,639	7,524	1338,32	142531,25
427	182329	77854483	20,664	7,530	1341,46	143201,19
428	183184	78402752	20,688	7,536	1344,60	143872,71
429	184041	78953589	20,712	7,542	1347,74	144545,08
430	184900	79507000	20,736	7,548	1350,88	145220,46
431	185761	80062991	20,760	7,554	1354,02	145896,68
432	186624	80621568	20,785	7,559	1357,17	146574,48

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n^2	Kubikzahl n^3	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2\pi}{4}$
433	187489	81182737	20,809	7,565	1360,33	147253,85
434	188356	81746504	20,833	7,571	1363,45	147934,80
435	189225	82312875	20,857	7,577	1366,59	148617,31
436	190096	82881856	20,881	7,583	1369,73	149301,39
437	190969	83453453	20,904	7,588	1372,87	149987,05
438	191844	84027672	20,928	7,594	1376,02	150674,27
439	192721	84604519	20,952	7,600	1379,16	151362,87
440	193600	85184000	20,976	7,606	1382,30	152053,44
441	194481	85766121	21,000	7,612	1385,44	152745,37
442	195364	86350888	21,024	7,617	1388,58	153438,88
443	196249	86938307	21,047	7,623	1391,72	154133,96
444	197136	87528384	21,071	7,629	1394,87	154830,61
445	198025	88121125	21,095	7,635	1398,01	155528,83
446	198916	88716536	21,119	7,640	1401,15	156228,62
447	199809	89314623	21,142	7,646	1404,29	156929,98
448	200704	89915392	21,166	7,652	1407,43	157632,92
449	201601	90518849	21,189	7,657	1410,57	158337,42
450	202500	91125000	21,213	7,663	1413,72	159043,50
451	203401	91733851	21,237	7,669	1416,86	159751,14
452	204304	92345408	21,260	7,674	1420,00	160460,36
453	205209	92959677	21,284	7,680	1423,14	161171,14
454	206106	93576664	21,307	7,686	1426,28	161883,50
455	207025	94196375	21,331	7,691	1429,42	162597,43
456	207936	94818816	21,354	7,697	1432,56	163312,93
457	208849	95443993	21,377	7,703	1435,71	164030,20
458	209764	96071912	21,401	7,708	1438,85	164748,64
459	210681	96702579	21,424	7,714	1441,99	165468,85
460	211600	97336000	21,447	7,719	1445,13	166190,64
461	212521	97972181	21,471	7,725	1448,27	166913,99
462	213444	98611128	21,494	7,731	1451,41	167638,91
463	214369	99252847	21,517	7,736	1454,56	168365,41
464	215296	99897345	21,541	7,742	1457,70	169093,47
465	216225	100544625	21,564	7,747	1460,84	169823,11
466	217156	101194696	21,587	7,753	1463,98	170554,32
467	218089	101847563	21,610	7,758	1467,12	171287,10
468	219024	102503232	21,633	7,764	1470,26	172021,44
469	219961	103161709	21,656	7,769	1473,41	172757,36
470	220900	103823000	21,679	7,775	1476,55	173494,86
471	221841	104487111	21,702	7,780	1479,69	174233,92
472	222784	105154048	21,725	7,786	1482,83	174974,55

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n^2	Kubikzahl n^3	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2\pi}{4}$
473	223729	105823817	21,749	7,791	1485,97	175716,75
474	224676	106496424	21,771	7,797	1489,11	176460,45
475	225625	107171875	21,794	7,802	1492,26	177205,87
476	226576	107850176	21,817	7,808	1495,36	177952,79
477	227529	108531333	21,840	7,813	1498,54	178701,27
478	228484	109215352	21,863	7,819	1501,68	179451,33
479	229441	109902239	21,886	7,824	1504,82	180202,96
480	230400	110592000	21,909	7,830	1507,96	180956,16
481	231361	111284641	21,932	7,835	1511,10	181710,92
482	232324	111980168	21,954	7,840	1514,25	182467,26
483	233289	112678587	21,977	7,846	1517,39	183225,18
484	234256	113379904	22,000	7,851	1520,53	183984,66
485	235225	114084125	22,023	7,857	1523,67	184745,71
486	236196	114791256	22,045	7,862	1526,81	185508,33
487	237169	115501303	22,069	7,868	1529,95	186272,53
488	238144	116214272	22,091	7,873	1533,10	187038,29
489	239121	116930169	22,113	7,878	1536,24	187805,63
490	240100	117649000	22,136	7,884	1539,38	188574,54
491	241081	118370771	22,158	7,889	1542,52	189345,01
492	242064	119095488	22,181	7,894	1545,66	190117,06
493	243049	119823157	22,204	7,899	1548,80	190890,68
494	244036	120553784	22,226	7,905	1551,95	191665,87
495	245025	121287375	22,248	7,910	1555,09	192442,63
496	246016	122023936	22,271	7,915	1558,23	193220,96
497	247009	122763473	22,293	7,921	1561,37	194000,86
498	248004	123505992	22,316	7,926	1564,51	194782,34
499	249001	124251499	22,338	7,932	1567,55	195565,38
500	250000	125000000	22,361	7,937	1570,80	196350,00
501	251001	125751501	22,383	7,942	1573,94	197136,18
502	252004	126506008	22,405	7,947	1577,08	197923,94
503	253009	127263527	22,428	7,953	1580,22	198713,26
504	254016	128024864	22,449	7,958	1583,36	199504,16
505	255025	128787625	22,472	7,963	1586,50	200296,63
506	256036	129554216	22,494	7,969	1589,64	201090,67
507	257049	130323843	22,517	7,974	1592,79	201886,28
508	258064	131096512	22,539	7,979	1595,93	202683,46
509	259081	131872229	22,561	7,984	1599,07	203481,70
510	260100	132651000	22,583	7,989	1602,21	204282,54
511	261121	133432831	22,605	7,995	1605,35	205084,43
512	262144	134217728	22,627	8,000	1608,49	205887,84

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n^2	Kubikzahl n^3	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2\pi}{4}$
513	263169	135005697	22,649	8,005	1611,64	206692,93
514	264196	135796744	22,671	8,010	1614,78	207499,53
515	265225	136590875	22,694	8,016	1617,92	208307,71
516	266256	137388096	22,716	8,021	1621,06	209117,46
517	267289	138188413	22,738	8,026	1624,20	209928,78
518	268324	138991832	22,759	8,031	1627,34	210741,66
519	269361	139798359	22,782	8,036	1630,49	211556,12
520	270400	140608000	22,803	8,041	1633,63	212372,16
521	271441	141420761	22,825	8,047	1636,77	213189,76
522	272484	142236648	22,847	8,052	1639,93	214008,93
523	273529	143055667	22,869	8,057	1643,05	214829,67
524	274576	143877824	22,891	8,062	1646,19	215651,99
525	275625	144703125	22,913	8,067	1649,34	216475,87
526	276676	145531576	22,935	8,072	1652,48	217301,33
527	277729	146363183	22,956	8,077	1655,62	218128,35
528	278784	147197952	22,978	8,082	1658,76	218956,95
529	279841	148035889	23,000	8,087	1661,90	219787,12
530	280900	148877000	23,022	8,093	1665,04	220618,86
531	281961	149721291	23,043	8,098	1668,18	221452,16
532	283024	150568768	23,065	8,103	1671,33	222287,04
533	284089	151419437	23,087	8,108	1674,47	223123,50
534	285156	152273304	23,108	8,113	1677,61	223961,52
535	286225	153130375	23,130	8,118	1680,75	224801,11
536	287296	153990656	23,152	8,123	1683,89	225642,27
537	288369	154854153	23,173	8,128	1687,04	226484,01
538	289444	155720872	23,195	8,133	1690,18	227329,31
539	290521	156590819	23,216	8,138	1693,32	228175,19
540	291600	157464000	23,238	8,143	1696,46	229022,64
541	292681	158340421	23,259	8,148	1699,60	229871,65
542	293764	159220088	23,281	8,153	1702,74	230722,24
543	294849	160103007	23,302	8,158	1705,88	231574,40
544	295936	160989184	23,324	8,163	1709,03	232428,13
545	297025	161878625	23,345	8,168	1712,17	233283,43
546	298116	162771336	23,367	8,173	1715,31	234140,30
547	299209	163667323	23,388	8,178	1718,45	234998,74
548	300304	164566592	23,409	8,183	1721,59	235858,76
549	301401	165469149	23,431	8,188	1724,73	236720,34
550	302500	166375000	23,452	8,193	1727,88	237583,50
551	303601	167284151	23,473	8,198	1731,02	238448,22
552	304704	168196608	23,495	8,203	1734,16	239314,52

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n^2	Kubikzahl n^3	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2\pi}{4}$
553	305809	169112377	23,516	8,208	1737,30	240182,38
554	306916	170031464	23,537	8,213	1740,44	241051,82
555	308025	170953875	23,558	8,218	1743,58	241922,83
556	309136	171879616	23,579	8,223	1746,72	242795,41
557	310249	172808693	23,601	8,228	1749,87	243669,56
558	311364	173741112	23,622	8,233	1753,01	244545,28
559	312481	174676879	23,643	8,238	1756,15	245422,57
560	313600	175616000	23,664	8,242	1759,29	246301,44
561	314721	176558481	23,685	8,247	1762,43	247181,87
562	315844	177504328	23,706	8,252	1765,57	248063,87
563	316969	178453547	23,728	8,257	1768,72	248947,45
564	318096	179406144	23,749	8,262	1771,86	249832,59
565	319225	180362125	23,769	8,267	1775,00	250719,31
566	320356	181321496	23,791	8,272	1778,14	251607,60
567	321489	182284263	23,812	8,277	1781,28	252497,36
568	322624	183250432	23,833	8,282	1784,42	253388,88
569	323761	184220009	23,854	8,286	1787,57	254281,88
570	324900	185193000	23,875	8,291	1790,71	255176,64
571	326041	186169411	23,896	8,296	1793,85	256072,60
572	327184	187149248	23,916	8,301	1796,99	256970,31
573	328329	188132517	23,937	8,306	1800,13	257869,59
574	329476	189119224	23,958	8,311	1803,27	258770,45
575	330625	190109375	23,979	8,315	1806,42	259672,87
576	331776	191102976	24,000	8,320	1809,56	260576,87
577	332929	192100033	24,021	8,325	1812,80	261482,43
578	334084	193100552	24,042	8,330	1815,84	262388,57
579	335241	194104539	24,062	8,335	1818,98	263298,28
580	336400	195112000	24,083	8,339	1822,12	264208,56
581	337561	196122941	24,104	8,344	1825,26	265120,46
582	338724	197137368	24,125	8,349	1828,41	266033,82
583	339889	198155287	24,145	8,354	1831,55	266948,82
584	341056	199176704	24,166	8,359	1834,69	267865,38
585	342225	200201625	24,187	8,363	1837,83	268783,57
586	343396	201230056	24,207	8,368	1840,97	269703,21
587	344569	202262003	24,228	8,373	1844,11	270624,49
588	345744	203297472	24,249	8,378	1847,26	271547,33
589	346921	204336469	24,269	8,382	1850,40	272471,75
590	348100	205379000	24,289	8,387	1853,54	273397,74
591	349281	206425071	24,310	8,392	1856,68	274325,29
592	350464	207474688	24,331	8,397	1859,82	275254,42

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n^2	Kubikzahl n^3	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2\pi}{4}$
593	351649	208527857	2,4351	8,401	1862,96	276185,12
594	352836	209584584	24 372	8,406	1866,11	277117,39
595	354025	210644875	24 393	8,411	1869,25	278051,23
596	355216	211708736	24,413	8,415	1872,39	278986,64
597	356409	212776173	24,433	8,420	1875,53	279923,62
598	357604	213847192	24,454	8,425	1878,67	280862,18
599	358801	214921799	24,474	8,429	1881,81	281802,30
600	360000	216000000	24,495	8,434	1884,96	282744,00
601	361201	217081801	24,515	8,439	1888,10	283687,26
602	362404	218167208	24,536	8,444	1891,24	284632,10
603	363609	219256227	24,556	8,448	1894,38	285578,50
604	364816	220348864	24,576	8,453	1897,52	286526,48
605	366025	221445125	24,597	8,458	1900,66	287476,03
606	367236	222545016	24,617	8,462	1903,80	288426,15
607	368449	223648543	24,637	8,467	1906,95	289379,84
608	369664	224755712	24,658	8,472	1910,09	290334,10
609	370881	225866529	24,678	8,476	1913,23	291289,93
610	372100	226981000	24,698	8,481	1916,37	292247,34
611	373321	228099131	24,718	8,485	1919,51	293206,31
612	374544	229220928	24,739	8,490	1922,65	294166,85
613	375769	230346397	24,758	8,495	1925,80	295128,97
614	376996	231475544	24,779	8,499	1928,94	296092,65
615	378225	232608375	24,799	8,504	1932,08	297057,91
616	379456	233744896	24,819	8,509	1935,22	298024,74
617	380689	234885113	24,839	8,513	1938,36	298993,14
618	381924	236029032	24,859	8,518	1941,50	299963,00
619	383161	237176659	24,879	8,522	1944,65	300934,64
620	384400	238328000	24,899	8,527	1947,79	301907,76
621	385641	239483061	24,919	8,532	1950,93	302882,44
622	386884	240641848	24,939	8,536	1954,07	303858,69
623	388129	241804367	24,959	8,541	1957,21	304836,51
624	389376	242970624	24,980	8,545	1960,35	305815,91
625	390625	244140625	25,000	8,549	1963,50	306796,87
626	391876	245314376	25,019	8,554	1966,64	307779,41
627	393129	246491883	25,040	8,559	1969,78	308763,41
628	394384	247673152	25,059	8,563	1972,92	309749,19
629	395641	248858189	25,079	8,568	1976,06	310736,44
630	396900	250047000	25,099	8,573	1979,20	311725,26
631	398161	251239591	25,119	8,577	1982,34	312715,64
632	399424	252435968	25,139	8,582	1985,49	313707,58

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n^2	Kubikzahl n^3	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2\pi}{4}$
633	400689	253636137	25,159	8,586	1988,63	314701,14
634	401956	254840104	25,179	8,591	1991,77	315696,64
635	403225	256047875	25,199	8,595	1994,91	316692,91
636	404496	257259456	25,219	8,599	1998,05	317691,15
637	405769	258474853	25,239	8,604	2001,19	318690,97
638	407044	259694072	25,259	8,609	2004,34	319692,35
639	408321	260917119	25,278	8,613	2007,48	320695,31
640	409600	262144000	25,298	8,618	2010,62	321699,84
641	410881	263374721	25,318	8,622	2013,76	322705,93
642	412164	264609288	25,338	8,627	2016,90	323713,60
643	413449	265847707	25,357	8,631	2020,04	324722,84
644	414736	267089984	25,377	8,636	2023,19	225733,65
645	416025	268836125	25,397	8,640	2026,33	326746,03
646	417316	269586136	25,416	8,644	2029,47	327759,98
647	418609	270840023	25,436	8,649	2032,61	328775,50
648	419904	272097792	25,456	8,653	2035,76	329792,60
649	421201	273359449	25,475	8,658	2038,89	330811,26
650	422500	274625000	25,495	8,662	2042,04	331831,50
651	423801	275894451	25,515	8,667	2045,18	332853,40
652	425104	277167808	25,534	8,671	2048,32	333876,68
653	426409	278445077	25,554	8,676	2051,46	334901,62
654	427716	279726264	25,573	8,680	2054,60	335928,14
655	429025	281011375	25,593	8,684	2057,74	336956,23
656	430336	282300416	25,612	8,689	2060,88	337985,89
657	431649	283593393	25,632	8,693	2064,03	339017,12
658	432964	284890312	25,651	8,698	2067,17	340049,92
659	434281	286191179	25,671	8,702	2070,31	341084,29
660	435600	287496000	25,690	8,706	2073,45	342120,24
661	436921	288804781	25,710	8,711	2076,59	343157,75
662	438244	290117528	25,729	8,715	2079,73	344196,33
663	439569	291434272	25,749	8,719	2082,88	345237,49
664	440896	292754944	25,768	8,724	2086,02	346279,71
665	442225	294079625	25,787	8,728	2089,16	347323,51
666	443556	295408296	25,807	8,733	2092,30	348368,88
667	444889	296740963	25,826	8,737	2095,44	349416,40
668	446224	298077632	25,846	8,742	2098,58	350464,32
669	447561	299418309	25,865	8,746	2101,73	351514,30
670	448900	300763000	25,884	8,750	2104,87	352566,06
671	450241	302111711	25,904	8,753	2108,01	353619,28
672	451548	303464448	25,923	8,759	2111,15	354674,07

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n^2	Kubikzahl n^3	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2\pi}{4}$
673	452929	304821217	25,942	8,763	2114,29	355730,43
674	454276	306182024	25,961	8,768	2117,43	356788,37
675	455625	307546875	25,981	8,772	2120,58	357847,87
676	456976	308915776	26,000	8,776	2123,72	358908,95
677	458329	310288733	26,019	8,781	2126,86	359971,59
678	459684	311665752	26,038	8,785	2130,00	361035,81
679	461041	313046839	26,058	8,789	2133,14	362101,60
680	462400	314432000	26,077	8,794	2136,28	363168,96
681	463761	315821241	26,096	8,798	2139,42	364237,88
682	465124	317214568	26,115	8,802	2142,57	365308,38
683	466489	318611987	26,134	8,807	2145,71	366380,40
684	467856	320013504	26,153	8,811	2148,85	367454,10
685	469225	321419125	26,172	8,815	2151,99	368529,31
686	470596	322828856	26,192	8,819	2155,13	369605,60
687	471969	324242703	26,211	8,824	2158,27	370684,45
688	473344	325660672	26,229	8,828	2161,42	371764,37
689	474721	327082769	26,249	8,832	2164,56	372845,87
690	476100	328509000	26,268	8,836	2167,70	373928,94
691	477481	329939371	26,287	8,841	2170,84	375013,57
692	478864	331373888	26,306	8,845	2173,98	376099,78
693	480249	332812557	26,325	8,849	2177,12	377187,56
694	481636	334255384	26,344	8,853	2180,27	378276,91
695	483025	335702375	26,363	8,858	2183,41	379367,83
696	484416	337153536	26,382	8,862	2186,55	380460,32
697	485809	338608873	26,401	8,866	2189,69	381554,38
698	487204	340068392	26,419	8,870	2192,83	382650,02
699	488601	341532099	26,439	8,875	2195,97	383747,22
700	490000	343000000	26,457	8,879	2199,12	384846,00
701	491401	344472101	26,476	8,883	2202,26	385945,44
702	492804	345948408	26,495	8,887	2205,40	387048,26
703	494209	347428927	26,514	8,892	2208,54	388151,74
704	495616	348913664	26,533	8,896	2211,68	389256,80
705	497025	350402625	26,552	8,900	2214,82	390363,43
706	498436	351895816	26,571	8,904	2217,96	391471,63
707	499849	353393243	26,589	8,908	2221,11	392581,40
708	501264	354894912	26,608	8,913	2224,25	393692,74
709	502681	356400829	26,627	8,917	2227,39	394805,65
710	504100	357911000	26,645	8,921	2230,53	395920,14
711	505521	359425431	26,664	8,925	2233,67	397036,19
712	506944	360944128	26,683	8,929	2236,81	398151,81

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n^2	Kubikzahl n^3	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2\pi}{4}$
713	508369	362467097	26,702	8,934	2239,96	399273,01
714	509796	363994344	26,721	8,938	2243,10	400393,73
715	511225	365525875	26,739	8,942	2246,24	401516,11
716	512656	367061696	26,758	8,946	2249,38	402640,02
717	514089	368601813	26,777	8,950	2252,52	403765,50
718	515524	370146232	26,795	8,954	2255,66	404892,54
719	516961	371694959	26,814	8,959	2258,81	406021,16
720	518400	373248000	26,833	8,963	2261,95	407151,36
721	519841	374805361	26,851	8,967	2265,09	408283,32
722	521284	376367048	26,870	8,971	2268,23	409416,45
723	522729	377933067	26,889	8,975	2271,37	410551,25
724	524176	379503424	26,907	8,979	2274,51	411687,93
725	525625	381078125	26,926	8,983	2277,66	412825,87
726	527076	382657176	26,944	8,988	2280,80	413965,24
727	528529	384240583	26,963	8,992	2283,94	415106,06
728	529984	385828352	26,982	8,996	2287,08	416249,43
729	531441	387420489	27,000	9,000	2290,22	417393,76
730	532900	389017000	27,018	9,004	2293,36	418539,66
731	534361	390617891	27,037	9,008	2296,50	419687,12
732	535824	392223168	27,055	9,012	2299,65	420836,14
733	537289	393832837	27,074	9,016	2302,79	421986,78
734	538756	395446904	27,092	9,020	2305,93	423138,96
735	540225	397065375	27,111	9,025	2309,07	424292,71
736	541696	398688256	27,129	9,029	2312,21	425442,03
737	543169	400315553	27,148	9,033	2315,35	426604,93
738	544644	401947272	27,166	9,037	2318,50	427763,39
739	546121	403583419	27,184	9,041	2321,64	428923,43
740	547600	405224000	27,203	9,045	2324,78	430085,04
741	549081	406869021	27,221	9,049	2327,92	431248,21
742	550564	408518488	27,239	9,053	2331,06	432412,96
743	552049	410172407	27,258	9,057	2334,20	433579,28
744	553536	411830784	27,276	9,061	2337,35	434747,17
745	555025	413493625	27,295	9,065	2340,49	435916,63
746	556516	415160936	27,313	9,069	2343,63	437087,66
747	558009	416832723	27,331	9,073	2346,77	438260,26
748	559504	418508992	27,349	9,077	2349,91	439434,48
749	561001	420189749	27,368	9,081	2353,05	440610,18
750	562500	421875000	27,386	9,085	2356,20	441787,50
751	564001	423564751	27,404	9,089	2359,34	442966,38
752	565504	425259008	27,423	9,094	2362,48	444146,84

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n^2	Kubikzahl n^3	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2\pi}{4}$
753	567009	426957777	27,441	9,098	2365,62	445328,86
754	568516	428661064	27,459	9,102	2368,76	446512,46
755	570025	430368875	27,477	9,106	2371,90	447697,63
756	571536	432081216	27,495	9,109	2375,04	448884,37
757	573049	433798093	27,514	9,114	2378,19	450072,68
758	574564	435519512	27,532	9,118	2381,33	451262,56
759	576081	437245479	27,549	9,122	2384,47	452454,01
760	577600	438976000	27,568	9,126	2387,61	453647,04
761	579121	440711081	27,586	9,129	2390,75	454841,63
762	580644	442450728	27,604	9,134	2393,89	456037,87
763	582169	444194947	27,622	9,138	2397,04	457235,53
764	583696	445943744	27,640	9,142	2400,18	458435,83
765	585225	447697125	27,659	9,146	2403,32	459635,71
766	586756	449455096	27,677	9,149	2406,46	460838,16
767	588289	451217663	27,695	9,154	2409,60	462042,18
768	589824	452984832	27,713	9,158	2412,74	463247,76
769	591361	454756609	27,731	9,162	2415,98	464454,92
770	592900	456533000	27,749	9,166	2419,03	465663,66
771	594441	458314011	27,767	9,170	2422,17	466873,96
772	595984	460099648	27,785	9,174	2425,31	468085,83
773	597529	461889917	27,803	9,178	2428,45	469299,27
774	599076	463684824	27,821	9,182	2431,59	470514,29
775	600625	465484375	27,839	9,185	2434,74	471730,87
776	602176	467288376	27,857	9,189	2437,88	472949,03
777	603729	469097433	27,875	9,193	2441,02	474168,75
778	605284	470910952	27,893	9,197	2444,16	475390,05
779	606841	472729139	27,911	9,201	2447,30	476612,92
780	608400	474552000	27,928	9,205	2450,44	477837,36
781	609961	476379541	27,946	9,209	2453,58	479063,36
782	611524	478211768	27,964	9,213	2456,73	480290,94
783	613089	480048687	27,982	9,217	2459,87	481520,10
784	614656	481890304	28,000	9,221	2463,01	482750,82
785	616225	483736625	28,018	9,225	2466,15	483983,11
786	617796	485587656	28,036	9,229	2469,29	485216,97
787	619369	487443403	28,054	9,233	2472,43	486452,41
788	620944	489303872	28,071	9,237	2475,58	487689,73
789	622521	491169069	28,089	9,240	2478,72	488927,99
790	624100	493039000	28,107	9,244	2481,86	490168,14
791	625681	494913671	28,125	9,248	2485,00	491409,85
792	627264	496793088	28,142	9,252	2488,14	492653,14

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n²	Kubikzahl n³	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2 \cdot \pi}{4}$
793	628849	498677257	28,160	9,256	2491,28	493898,20
794	630436	500566184	28,178	9,260	2494,43	495144,43
795	632025	502459875	28,196	9,264	2497,57	496392,43
796	633616	504358336	28,213	9,268	2500,71	497642,40
797	635209	506261573	28,231	9,272	2503,85	498893,14
798	636804	508169592	28,249	9,275	2506,99	500145,86
799	638401	510082399	28,267	9,279	2510,13	501400,14
800	640000	512000000	28,284	9,283	2513,28	502656,00
801	641601	513922401	28,302	9,287	2516,42	503913,42
802	643204	515849608	28,320	9,291	2519,56	505172,43
803	644809	517781627	28,337	9,295	2522,70	506432,98
804	646416	519718464	28,355	9,299	2525,84	507695,52
805	648025	521660125	28,373	9,302	2528,98	508958,83
806	649636	523606616	28,390	9,306	2532,12	510224,11
807	651249	525557943	28,408	9,310	2535,27	511490,96
808	652864	527514112	28,425	9,314	2538,41	512759,38
809	654481	529475129	28,443	9,318	2541,55	514029,37
810	656100	531441000	28,460	9,322	2544,09	515300,94
811	657721	533411731	28,478	9,326	2547,83	516574,07
812	659344	535387328	28,496	9,329	2550,97	517848,77
813	660969	537367797	28,513	9,333	2554,12	519125,05
814	662596	539353144	28,531	9,337	2557,26	520402,85
815	664225	541343375	28,548	9,341	2560,40	521682,31
816	665856	543338496	28,566	9,345	2563,54	522963,30
817	667489	545338513	28,583	9,348	2566,68	524245,86
818	669124	547343432	28,601	9,352	2569,82	525529,98
819	670761	549353259	28,618	9,356	2572,97	526815,68
820	672400	551368000	28,636	9,360	2576,11	528102,96
821	674041	553387661	28,653	9,364	2579,25	529391,80
822	675684	555412248	28,671	9,368	2582,39	530682,21
823	677329	557441767	28,688	9,371	2585,53	531974,39
824	678976	559476224	28,705	9,375	2588,67	533267,75
825	680625	561515625	28,723	9,379	2591,82	534562,87
826	682276	563559976	28,740	9,383	2594,96	535859,57
827	683929	565609283	28,758	9,386	2598,10	537158,83
828	685584	567663552	28,775	9,390	2601,24	538457,62
829	687241	569722789	28,792	9,394	2604,38	539759,08
830	688900	571787000	28,810	9,398	2607,52	541062,06
831	690561	573856191	28,827	9,402	2610,66	542366,50
832	692224	575930368	28,844	9,405	2613,81	543672,72

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n^2	Kubikzahl n^3	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2\pi}{4}$
833	693889	578009537	28,862	9,409	2616,95	544980,52
834	695556	580093704	28,879	9,413	2620,09	546289,68
835	697225	582182875	28,896	9,417	2623,23	547600,51
836	698896	584277056	28,914	9,420	2626,37	548912,91
837	700569	586376253	28,931	9,424	2629,51	550226,89
838	702244	588480472	28,948	9,428	2632,64	551542,43
839	703921	590589719	28,965	9,432	2635,80	552859,58
840	705600	592704000	28,983	9,435	2638,94	554178,24
841	707281	594823321	29,000	9,439	2642,08	555498,49
842	708964	596947688	29,017	9,443	2645,22	556820,32
843	710649	599077107	29,034	9,447	2648,36	558143,72
844	712336	601211584	29,052	9,450	2651,51	559468,69
845	714025	603351125	29,069	9,454	2654,65	560795,23
846	715716	605495736	29,086	9,458	2657,79	562123,34
847	717409	607645423	29,103	9,462	2660,93	563452,82
848	719104	609800192	29,120	9,465	2664,07	564784,28
849	720801	611960049	29,138	9,469	2667,21	566117,10
850	722500	614125000	29,155	9,473	2670,36	567451,59
851	724201	616295051	29,172	9,476	2673,50	568787,46
852	725904	618470208	29,189	9,480	2676,64	570125,00
853	727609	620650477	29,206	9,484	2679,78	571464,10
854	729316	622835864	29,223	9,488	2682,92	572804,78
855	731025	625026375	29,240	9,491	2686,06	574147,03
856	732736	627222016	29,257	9,495	2689,20	575490,85
857	734449	629422793	29,275	9,499	2692,35	576836,24
858	736164	631628712	29,292	9,502	2695,49	578183,20
859	737881	633839779	29,309	9,506	2698,63	579531,73
860	739600	636056000	29,326	9,510	2701,77	580881,84
861	741321	638277381	29,343	9,513	2704,91	582233,51
862	743044	640503928	29,360	9,517	2708,05	583586,75
863	744769	642735647	29,377	9,521	2711,20	584941,57
864	746496	644972544	29,394	9,524	2714,34	586297,95
865	748225	647214625	29,411	9,528	2717,48	587655,91
866	749956	649461896	29,428	9,532	2720,62	589015,41
867	751689	651714363	29,445	9,535	2723,76	590376,54
868	753424	653972032	29,462	9,539	2726,90	591739,20
869	755161	656234909	29,479	9,543	2730,05	593103,44
870	756900	658503000	29,496	9,546	2733,19	594469,26
871	758641	660776311	29,513	9,550	2736,33	595836,44
872	760384	663054848	29,530	9,554	2739,87	597205,59

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n^2	Kubikzahl n^3	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2\pi}{4}$
873	762129	665338617	29,547	9,557	2742,61	598576,91
874	763876	667627624	29,563	9,561	2745,75	599948,21
875	765625	669921875	29,580	9,565	2748,90	601321,87
876	767376	672221376	29,597	9,568	2752,04	602697,11
877	769129	674526133	29,614	9,572	2755,18	604073,91
878	770884	676836152	29,631	9,576	2758,32	605451,49
879	772641	679151439	29,648	9,579	2761,46	606832,24
880	774400	681472000	29,665	9,583	2764,60	608213,76
881	776161	683797841	29,682	9,586	2767,74	609296,84
882	777924	686128968	29,698	9,590	2770,89	610981,50
883	779689	688465387	29,715	9,594	2774,03	612367,74
884	781456	690807104	29,732	9,597	2777,17	613755,54
885	783225	693154125	29,749	9,601	2780,31	615144,91
886	784996	695506456	29,766	9,605	2783,45	616535,85
887	786769	697864103	29,783	9,608	2786,59	617928,37
888	788544	700227072	29,799	9,612	2789,75	619322,45
889	790321	702595369	29,816	9,615	2792,88	622718,11
890	792100	704969000	29,833	9,619	2796,02	622115,34
891	793881	707347971	29,850	9,623	2799,16	623514,13
892	795664	709732288	29,866	9,626	2802,30	624913,50
893	797449	712121967	29,883	9,630	2805,44	626314,44
894	799236	714516984	29,900	9,633	2808,59	627717,95
895	801025	716917375	29,917	9,637	2811,73	629124,35
896	802816	719323136	29,933	9,641	2814,87	630531,68
897	804609	721734273	29,950	9,644	2818,01	631939,90
898	806404	724150792	29,967	9,648	2821,15	633349,70
899	808201	726572699	29,983	9,651	2824,29	634760,13
900	810000	729000000	30,000	9,655	2827,44	636174,00
901	811801	731432701	30,017	9,658	2830,58	637588,50
902	813604	733870808	30,033	9,662	2833,72	639004,58
903	815409	736314327	30,050	9,666	2836,86	640422,22
904	817216	738763264	30,067	9,669	2840,00	641841,44
905	819025	741217625	30,083	9,673	2843,14	643262,23
906	820836	743677416	30,100	9,676	2846,28	644684,74
907	822649	746142643	30,116	9,680	2849,43	646108,52
908	824464	748613312	30,133	9,683	2852,57	647534,02
909	826281	751089429	30,150	9,687	2855,71	648961,09
910	828100	753571000	30,166	9,691	2858,85	650389,74
911	829921	756058031	30,183	9,694	2861,99	651819,95
912	831744	758550528	30,199	9,698	2865,13	653251,73

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n^2	Kubikzahl n^3	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2\pi}{4}$
913	833569	761048497	30,216	9,701	2868,27	654684,09
914	835396	763551944	30,232	9,705	2871,42	656120,81
915	837225	766060875	30,249	9,708	2874,56	657556,51
916	839056	768575296	30,265	9,712	2877,70	658994,58
917	840889	771095213	30,282	9,715	2880,84	660432,22
918	842724	773620632	30,299	9,719	2883,98	661875,42
919	844561	776151559	30,315	9,722	2887,13	663318,20
920	846400	778688000	30,332	9,726	2890,27	664762,56
921	848241	781229961	30,348	9,729	2893,41	666208,48
922	850084	783777448	30,364	9,733	2896,55	667655,97
923	851929	786330467	30,381	9,736	2899,69	669104,61
924	853776	788889024	30,397	9,740	2902,83	670555,67
925	855625	791453125	30,414	9,743	2905,98	672007,87
926	857476	794022776	30,430	9,747	2909,12	673461,65
927	859329	796597083	30,447	9,750	2912,26	674916,99
928	861184	799178752	30,463	9,754	2915,40	676373,91
929	863041	801765089	30,480	9,758	2918,54	677832,40
930	864900	804357000	30,496	9,761	2921,68	679292,46
931	866761	806954491	30,512	9,764	2924,82	680754,08
932	868624	809557568	30,529	9,768	2927,97	682217,30
933	870489	812166237	30,545	9,771	2931,11	683682,06
934	872356	814780504	30,561	9,775	2934,25	685148,40
935	874225	817400375	30,578	9,778	2937,39	686616,31
936	876096	820025856	30,594	9,783	2940,53	688085,79
937	877969	822656953	30,610	9,785	2943,67	689556,85
938	879844	825293672	30,627	9,789	2946,82	691029,47
939	881721	827936019	30,643	9,792	2949,96	692503,67
940	883600	830584000	30,659	9,796	2953,10	693979,44
941	885481	833237621	30,676	9,799	2956,24	695456,77
942	887364	835896888	30,692	9,803	2959,38	696935,68
943	889249	838561807	30,728	9,806	2962,52	698416,14
944	891136	841232384	30,750	9,810	2965,67	699898,21
945	893025	843908625	30,741	9,813	2968,81	701381,83
946	894916	846590536	30,757	9,817	2971,95	702867,02
947	896809	849278123	30,773	9,820	2975,09	704352,25
948	898704	851971392	30,790	9,824	2978,23	705841,80
949	900601	854670349	30,806	9,827	2981,37	707332,02
950	902500	857375000	30,822	9,830	2984,52	708823,50
951	904401	860085351	30,838	9,834	2987,66	710316,54
952	906304	862801408	30,854	9,837	2990,80	711811,16

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n^2	Kubikzahl n^3	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2\pi}{4}$
953	908209	865523177	30,871	9,841	2993,94	713307,34
954	910116	868250664	30,887	9,844	2997,08	714805,10
955	912025	870983875	30,903	9,848	3000,22	716304,43
956	913936	873722816	30,919	9,851	3003,36	717805,33
957	915849	876467493	30,935	9,855	3006,51	719307,80
958	917764	879217912	30,952	9,858	3009,65	720811,84
959	919681	881974079	30,968	9,861	3012,79	722317,45
960	921600	884736000	30,984	9,865	3015,93	723824,64
961	923521	887503681	31,000	9,868	3019,07	725333,39
962	925444	890277128	31,016	9,872	3022,21	726843,71
963	927369	893056347	31,032	9,875	3025,36	728355,61
964	929296	895841344	31,048	9,879	3028,50	729869,07
965	931225	898632125	31,064	9,882	3031,64	731384,11
966	933156	901428696	31,081	9,885	3034,78	732900,72
967	935089	904231063	31,097	9,889	3037,92	734418,90
968	937024	907039232	31,113	9,892	3041,06	735938,64
969	938961	909853209	31,129	9,896	3044,21	737459,96
970	940900	912673000	31,145	9,999	3047,35	738982,86
971	942841	915498611	31,161	9,902	3050,49	740507,32
972	944784	918330048	31,177	9,906	3053,63	742033,35
973	946729	921167317	31,193	9,909	3056,77	743560,95
974	948676	924010424	31,209	9,913	3059,91	745090,13
975	950625	926859375	31,225	9,916	3063,06	746620,87
976	952576	929714176	31,241	9,919	3066,20	748153,19
977	954529	932574833	31,257	9,923	3069,34	749687,07
978	956484	935441352	31,273	9,926	3072,48	751222.53
979	958441	938313739	31,289	9,930	3075,62	752759,56
980	960400	941192000	31,305	9,933	3078,76	754298,16
981	962361	944076141	31,321	9,936	3081,90	755838,32
982	964324	946966168	31,337	9,940	3085,05	757380,06
983	966289	949862087	31,353	9,943	3088,19	758923,38
984	968256	952763904	31,369	9,946	3091,33	760468,26
985	970225	955671625	31,385	9,950	3094,47	762014,71
986	972196	958585256	31,401	9,953	3097,61	763562,73
987	974169	961504803	31,417	9,956	3100,75	765119,93
988	976144	964430272	31,432	9,960	3103,89	766663,49
989	978121	967361669	31,448	9,963	3107,04	768216,23
990	980100	970299000	31,464	9,967	3110,18	769770,54
991	982081	973242271	31,480	9,970	3113,32	771326,41
992	984064	976191488	31,496	9,973	3116,46	772883,86

Zahl, auch Durchmesser n	Quadratzahl n^2	Kubikzahl n^3	Quadratwurzel $\sqrt{n}$	Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$	Kreisumfang $n\pi$	Kreisfläche $\frac{n^2\pi}{4}$
993	986049	979146657	31,512	9,977	3119,16	774442,88
994	988036	982107784	31,528	9,980	3122,75	776003,47
995	990025	985084875	31,544	9,983	3125,89	777565,63
996	992016	988047936	31,559	9,987	3129,03	779129,36
997	994009	991026273	31,575	9,990	3132,17	780693,66
998	996004	994011992	31,591	9,993	3135,31	782260,54
999	998001	997002999	31,607	9,997	3138,45	783829,98
1000	1000000	1000000000	31,623	10,000	3141,59	785398,16

Gebrauch dieser Tabelle.

1. Es soll die Quadratwurzel von 7354 angegeben werden.

Man findet in der Abteilung „Quadratzahl" auf S. 501 zwei Zahlen 7225 und 7396, zwischen welchen 7354 liegt; also wird auch die Quadratwurzel zwischen den beiden Zahlen 85 und 86, die links in der Abteilung „Zahl" stehen, liegen. Um die Wurzel noch näher zu finden, suche man in der Abteilung „Quadratzahl" zwei Zahlen, zwischen welchen 7354,00 liegt. Man findet auf S. 520 die Zahlen 7344,49 und 7361,64; also liegt die Wurzel zwischen 85,7 und 85,8.

2. Es sei die Kubikwurzel aus 0,0385 zu suchen.

Man bilde die Abteilungen 0,|038|500| und schreibe dafür zunächst 38|500|000|, so findet man auf S. 507 zwei Zahlen 38|272|753| und 38|614|472|, zwischen denen die gegebene liegt. Also wird die Wurzel zwischen 0,337 und 0,338 liegen, doch näher der letztern.

3. Ein Kreis habe 0,05243 qm Fläche. Wie groß ist sein Durchmesser?

Man teile die Zahl in die Klassen 0,|05|24|30| und sehe in der Abteilung „Kreisfläche" nach, zwischen welchen zwei benachbarten Werten die Zahl 52430 liegt. Man findet auf S. 505 die beiden Zahlen 52279 und 52685; also liegt der Durchmesser zwischen 258 und 259, d. h. mit Rücksicht auf das Komma zwischen 0,258 und 0,259 m.

Bernoulli, Christoph

Bernoulli's Vademecum des Mechanikers oder Praktisches Handbuch für Mechanikers, Techniker, Gewerbsleute und technische Lehranstalten bearbeitet von Friedrich Autenheimer

Stuttgart 1894